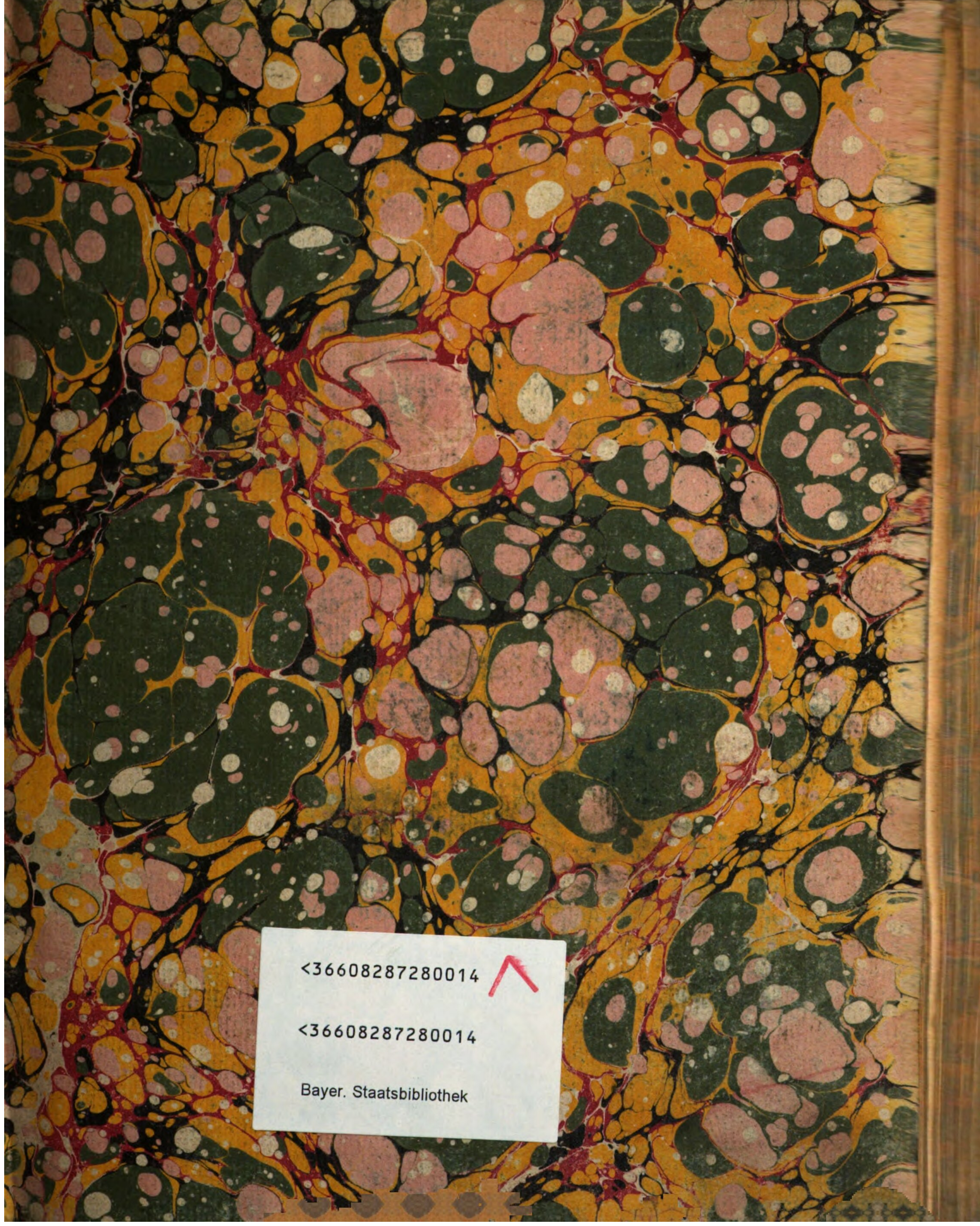








<36608287280014



<36608287280014

Bayer. Staatsbibliothek

4^o Math. u. 114

114 R

Malk:

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

PHYSICS

ROBERT T. SIMSON, M.D.

1874

CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

PHYSICS

ROBERT T. SIMSON, M.D.

1874

CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

4^o Math Un. 114

Mathesis. Opera mathematicorum 36.

ROBERTI SIMSON M.D.

OPERA QUAE DAM GEOMETRICA

POST MORTEM EJUS

R

IMPERII PHILIPPI COMITIS STANHOPE

IMPRESA

ROBERTI SIMSON, M. D.

OPERA QUAEDAM GEOMETRICA

POST MORTEM EJUS

IMPENSIS PHILIPPI COMITIS STANHOPE

I M P R E S S A.

ROBERTI SIMSON M.D.

INSTITUTIONES ARITHMETICAE ET ALGEBRAE
PROFESSORIS

OPERA QUAE AD ARITHMETICAM ET ALGEBRAM

PER ROBERTUM SIMSONEM
MAGISTRO ARITHMETICAE ET ALGEBRAE
IN ACADEMIA VIRIDIANA
PROFESSOREM
EDIDIT
J. H. M. D.

ROBERTI SIMSON M.D.

OPERA QUAE AD ARITHMETICAM ET ALGEBRAM
PER ROBERTUM SIMSONEM
MAGISTRO ARITHMETICAE ET ALGEBRAE
IN ACADEMIA VIRIDIANA
PROFESSOREM
EDIDIT
J. H. M. D.

POST PRIMUM POST AUCTORIS MORTEM
EDIDIT J. H. M. D.

OPERA QUAE AD ARITHMETICAM ET ALGEBRAM

PER ROBERTUM SIMSONEM
MAGISTRO ARITHMETICAE ET ALGEBRAE
IN ACADEMIA VIRIDIANA
PROFESSOREM
EDIDIT
J. H. M. D.

OPERA QUAE AD ARITHMETICAM ET ALGEBRAM
PER ROBERTUM SIMSONEM
MAGISTRO ARITHMETICAE ET ALGEBRAE
IN ACADEMIA VIRIDIANA
PROFESSOREM
EDIDIT
J. H. M. D.

OPERA QUAE AD ARITHMETICAM ET ALGEBRAM
PER ROBERTUM SIMSONEM
MAGISTRO ARITHMETICAE ET ALGEBRAE
IN ACADEMIA VIRIDIANA
PROFESSOREM
EDIDIT
J. H. M. D.



ROBERTUS SIMSON, M. D.
MATHESEOS IN ACADEMIA GLASGUENSI
PROFESSOR

Obiit ipsis Kalendis Octobris Anno 1768

AETATIS 81.^{mo}

De Nune pinxit 1746

A. Baillie delin^t et sculp^t 1776

ROBERTI SIMSON, M. D.

MATHESEOS NUPER IN ACADEMIA GLASGUENSI
PROFESSORIS

OPERA QUAEDAM RELIQUA,

SCILICET,

- I. APOLLONII PERGAEI DE SECTIONE DETERMINATA LIBRI II. RESTITUTI,
DUOBUS INSUPER LIBRIS AUCTI.
- II. PORISMATUM LIBER, QUO DOCTRINAM HANC VETERUM GEOMETRARUM
AB OBLIVIONE VINDICARE, ET AD CAPTUM HODIERNORUM ADUMBRARE
CONSTITUTUM EST.
- III. DE LOGARITHMIS LIBER.
- IV. DE LIMITIBUS QUANTITATUM ET RATIONUM, FRAGMENTUM.
- V. APPENDIX PAUCA CONTINENS PROBLEMATA AD ILLUSTRANDAM PRAE-
CIPUE VETERUM GEOMETRARUM ANALYSIN.

NUNC PRIMUM POST AUCTORIS MORTEM
IN LUCEM EDITA

IMPENSIS QUIDEM PHILIPPI COMITIS STANHOPE,

CURA VERO JACOBI CLOW IN EADEM ACADEMIA
PHILOSOPHIAE PROFESSORIS,

CUI, AUCTOR OMNIA SUA MANUSCRIPTA TESTAMENTO LEGAVERAT.

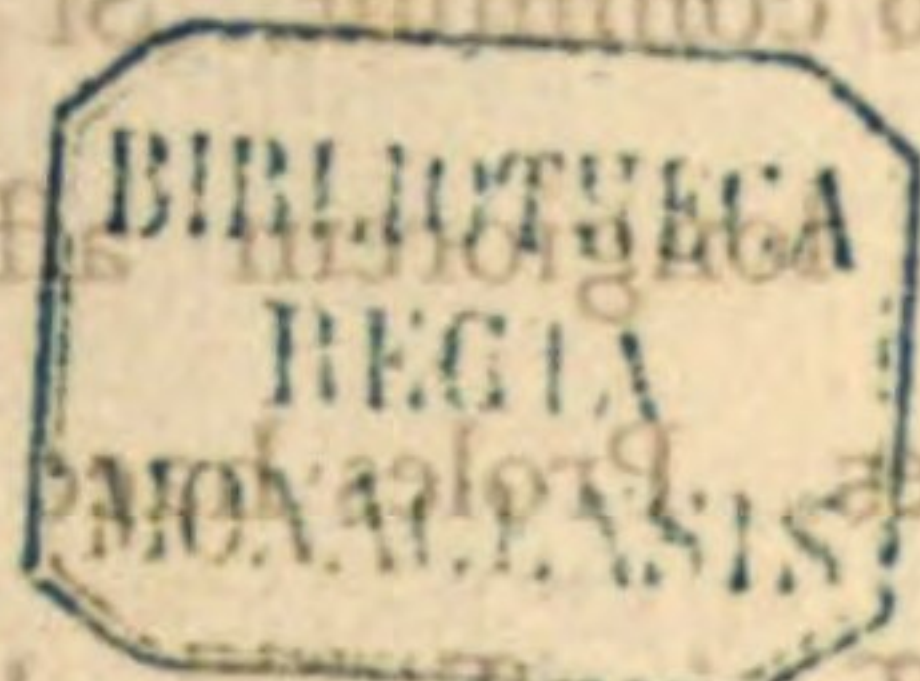
GRATUM, UT SPERATUR, GEOMETRIS MUNUS FUTURUM, NEC SCRIPTORIS,
JAM CLARISSIMI, FAMAE OFFECTURUM.

GLASGUA E:

IN AEDIBUS ACADEMICIS,
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI,
M.DCC.LXXVI.

VIX fieri potest, quin, post summam curam adhibitam, in opere tam longo et difficili plurimi restent adhuc errores. Facendum praeterea, quod in figuris omnino deest elegantia. Hoc artifice minus perito vitio vertendum, cui Typographus operam eas incidendi ligno commisit. Si vero nihil occurrat, quod Geometrae motum adhibere possit, his ut ignoscant, rogantur lectores. Profectum est posthuma, quae praeparatur parentis clarissimi officii orbat, indulgentiam ideo requirit. Imperfectiores ab eo relicti erant libri de Logarithmis et de Linisbus Quantitatum et Rationum. Hos recensuit, emendavit, et in his defectus quosdam supplevit Gulielmus Traill, L. D. Matheseos in Abredonensi Academiis professor, nunc antequam in Ecclesia Cathedrali de Connor Praebendarius. Idem, problemata in Appendice e complurimis, quae in Authoris manuscriptis reperuntur, legiit; et in tribus hinc partibus laborem corrigendi praestum in se penevole suscepit. Ille quidem amicitiae memor, quae celeberrimus Author iam senex se, juvenem adhuc, complexus est, hanc omnem curam ad scripta eius perticenda persubenter adhibuit.

JACOBUS CLOW.



VIX fieri potest, quin, post summam curam adhibitam, in opere tam longo et difficili plurimi restent adhuc errores. Fatendum praeterea, quod in figuris omnino deest elegantia. Hoc artifici minus perito vitio vertendum, cui Typographus operam eas incidendi ligno commisit. Si vero nihil occurrat, quod Geometrae moram longiorem afferre possit, his ut ignoscant, rogantur lectores. Proles haec est posthuma, quae praematurè parentis clarissimi officiis orbata, indulgentiam ideo requirit. Imperfectiores ab eo relictæ erant libri de Logarithmis et de Limitibus Quantitatum et Rationum. Hos recensuit, emendavit, et in iis defectus quosdam supplevit Gulielmus Traill, L. L. D. Mathefeos in Abredonenfi Academia professor, nunc autem in Ecclesia Cathedrali de Connor Praebendarius. Idem, problemata in Appendice e complurimis, quae in Auctoris manuscriptis reperiuntur, selegit; et in tribus hisce partibus laborem corrigendi praelum in se benevolè suscepit. Ille quidem amicitiae memor, qua celeberrimus Auctor jam senex se, juvenem adhuc, complexus est, hanc omnem curam ad scripta ejus perficienda perlubenter adhibuit.

JACOBUS CLOW.

DE SECTIONE DETERMINATA

VIZ ANTIQVAE, MODICA, ET RECENTIORA

OPERA ANTIQVAE, MODICA, ET RECENTIORA

APOLLONII PERCASSI

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

DE ANTIQVA, MODICA, ET RECENTIORA

Bayerische
Staatsbibliothek
München

DE SECTIONE DETERMINATA

LIBRI QUATUOR.

PRIORES SUNT

APOLLONII PERGAEI

DE SECTIONE DETERMINATA, LIBRI DUO,

RESTITUTI.

PRAEMITTUNTUR VERO

LEMMATA

IN LIBROS HOSCE APOLLONII,

EX LIBRO SEPTIMO

PAPPI ALEXANDRINI.

AUCTORE

ROBERTO SIMSON, M. D.

MATHESEOS IN ACADEMIA GLASGUENSI

NUPER PROFESSORE.

P R A E F A T I O

LIBRI QUARTI

TOTA quae nobis hactenus innotuit de sec-
tione Determinata scriptis magis Ciceronis Apollonius
Terentius, tota sapientia Alexandrinis debetur, qui omnia quae
in hisce libris continerentur, expositis, una cum suis
ratione incluit. Plures etiam propositiones sub Determinata
nomine tradit Pappus, quibus illarum pars, cum ex
ipsis Apollonii libris debille minime dubitandum est; mul-
tas enim earum rectas sunt, etiam si quibus in suis
demonstrationibus uti Apollonio necessarium fuit, ut ex ipsis
de Sectione Determinata libris perspicue appareat; et qui-
dem praecipuae et altissimae sunt partes demonstrationum
earum, quodlibet quibus interuenit, disputare propter
nullas sine demonstratione acceptas. Quare in li-
bri de Sectione Determinata descriptione recte Apollo-
nium primum, postea Ciceronem, deinde Alexandrum me-
thodo, ac totis rectis hucus usque fuisse; ac rursus eandem
ostendisse ingenuitate et Anaxagorae methodum accommodare
per simpliciores; utriusque autem hac res prae ex his quae scri-
psit Pappus, etiam manifestum est, quae quidem ip-
sius esse Apollonii, eandem eadem propositionibus suis praec-
tuisse, recte ex Apollonii libris Pappum ea collegisse perspi-
cuum est. Quae res habetur in propositionibus 61, 62, 63,
lib. 5. Pappi, secundum Commandum annotationem, non
sunt leuissimae, sed, praecipue, eximiae quibus determinat-
iones tres in libro secundo Sectionis Determinatae ostenduntur.

PRAEFATIO.

TOTA quae nobis superest notitia librorum quos de Sectione Determinata scripsit magnus Geometra Apollonius Pergaeus, solo Pappo Alexandrino debetur, qui omnes quae in hisce libris continebantur propositiones una generali enuntiatione inclusit. Plures etiam propositiones sub Lemmatum nomine tradit Pappus, quarum maximam partem, eum ex ipsius Apollonii libris dedisse minime dubitandum est; multae enim earum revera sunt lemmata quibus saepius in suis demonstrationibus uti Apollonio necessarium fuit, ut ex ipsis de Sectione Determinata libris perspicue apparebit; et quidem praecipuae et difficiliore sunt partes demonstrationum earum propositionum quibus inserviunt, quibusque propterea nullus sine demonstratione uteretur. Praeterea Pappus in librorum de Sectione Determinata descriptione refert Apollonium primo propositiones suas demonstrasse communi methodo, ac solis rectis lineis usum fuisse; ac rursus easdem ostendisse ingeniose et magis ad institutionem accommodate per semicirculos; utrâque autem hac viâ plura ex iis quae servavit Pappus Lemmata demonstrata sunt; quae quidem ipsius esse Apollonii, eumque eadem propositionibus suis praemisisse, atque ex Apollonii libris Pappum ea collegisse perspicuum est. Quae vero habentur in propositionibus 61, 62, 64, lib. 7. Pappi, secundum Commandini numerationem, non sunt lemmata, sed propositiones eximiae quibus determinationes tres in libro secundo Sectionis Determinatae osten-

duntur, quarum demonstrationes Apollonium non dedisse minime existimandum est.

Hosce Apollonii libros conatus est Willebrordus Snellius restituere in Apollonio suo Batavo, quem Lugd. Bat. anno 1608 edidit, in quo multa quidem magnifice de se jactat, nihil autem praestitit quod immodicae sui ipsius laudationi convenit. Minime enim Apollonii propositum in hisce libris affecutus est, nam in quatuor tantum problemata materiam hanc partitus est quam in novem Apollonius distribuerat; et quamvis problemata in varios casus dividat, unam tantum demonstrationem in unoquoque problemate adducit. Neque eandem cum Apollonio Epitagmatum numerum habet; nec mirum, cum non intellexerit quid sint epitagmata, quae quidem variae sunt dispositiones quas habere requiritur punctum inveniendum ratione punctorum datorum; vel scilicet ut cadat inter duo quaevis ex punctis datis, vel extra omnia ad has vel illas eorum partes; unde et nomen διορισμένης τομῆς, Sectionis Determinatae, hisce libris inditum est, propter situm scilicet determinatum sive definitum quem habere debet punctum quo recta proposita secanda est, et propter situm determinatum punctorum inter quae et punctum inveniendum jacere debent latera rectangulorum et quadrati, spatiorum scilicet quae inter se datam requiruntur habere rationem; non, ut inepte putat Snellius, ex eo quod libri hi problemata quaedam continent quae determinationes habent, quod propterea vocat adjunctum levissimum, ex quo scilicet somniat Apollonium nomen libris suis dedisse. Snellius vero diversa facit epitagmata casus quosdam in quibus unus idemque est situs puncti inveniendi, ut in secundo et tertio epi-

tagmate primae classis problematis sui quarti, aliisque. Praeterea, quod majoris est momenti, nullius problematis in hisce libris analyfin tradit, unde et suas ipsorum determinaciones assumit, non ex solutione problematum deducit. Duas quidem Apollonii, quas in enuntiatione Propp. 61 et 64, Lib. 7. Pappi invenerat, suo modo ostendit, sine ullo tamen nexu cum problematibus quorum sunt determinaciones. Afferit quidem “ Se potuisse eas tribus fere verbis ex suis locis derivasse, “ placuisse tamen ei hunc modum quia ita ab Apollonio usurpatas hasce determinaciones, non obscuris indiciis con- “ jiciebat.” Snellii autem conjectura sine omni fundamento est, nullus enim est geometra qui determinaciones suas non deducit ex locis suis, hoc est ex solutione problematum; et Apollonium hoc semper fecisse ex libris ejus de Sectione Rationis perspicuum est. Determinacionis autem Apollonii quam in enuntiatione Prop. 62, Lib. 7, Pappus tradit, Snellius nullam facit mentionem, sed vice ejus aliam sine demonstratione adducit in epitagmate suo octavo tertiae classis Prob. quarti. Eum autem in Apollonii demonstrationes non incidisse certum est, etenim ne vel uno ex Lemmatibus Apollonianis utitur. Dicit quidem “ quia circulorum rotundationes concinnitatis nescio quid rotunditatisque Pappo habere visae sunt, “ nobis quoque modus iste perplacuit, ac quamvis utroque “ modo proposita problemata explicassemus, hunc solum altero repudiato retinuimus. Quibus verbis intelligere nos volebat Snellius se viam Apollonianam solvendi haec problemata per semicirculos a Pappo laudatam sequutum fuisse; sed in hac re omnino deceptus est; circuli enim a Snellio adhibentur tantum ut construat simplices casus Propp. 28 et 29,

Lib. 6. Elem. Euclidis, quibus scilicet requiritur ad datam rectam lineam applicare rectangulum dato spatio aequale deficiens, aut excedens quadrato. De hisce autem construendis nunquam cogitavit Apollonius, sed tanquam ex elementis notas constructiones has ubique assumpsit; ut manifestum est in multis locis librorum ejus de sectione rationis. Hae autem Snellii constructiones praedictorum casuum elegantes quidem sunt, et eae ipsae quas postea tradidit clariss. Hal-leius in Scholio ad Prop. 18. Lib. 8. Sectionum Conicarum Apollonii, ab ipso restituti, quem verisimile est eas a Snellio prius usurpatas fuisse non cognovisse. Nullo autem modo inserviunt solutioni problematum de Sectione Determinata ultra constructionem praedictorum casuum. Denique omnia quae a Snellio in hoc libro traduntur, adeo affectata brevitate et obscuritate maxime laborant, ut nullius sint usus in problemate quocunque solvendo quod ad Sectionem Determinatam deductum fuerit. Semicirculi autem de quibus loquitur Pappus in Praefatione sua ad Lib. 7. Collectionis Mathematicae, ii sunt quorum ope Apollonius demonstrat lemmata quae servavit Pappus, postquam solis rectis lineis eadem communi methodo ostendisset. Pappum autem sine ratione reprehendit Snellius quod hos de Sectione Determinata libros iis de Sectione Rationis et Spatii non praemisit; problemata enim de Sectione Determinata quintum praesertim et sextum Lib. 1. et ea Lib. 2. illis de Sectione Rationis et Spatii difficiliora sunt.

Post Snellium Alexander Andersonus Abredonensis problemata primi libri Apollonii, unumque secundi suo modo solvit inter problemata quae subnexuit Supplemento Apollonii redi-

vivi Parisiis anno 1612 edito. Constructiones quas tradit Cass. 2. et 3. problematis sui noni bonae sunt, similemque ipsis tertiam tradit Rogerius Ventemiglia in pag. 256. Analyseos Geometricae Hugonis de Omerique, aliasque duas ipse Hugo in pagg. 260, 263, ejusdem libri. Has, ut et similes reliquorum epitagmatum Prob. 5. et 6. Lib. 1. Apollonii dedimus in eorum demonstrationibus secundis.

Cum igitur libri de Sectione Determinata non nisi obscure et imperfecte hactenus habeantur, e re geometriae visum est eos plenius et magis distincte tradere. Multa enim problemata, ad ea quae in hisce libris tractantur, deducuntur. Eos igitur multis abhinc annis restituere aggressus, statim percepi non tam difficile fore problemata haec quodammodo soluta dare, quam eorum epitagmata et determinationes rite distinguere, et exhibere congruenter numero et ordini secundum quem Pappus eadem distribuit; maximae autem difficultatis rem esse in viam Apollonianam incidere, hoc est quae ipsius lemmatibus indigeret, et ad ejusdem determinationes duceret. Et quidem pudet dicere quoties irrita conamine haec invenire aggressus sum, quotiesque re desperata, ab incoepto destitui. Tandem anno scilicet 1727 solutionem problematis 5. et 6. Lib. 1. ope lemmatum Pappi nactus, problemata libri secundi tentabam, sed hic iterum mihi haerebat aqua, novis subortis difficultatibus, quas tamen pertinax vicit labor. Atque hoc modo ex Pappi generali propositione, et lemmatibus ab eo servatis, Apollonii libri multa investigatione foelicitate, ut geometris visurum speramus, in lucem producti sunt, et ita restituti ut ab ipsis Apollonii libris paululum aut nihil differre facile agnoscant ii qui propositiones ipsas et lemmata

quibus indigent, ut et epitagmatum et determinationum numerum et ordinem a Pappo indicatum inter se comparaverint. Hanc autem restitutionem invenire satis difficile fuisse re ipsa experientur, ni fallor, qui eam tentaverint via Apolloniana priusquam problema 5. et 6. Lib. 1. et ea libri 2. quae in sequentibus exhibentur, inspexerint.

Observandum vero est pleraque lemmata in problema 5. et 6. (nam nulla sunt in praecedentia problemata,) tres aut quatuor habere demonstrationes diversas; numeris vero distinguuntur hae demonstrationes in Graecis codicibus, et apud Commandinum, tanquam diversa essent lemmata, ut in numeris margini dextrae in hac editione appositis videri potest. In hac etiam propositiones eodem ordine numerantur quo apud Commandinum in versione sua Latina Pappi Alexandrini; propositio scilicet 22. Lib. 7. Pappi, hic facta est prima, earum scilicet quae ad Sectionem Determinatam spectant, ut revera est, et ita deinceps, nisi ubi aliqua loco suo exciderat, ut Prop. 28. et Prop. 63. quae locis propriis repositae sunt. Propositiones etiam 37, 38, 39, 40, quae, in Graecis codicibus et apud Commandinum, inter lemmata in librum 1. numerantur, revera sunt lemmata in Lib. 2. Saltem multis et variis investigationibus institutis, minime invenire potui eas alicui epitagmati Prob. 5. vel 6. utiles esse. Determinationes vero in libro secundo hisce propositionibus egent; problemata enim quarum sunt determinationes duplici via solvi possunt, quarum alterutram si iniveris, propositiones praedictae omnino necessariae sunt ad deducendam ex determinatione, ad quam hac via perventum est, alteram ad quam secunda via directe duxisset. Nam ex una tantum harum de-

terminationum Apollonius ultimam suam deducit. Veteres enim duabus determinationibus utebantur quarum altera ex altera sequitur, et quarum prima constructioni problematis necessaria est, quae propterea compositioni semper praemittitur; altera vero, quae compositionem sequitur, infervit ex iis quae data sunt in problemate statim dignoscere utrum construi possit vel non possit; quod quidem ex prima determinatione, vel duabus primis, si duae sint, ut in problematibus Lib. 2. quae determinationes habent, cognosci non potest, priusquam ad illam ultimam deducta fuerit prima aut alterutra ex primis si duae fuerint. In problematibus simplicioribus haec prima scilicet et ultima in unicam determinationem saepius coalescunt. Haec autem tum in Apollonii libris de Sectione Rationis, tum in hisce facile est observare, et exemplo in Epitagmate 3. Prob. 3. Lib. 2. explicabuntur.

Quae autem de Sectione Determinata servavit Pappus, in Graeco codice quo utebatur Commandinus, multum mutilata et depravata habentur, ut et omnia reliqua Pappi in omnibus ut videtur codicibus, quos certissimum est a librariis Geometriae prorsus ignaris descriptos fuisse. Multum igitur debet Geometria viro optimo Federico Commandino qui, cum literas Graecas et Geometriam simul pulchre calleret, magno iudicio, maximaque diligentia, inter alia multa, lemmata haec Pappi a multis purgavit erroribus, et propterea magnos levavit onere. Non autem omnia, praesertim Prop. 62. Lib. 7. redintegrare potuit; haec enim, in notis alphabeticis quae schema spectant, adeo est corrupta, ut demonstrationem minime restituere valeret; nam notae prolixae quas ei subjunxit eam nullo modo attingunt.

Denique cum libri de Sectione Determinata non infimum locum teneant inter eos quos ad analyfin promovendam scripserunt veteres Geometrae, nullus problematum alicujus momenti casus omissus est, nullaque determinatio, sine quibus hujus generis libri vix ullius sunt pretii. Exinde autem demonstrationes longiores evaserunt; et Pappus quidem memorat tales fuisse ipsius Apollonii, propter scilicet determinationes intricatas et difficiles, quas quidem ita esse ex ipsis libris satis superque patebit. Eos autem hoc modo restitutos Geometriae Veterum cupidis neque injucundos neque inutiles futuros quam maxime optamus.

In Transactionibus Philosophicis, anni — No — pag. — Video usum lemmatum Pappi in solutione problematum Sectionis Determinatae innotuisse viro doctissimo Henrico Pemberton, M. D. quod ostendit exemplo uno ex libro primo et altero ex libro secundo Sectionis Determinatae; in hoc autem ultimo non tradit Apollonii determinationem, verum aliam, ex qua quidem non immediate cognoscitur num problema fieri aut non fieri potest.

EX PAPPI ALEXANDRINI PRAEFATIONE AD
SEPTIMUM COLLECTIONIS MATHEMATICAE
LIBRUM.

DE SECTIONE DETERMINATA, LIBRI II.

HIS subjiciuntur libri duo de Sectione Determinata, quas etiam ad modum praecedentium unam propositionem dicere liceat, sed disjunctam: “ quae hujusmodi est ” datam rectam infinitam in uno puncto secare, ita, ut e rectis interceptis inter illud et puncta in illa data, vel quadratum ex una, vel rectangulum a duabus interceptis, datam habeat rationem, “ vel ad quadratum ex reliqua intercepta,^a ” vel ad contentum reliquâ interceptâ et datâ quâdam, vel etiam ad contentum duabus reliquis interceptis; idque ad quam partem velis punctorum datorum. Hujus autem quasi bis disjunctae, et intricatos diorismos habentis, per plura necessario facta est demonstratio. Hanc autem dedit Apollonius communi methodo tentamen faciens, ac solis rectis lineis usus, ad exemplum secundi libri Elementorum primorum Euclidis; ac rursus idem demonstravit ingeniose quidem, et magis ad institutionem accomodate per semicirculos. Habet autem pri-

^a Hunc casum textui Graeco addidimus, nam sine eo essent tantum quinque problemata in libro primo; si autem dicatur problema secundum posse in duo parti prout punctum inveniendum requiritur esse inter vel extra duo puncta data, ut in sequentibus hujus libri I. fit, essent hoc modo tantum quindecim epitagmata in libro primo, Pappus autem numerat sexdecim. Et praeterea non verisimile est Apollonium problema hoc primum omisisse.

mus liber problemata sex, epitagmata, “ five dispositiones
 “ punctorum,” sedecim, diorismos quinque; quorum qua-
 tuor quidem maximi sunt, minimus unus. Sunt autem ma-
 ximi, ad secundum epitagma secundi problematis, ad terti-
 um quinti et ad tertium sexti. Minimus vero est ad tertium
 epitagma tertii problematis. Secundus liber de Sectione De-
 terminata tria habet problemata, epitagmata novem, diorif-
 mos tres; e quibus minimi sunt ad tertium primi, ut et ad
 tertium secundi; maximus autem ad tertium tertii proble-
 matis. Lemmata habet liber primus XXVII, secundus vero
 XXIV. Infunt autem in utroque libro de Sectione Determi-
 nata Theoremata octoginta tria.

D E

S E C T I O N E

D E T E R M I N A T A

L I B E R P R I M U S.

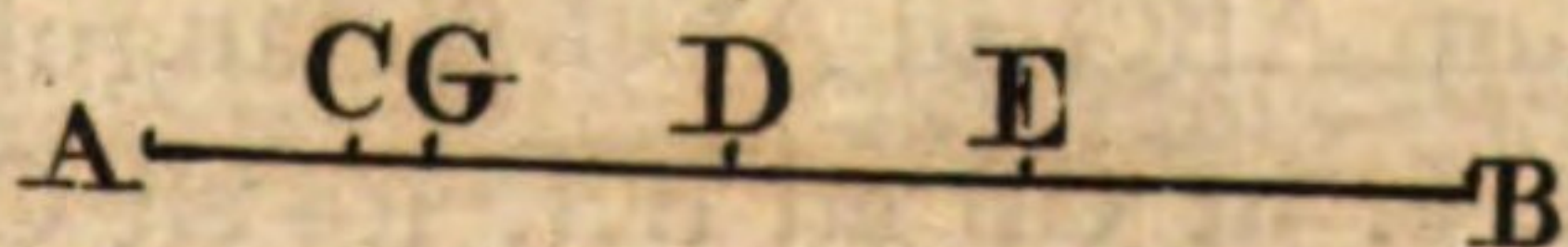
P R O P O S I T I O I. C O M M A N D I N I 22.

L E M M A I.

Lemma utile in primum Epitagma quinti Problematis.

“ **S**IT recta linea AB, et in ipsa fumantur tria puncta C,
 “ D, E fitque ADC rectangulum rectangulo BDE aequale.
 “ Erit ut BD ad DE, ita rectangulum ABC ad rectangulum
 “ AEC.”

Quoniam enim rectangulum ADC aequale est BDE rect-
 angulo, erit ut AD ad DB, ita ED ad DC. Tota igitur AE
 ad totam BC, est ut ED ad
 DC; et, invertendo, “ BC
 “ ad AE, ut CD ad DE.”



Rurfus quoniam rectangulum ADC rectangulo BDE est ae-
 quale, ut AD ad DE, ita erit BD ad DC. [Ergo tota AB
 ad totam CE, est ut BD ad DC.]^a Erat autem ut BC ad AE,
 ita CD ad DE. Quare ratio composita ex ratione AB ad CE,
 et ex ratione BC ad AE est eadem quae componitur ex ratio-

^a Quae inter uncus habentur recte supplevit Commandinus.

ne BD ad DC , et CD ad DE [Prop. G. 5. Elem. Eucl.] Sed ratio quidem composita ex ratione AB ad CE , et ex ratione BC ad AE est ratio rectanguli ABC ad AEC rectangulum [23. 6.]; ratio vero composita ex ratione BD ad DC , et ex ratione DC ad DE est ea quam habet BD ad DE [Def. rationis compositae]. Ut igitur BD ad DE , ita ABC rectangulum ad rectangulum AEC .

Conversa hujus propositionis quâ saepius in Sectione Determinata utendum est, haec est quae sequitur,

“ SI in recta linea sint quatuor puncta A, C, E, B , et sumatur quintum D quod facit rationem BD ad DE , eandem rationi rectanguli ABC ad ipsum AEC ; erit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE .”

Nam si non fuerit, fit rectangulum ADG aequale rectangulo BDE ; igitur per Prop. 1. erit BD ad DE , ut rectangulum ABG ad ipsum AEG . Ut

$$A \quad \overset{C}{\quad} \quad \overset{D}{\quad} \quad \overset{E}{\quad} \quad B$$

igitur rectangulum ABC ad ipsum AEC , ita est rectangulum ABG ad AEG rectangulum. Quare, permutando et per 1. 6. ut CB ad BG , ita est CE ad EG ; et, dividendo, ut CG ad GB , ita est CG ad GE . Aequalis igitur est GB ipsi GE ; quod fieri non potest. Ergo rectangulum ADC aequale est ipsi BDE .

PROP. I. ALITER. LEM. 2.

QUONIAM rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE , ob proportionem, “ scilicet AD ad DB , ut ED ad DC ,” et tota

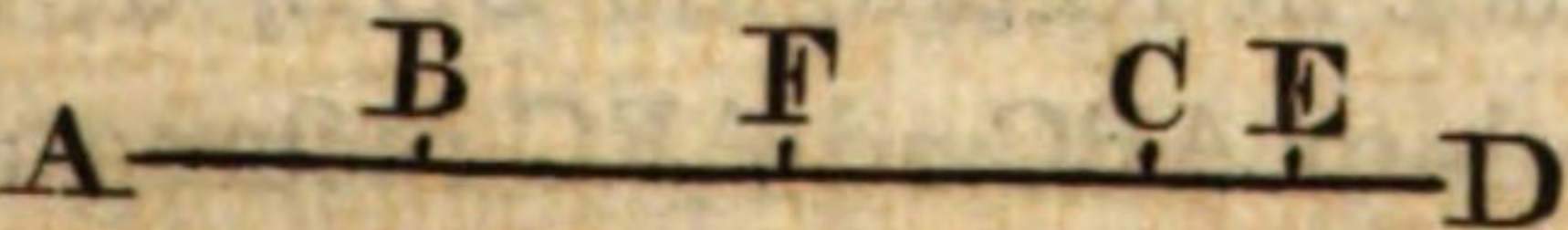
ad totam, erit ut AE ad BC, ita AD ad DB; componendoque, ut utraque AE, BC ad BC, ita AB ad BD. Quod igitur continetur utrisque AE, CB, et BD aequale est rectangulo ABC. Rursus quoniam est ut AD ad DB, ita ED ad DC; et tota AE ad totam BC, erit ut ED ad DC. Quare invertendo, componendoque, ut utraque AE, CB ad AE, ita CE ad ED; igitur id quod continetur utrisque AE, CB, et ED est aequale rectangulo AEC. Ostenfum autem est, quod continetur utrisque AE, CB, et BD aequale esse rectangulo ABC. Permutando igitur, ut rectangulum ab utrisque AE, CB, et [^aBD, ad contentum utrisque AE, CB et DE, hoc est ut BD ad] DE, ita erit rectangulum ABC ad AEC rectangulum.

Aliter, in Epitagma 1. Prob. 5. praemonstratis tamen duobus quae sequuntur.

PROP. II. COMM. 23. LEM. 3.

“SIT recta linea AB aequalis CD, et in ipsa CD fumatur
“quodvis punctum E. erit rectangulum ACD aequale et rect-
“angulo AED, et rectangulo BEC.”

Secetur BC bifariam in F; ergo rectangulum ACD una cum quadrato ex FC aequale

est quadrato ex FD [5. 2.] 

eadem ratione rectangu-

lum AED una cum quadrato ex FE aequale est quadrato ex FD. Quare rectangulum ACD una cum quadrato ex FC, aequale est rectangulo AED una cum quadrato ex FE, hoc est

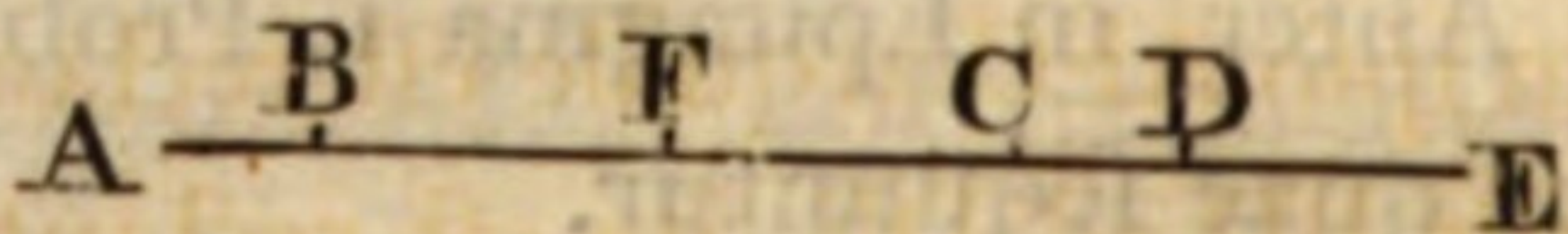
^a Haec inter uncas recte restituit Commandinus.

una cum rectangulo BEC, et quadrato ex FC [6. 2.] commune auferatur quadratum ex FC; reliquum igitur rectangulum ACD aequale est rectangulo AED et rectangulo BEC.

PROP. III. COMM. 24. LEM. 4.

“ IISDEM positis sit punctum E extra rectam AD. Erit
 “ rursus rectangulum BEC rectangulo AED^a et rectangulo
 “ BDC aequale.”

Secetur rursus BC bifariam in puncto F; erit rectangulum BEC una cum quadrato ex FC aequale quadrato ex FE [6. 2.] Ergo rectangulum BEC una cum quadrato ex FC aequale est rectangulo



AED^a una cum quadrato ex FD [6. 2.], hoc est una cum rectangulo BDC^b et quadrato ex FC [6. 2.]. Commune auferatur quadratum ex FC; reliquum igitur rectangulum BEC aequale erit rectangulo AED^a et rectangulo BDC.

PROP. IV. COMM. 25. LEM. 5.

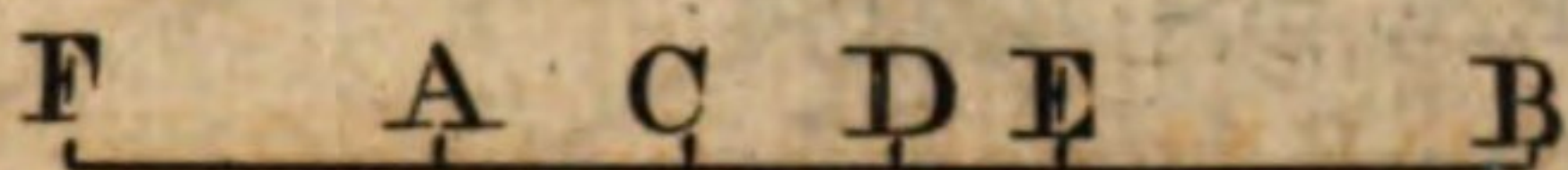
“ HIS praemonstratis, ostendendum est si rectangulum ADC
 “ aequale sit rectangulo BDE, ut BD ad DE^c, ita esse rectangulum ABC ad AEC rectangulum.”

^a In codice regio Parisiensi No. 2368. aequae ac in Commandini habetur $\alpha\delta\epsilon$, pro quo recte posuit Commandinus $\alpha\epsilon\delta$.

^b Pro $\gamma\delta$ in Graeco codice recte posuit Commandinus $\delta\gamma$.

^c Pro $\beta\gamma$ in Graeco codice recte posuit Commandinus $\beta\epsilon$. In textu vero et schemate hujus propositionis loco B posuimus D, et vice versa, ut similia essent praecedentibus.

Ponatur ipsi CE aequalis FA, quoniam igitur rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE, commune apponatur rectangulum FDE; ergo totum rectangulum FB, DE^d aequale est rectangulo FDE et rectangulo ADC. Haec autem ex antecedente* aequalia sunt rectangulo FCE, hoc est rectangulo AEC; rectangulum igitur FB, DE aequale est ipsi AEC. Aliud autem rectangulum est FBE, ergo ut rectangulum FBE ad ipsum FB, DE, hoc est ut BE ad ED, [ita rectangulum FBE ad ipsum AEC. Et componendo, ut BD ad DE, ita rectangulum FBE una cum ipso AEC ad rectangulum AEC.]^e Sed rectangulum FBE una cum ipso AEC aequale est rectangulo ABC ex antecedente. Ut igitur BD ad DE, ita est rectangulum ABC ad ipsum AEC.



PROP. V. COMM. 26. LEM. 6.

“SI fit triangulum ABC, et duae rectae lineae ducantur, ut
 “AD, AE, ita ut anguli BAC, DAE duobus rectis sint aequales; erit ut rectangulum BCD ad rectangulum BED,
 “ita quadratum ex CA ad quadratum ex AE.”

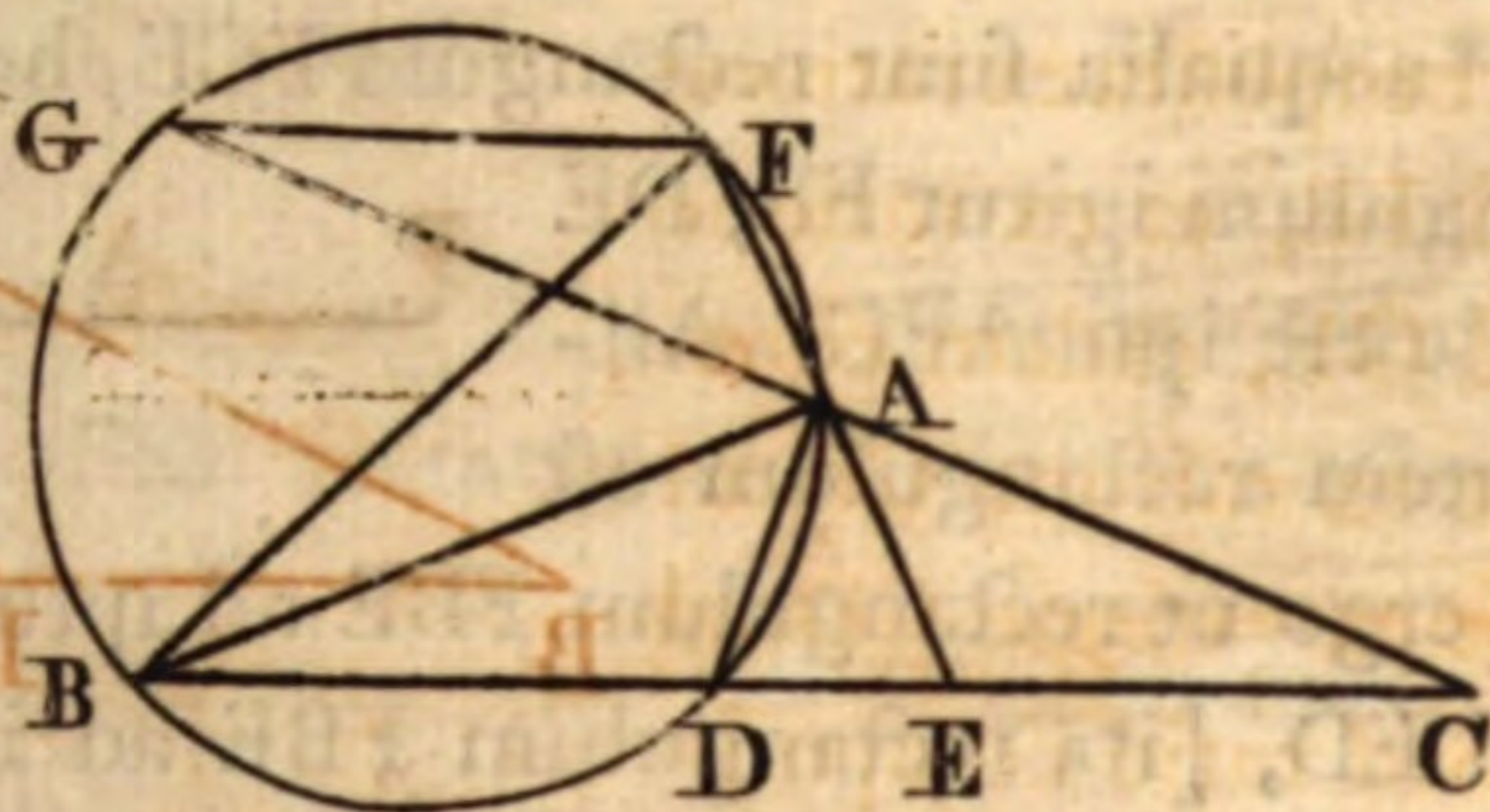
Si enim circa triangulum ABD circulus describatur, et rectae CA, EA, producantur ad puncta G, F, transferetur rectangulum quidem BCD ad rectangulum GCA, rectangulum

^d Recte posuit Commandinus FB, DE pro DFB in Graeco codice.

* Sc. ex Prop. 2.

^e Haec inter uncus recte restituit Commandinus vice eorum quae vitiosa et imperfecta sunt in codice Graeco.

vero BED ad ipsum FEA; et oportebit, permutando, quac-
 rere si est ut rectangulum GCA ad quadratum ex CA, ita
 rectangulum FEA ad quadratum ex EA. Hoc autem idem est
 ac quaerere si ut GC
 ad CA, ita sit FE
 ad EA. Si igitur
 GF parallela est ipsi
 BC, erit ut GC ad
 CA, ita FE ad EA.
 Parallela est autem;
 quoniam enim an-
 guli BAC, DAE duobus rectis sunt aequales, erit DAE an-
 gulus aequalis ipsi BAG. Sed angulus quidem DAE extra
 quadrilaterum “BFAD in circulo” aequalis est angulo FBD,
 angulus vero BAG aequalis est angulo BFG. Angulus igitur
 FBD angulo BFG aequalis erit; et sunt alterni; ergo GF pa-
 rallela est ipsi BC. Hoc autem est quod quaerebatur.



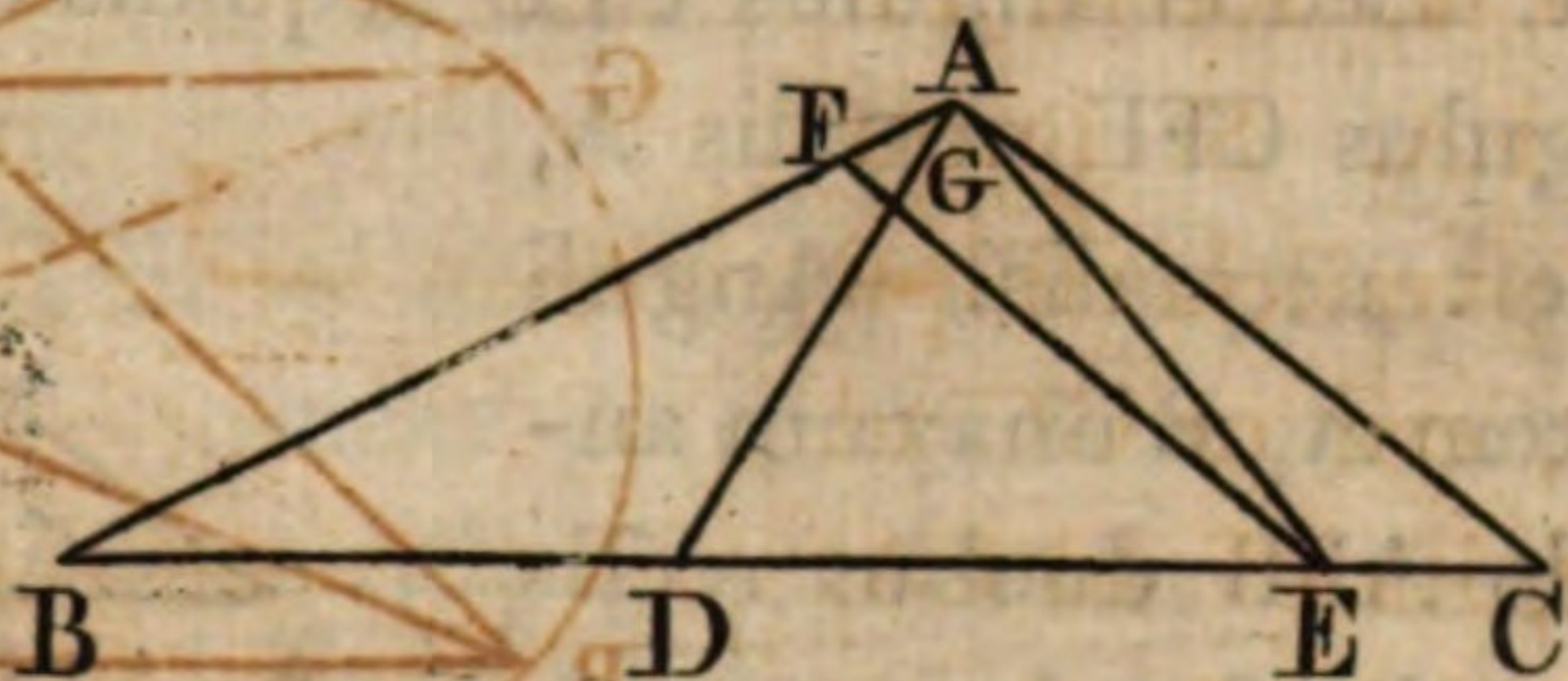
PROP. VI. COMM. 27. LEM. 7.

“Praecedens” Aliter.

“SINT in triangulo ABC anguli BAC, DAE duobus rectis
 “aequales; erit ut rectangulum BCD ad rectangulum BED,^a
 “ita quadratum ex CA ad quadratum ex AE.”

^a Locus hic videtur vitiatus esse in codice Graeco quo utebatur Commandi-
 nus, qui eum non recte restituit scribendo “ut rectangulum CBE ad rec-
 tangulum CDE;” certissimum enim est, tum ex prior Propositione, tum ex
 ipsa Demonstratione locum legendum esse ut in textu nostro; et nuper inveni
 ita scriptum esse in MSto regio.

Ducatur per E ipsi AC parallela EGF; aequalis igitur est angulus DAE angulo AFE,^b et propterea rectangulum FEG quadrato ex AE est aequale.^c Itaque quoniam ut CA ad FE, ita est CB ad BE; ut autem CA ad GE, ita CD ad DE, erit ratio composita ex ratione CA ad FE, et ex ratione CA ad GE, eadem compositae ex ratione CB ad BE, et ex ratione CD ad DE. Sed ratio composita ex ratione CA ad FE, et ex ratione CA ad GE est ratio quadrati ex CA ad rectangulum FEG, hoc est ad quadratum ex AE. Composita vero ex ratione CB ad BE, et ex ratione CD ad DE, eadem est rationi rectanguli BCD ad rectangulum BED. Est igitur ut rectangulum BCD ad ipsum BED, ita quadratum ex CA ad quadratum ex AE.



PROP. VII. COMM. 29. LEM. 8.

“QUOD cum ita sit, antedictum Lemma aliter demonstra-
 “bimus, viz. “Si fuerit rectangulum ADC aequale rectan-
 “gulo BDE, erit” ut BD ad DE, ita rectangulum ABC ad
 “rectangulum AEC.”

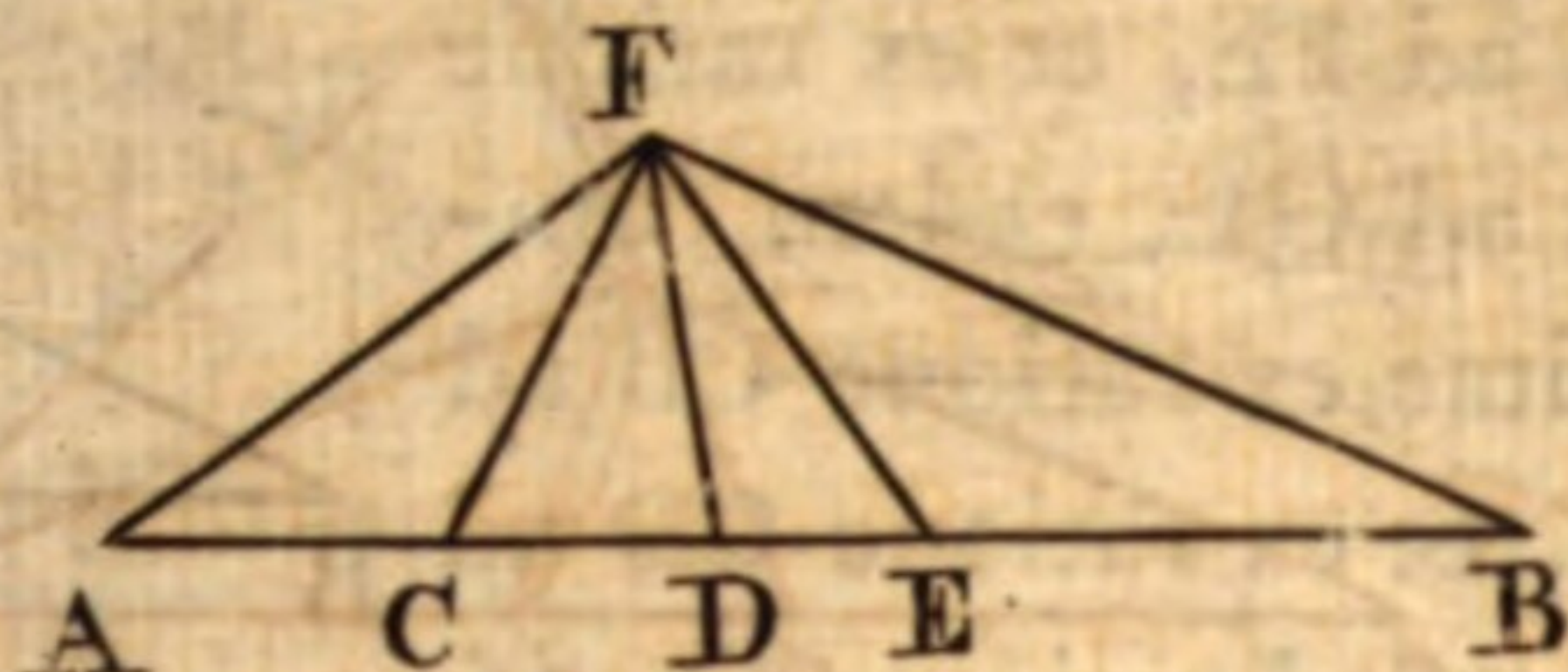
Ducatur a puncto D quaevis recta linea DF, et rectan-
 gulo ADC aequale ponatur quadratum ex DF; junganturque

^b Uterque enim cum ipso BAC aequalis est duobus rectis. COM.

^c Quoniam aequiangula sunt FAE, GAE triangula. COM.

AF, CF, EF, BF. Quoniam igitur rectangulum ADC aequale est quadrato ex DF, erit [16, et 6. 6.] angulus CFD angulo A aequalis. Rursus quoniam rectangulum "ADC, hoc est" BDE aequale est quadrato ex DF, angulus DFE angulo B aequalis erit. Sed et angulus CFD aequalis est angulo A; totus igitur

angulus CFE angulis A, B est aequalis. Anguli autem A, B una cum angulo AFB duobus rectis aequales sunt; ergo et anguli AFB, CFE sunt ae-



quales duobus rectis. Est igitur, ob Lemma praecedens, ut quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ita rectangulum ABC ad rectangulum AEC. Sed ut quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ita est BD ad DE, [est enim rectangulum BDE aequale quadrato ex DF].^a Ut igitur BD ad DE, ita est rectangulum ABC ad rectangulum AEC.

PROP. VIII. COMM. 30. LEM. 9.

Lemma utile ad Epitagma secundum ejusdem "quinti" Problematis, "Lib. I."

"RURSUS si aequale fuerit rectangulum ADE rectangulo
"BDC, ostendendum est ut BD ad DC, ita esse ABE rectan-
"gulum ad rectangulum ECA."

^a Unde proportionales sunt BD, DF, DE, quare [Cor. 2. 20. 6.] est BD ad DE, ut quadratum ex BD ad quadratum ex DE. Quoniam vero aequiangula sunt BDF, FDE triangula, est quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ut (quadratum ex BD ad quadratum ex DE, hoc est ut) BD ad DE. Comman-

Quoniam enim est ut BD ad DE, ita AD ad DC, erit BD ad DE, ut tota AB ad totam CE [12. 5.] Rursus quoniam ut BD ad DA, ita ED ad DC, erit reliqua EB ad reliquam AC, ut ED ad DC [19. 5.] Erat

autem et ut BD ad DE, ita $\frac{A \quad C \quad D \quad E \quad B}{\quad}$

AB ad CE; ergo ratio composita ex ratione BD ad DE, et ex ratione ED ad DC, quae quidem est ratio BD ad DC, eadem est compositae ex ratione AB ad CE, et ex ratione BE ad AC, quae est ratio rectanguli ABE ad rectangulum ECA [23. 6.] Ut igitur BD ad DC, ita erit rectangulum ABE ad ECA rectangulum. Q. E. D.

COR. Eodemque prorsus modo ostendetur esse AD ad DE, ut rectangulum BAC ad CEB rectangulum.

“PROP. VIII.” ALITER. LEM. 10.

Quoniam est ut AD ad DB, ita CD ad DE, erit reliqua AC ad reliquam EB, ut AD ad DB; et componendo, ut utraque AC, EB ad EB, ita AB ad BD. Rectangulum igitur quod continetur utrisque AC, EB et ipsâ BD aequale est rectangulo ABE. Rursus quoniam ut BD ad DA, ita est ED ad DC, erit reliqua EB ad reliquam AC, ut ED ad DC; et componendo, ut utraque EB, AC ad AC, ita EC ad CD. Ergo rectangulum quod utrisque EB, AC et ipsâ CD continetur, rectangulo ECA est aequale. Ostensum autem est rectangulum contentum utrisque AC, EB et ipsâ BD aequale esse rectangulo ABE. Ut igitur rectangulum contentum utrisque AC, EB et BD ad contentum utrisque AC, EB et CD, hoc est ut BD ad DC, ita est rectangulum ABE ad ipsum ECA. Q. E. D.

dius quae inter uncas sunt delevit, quia codex Graecus habet *ισὸν ἀπὸ ἐστὶ*, sed si ponatur γὰρ pro ἀπὸ, necessaria omnino sunt.

PROP. IX. COMM. 31. LEM. 11.

Idem aliter. Praemonstrato autem hoc,^a “viz.”

“SI fit AB aequalis CD, et fumatur punctum aliquod E “in-
“ter B et C.” ostendendum est rectangulum AED rectangulo
“ACD et rectangulo BEC aequale esse.”

Secetur BC bifariam in puncto F. erit rectangulum AED una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex FD; rectangulum autem ACD una cum quadrato ex FC aequale est ei quod fit ex FD quadrato. Ergo rectangulum AED una cum quadrato ex EF aequale est rectangulo ACD una cum quadrato ex FC, hoc est una cum rectangulo BEC et quadrato ex EF. Commune auferatur quadratum ex EF; reliquum igitur rectangulum AED rectangulo ACD et rectangulo BEC aequale erit.

A B E F C D

PROP. X. COMM. 32. LEM. 12.

“HOC demonstrato, fit rectangulum ADE aequale rectangulo BDC; erit ut BD ad DC, ita rectangulum ABE ad rectangulum ACE.”

Ponatur ipsi EB aequalis AF; erit ob antecedentem rectangulum FDB aequale rectangulo FEB et rectangulo ADE. Quoniam autem rectangulum ADE rectangulo BDC est ae-

^a Ita habet codex regius. Deleantur verba “hoc autem ostenso” in versione Commandini.

quale, auferatur utrumque eorum a rectangulo FDB, reliquum igitur rectangulum FEB, hoc est ABE aequale erit rectangulo FC, DB. Rurfus quoniam rectangulum ADE aequale est rectangulo BDC, erit

$$\frac{F A C}{D E B}$$

ob proportionem “ scili-

“ cet AD ad DC, ut BD

“ ad DE” et dividendo AC ad CD, ut BE ad ED, hoc est FA ad DE. Tota igitur FC ad totam CE, est ut AC ad CD, et propterea rectangulum FCD aequale est rectangulo ACE. O-stensum autem est rectangulum FC, DB aequale rectangulo ABE; quare permutando, ut rectangulum FC, DB ad ipsum FCD, hoc est ut BD ad DC, ita est rectangulum ABE ad ipsum ACE.

PROP. XI. COMM. 33. LEM. 13.

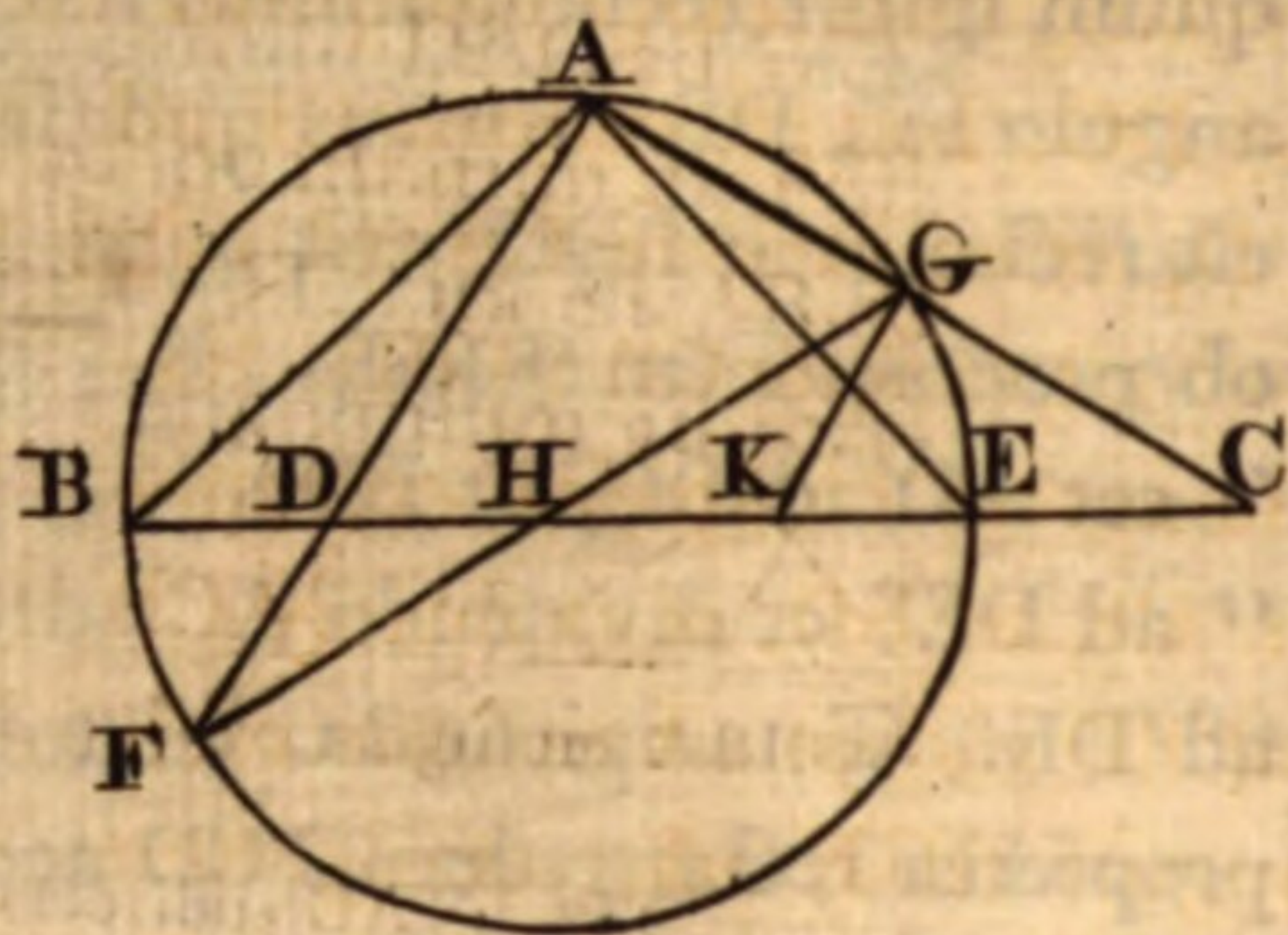
Idem aliter demonstrabitur, praemonstrato autem hoc, viz.

“ SIT triangulum ABC, et intra ducantur rectae lineae AD,
“ AE, quae utrumque angulorum BAE, CAD rectum effici-
“ ant; erit ut rectangulum BCE ad rectangulum BDE, ita
“ quadratum ex CA ad quadratum ex AD^a.”

Describatur circa ABE triangulum circulus ABFG, “ quae
“ rectis AD, AC occurrat in F, G” et FG jungatur. Quoni-
am igitur rectus est uterque angulorum BAE, CAD, erit u-
traque BE, FG circuli diameter; quare centrum ejus est
punctum H. Et cum FH aequalis sit ipsi HG, erit ut AC ad

^a Notas alphabeticas tum in textu tum in schemate Commandini mutavimus ut similes essent iis in Propp. 8. 10. 13.

CG, ita AD ad DF;^a et invertendo. Sed ut GC ad CA, ita est rectangulum ACG ad quadratum ex CA, hoc est [Cor. 36. 3.]^b rectangulum BCE ad quadratum ex CA. Et ut FD ad DA, ita rectangulum FDA, hoc est rectangulum BDE ad quadratum ex DA. Permutando igitur, ut BCE rectangulum ad rectangulum BDE, ita quadratum ex CA ad quadratum ex AD.



PROP. XII. COMM. 28. LEM. 14.

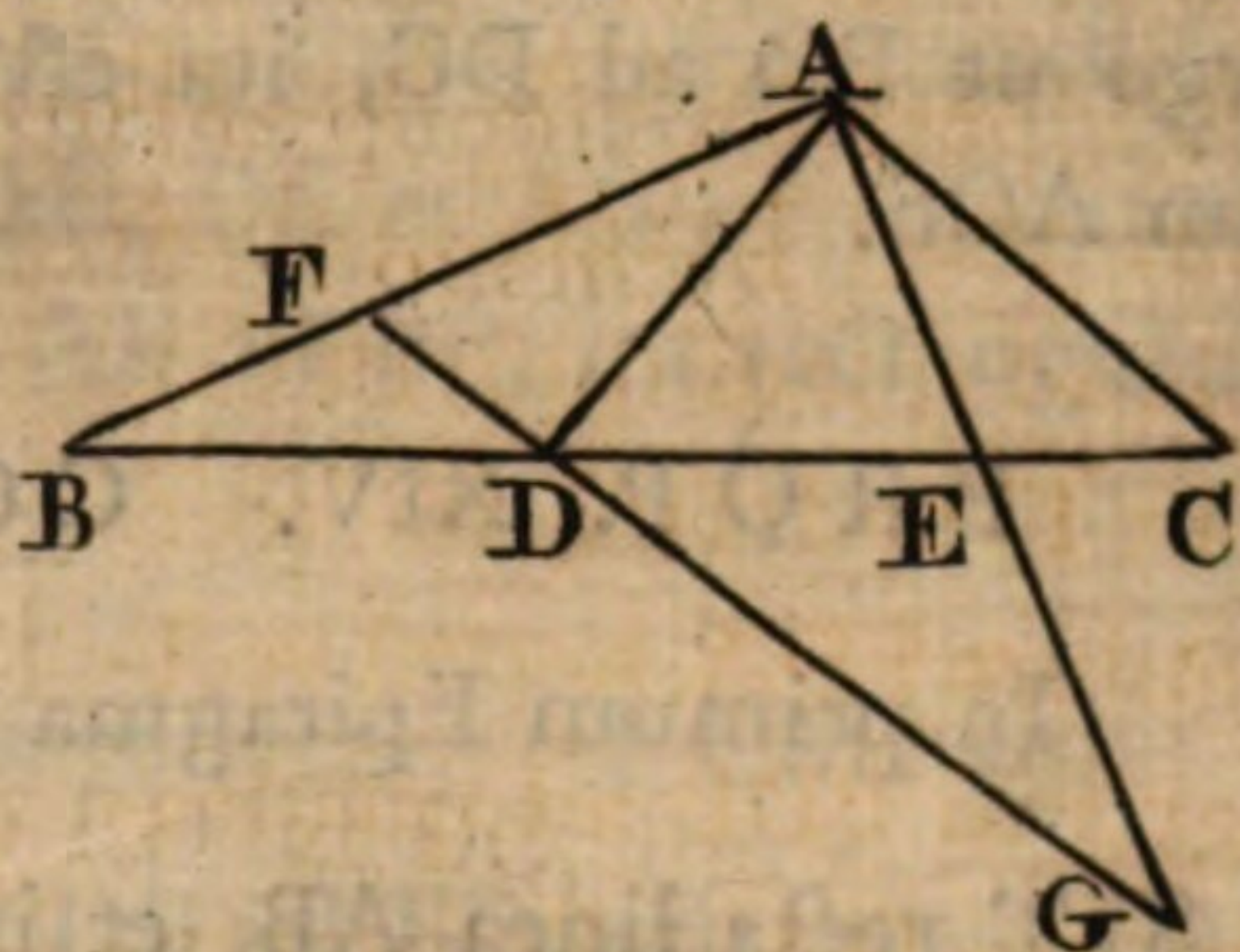
“ Praecedens aliter. Propositio autem haec quae in manu-
 “ scriptis Graecis, et Commandini versione, proprio loco
 “ excidit, hic ponenda est.”

“ SIT rursus uterque angulorum BAE, CAD rectus; erit ut
 “ rectangulum BCE ad rectangulum BDE, ita quadratum ex
 “ CA ad quadratum ex AD.”

Ducatur per D ipsi AC parallela FG, et conveniat cum AE in G; rectus igitur est angulus ADF. Sed et rectus est FAG; ergo rectangulum FDG quadrato ex DA est aequale [8, 17. 6.], et ut quadratum ex CA ad quadratum ex AD, ita quadratum

^a Hoc patebit ductâ GK parallelâ ipsi AD; erit enim GK aequalis ipsi DF, quoniam aequiangula sunt triangula HKG, HDF. Est igitur AC ad CG, ut AD ad GK five DF. Com.

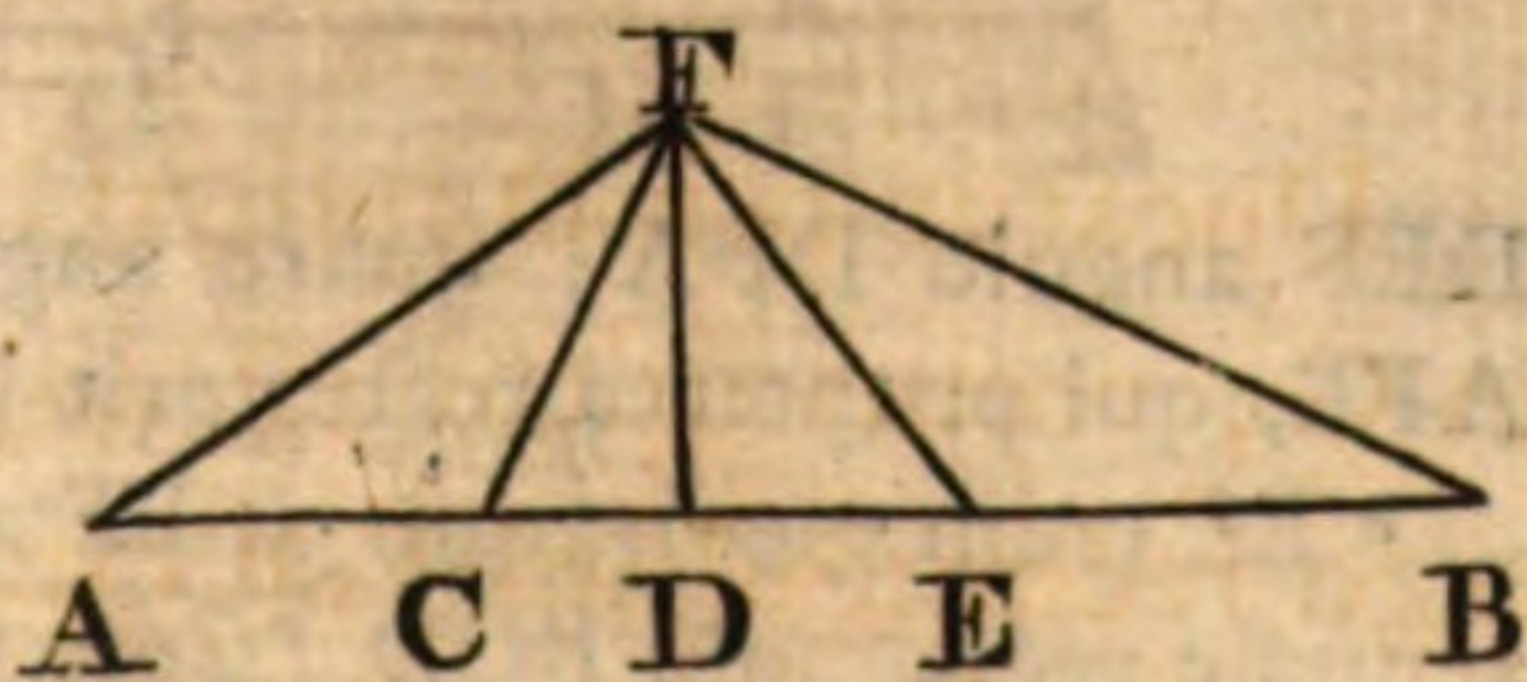
ex CA ad FDG rectangulum. Sed ratio quadrati ex CA ad rectangulum FDG composita est ex ratione quam habet CA ad DG, hoc est ratione CE ad ED, et ex ratione CA ad FD, hoc est ratione CB ad BD. Ratio autem composita ex ratione CE ad ED, et ex ratione CB ad BD eadem est ratione rectanguli BCE ad rectangulum BDE [23. 6.]. Ut igitur rectangulum BCE ad rectangulum BDE, ita est quadratum ex CA ad quadratum ex AD.



PROP. XIII. COMM. 34. LEM. 15.

“QUOD cum ita sit, praecedens “scilicet in Prop. 8. et 10.”
 “aliter demonstrabitur, viz. “Si rectangulum ADE aequale
 “fuerit ipsi BDC,” ut BD ad DC, ita erit rectangulum ABE
 “ad ipsum ACE.”

Erigatur a puncto D ipsi AB ad rectos angulos DF, et alterutri rectangulorum ADE, BDC aequale ponatur quadratum ex DF, et AF, FC, FE, FB jungantur. Erit igitur uterque angulorum AFE, CFB rectus^a. Quare, ex antecedente, erit ut rectangulum ABE ad rectangulum



^a Quoniam enim est AD ad DF, ut DF ad DE aequiangula erunt triangu-
 ADF, FDE [6. 6.]; angulus igitur DAF aequalis est ipsi DFE, et angulus

ACE, ita quadratum ex BF ad quadratum ex FC. Ut autem quadratum ex BF ad quadratum ex FC, ita est BD ad DC^b. Ergo ut BD ad DC, ita est ABE rectangulum ad rectangulum ACE.

PROP. XIV. COMM. 35. LEM. 16.

In primum Epitagma sexti Problematis "Lib. 1."

"SIT recta linea AB, et in ipsa tria puncta C, D, E; sitque
"rectangulum ABE aequale rectangulo CBD. Erit ut AB ad
"BE, ita DAC rectangulum ad rectangulum CED."

Quoniam enim rectangulum ABE aequale est rectangulo CBD, erit ob proportionem, et reliquum ad reliquum; et convertendo, ut AD ad excessum ipsarum AC, DE, ita AB ad AC.^a Ergo rectangulum quod continetur excessu ipsarum AC, DE et AB est aequale rectangulo DAC. Rursus quoniam ut AC ad DE, ita CB ad BE^b, erit, dividendo, ut excessus AC, DE ad DE, ita CE ad EB. Quod igitur continetur excessu

A C D E B

DEF angulo DFA; quare anguli DAF, DEF simul aequales sunt angulo AFE, qui propterea rectus erit [Cor. 31. 3.]

^b Est enim quadratum ex BF aequale rectangulo CBD, et quadratum ex FC aequale rectangulo BCD [Cor. 8. 6. et 17. 6.]

^a Est enim AB ad BC, ut DB ad BE; quare reliqua AD est ad reliquam CE, ut AB ad BC; et convertendo, ut AD ad excessum ipsarum AD, CE, hoc est ad excessum ipsarum AC, DE, ut AB ad AC.

^b Est enim rectangulum ABE aequale ipsi CBD, ut igitur AB ad BD, ita CB ad BE, quare reliqua AC ad reliquam DE, ut CB ad BE. Com.

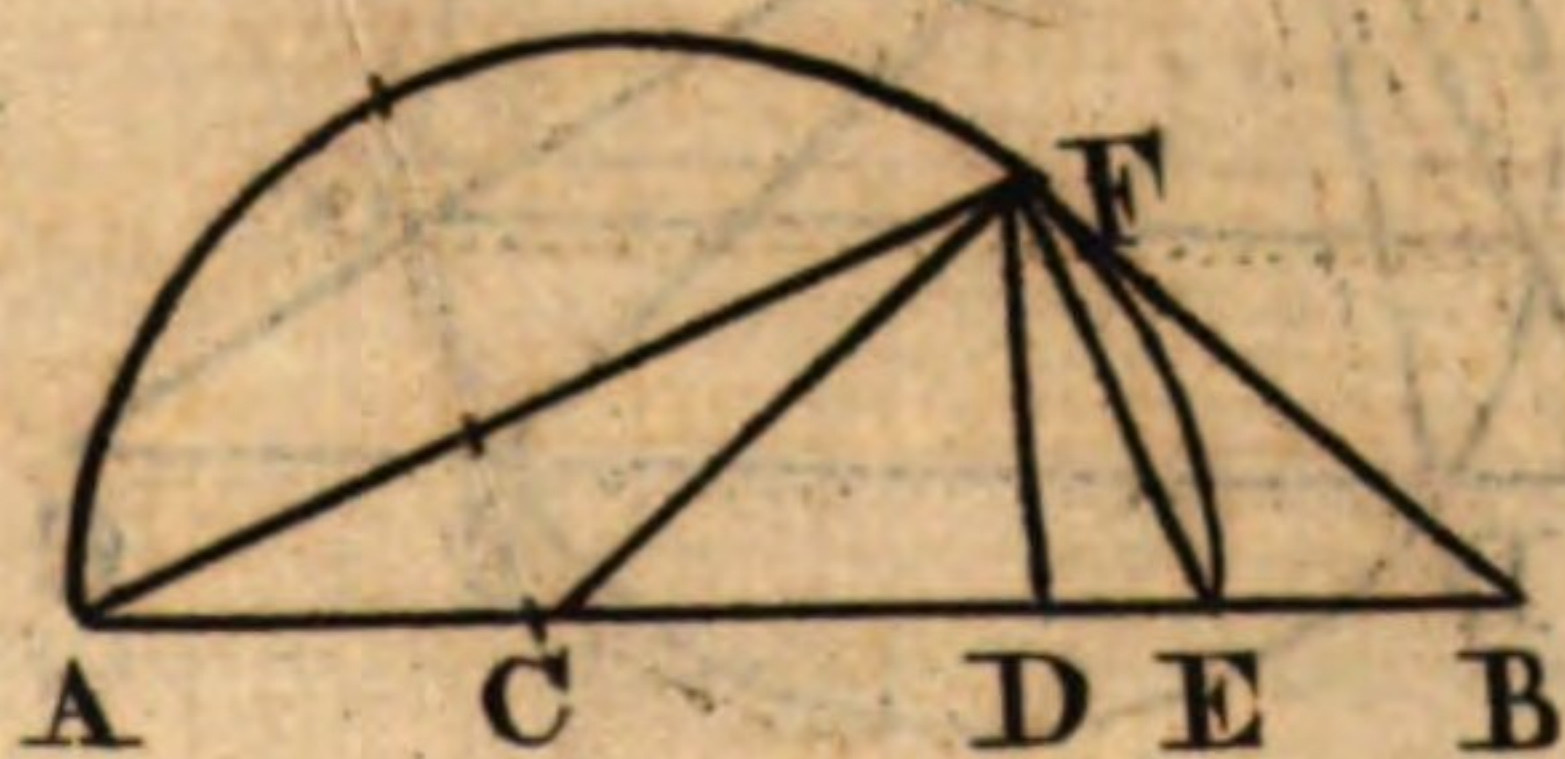
ipsarum AC, DE et EB aequale est rectangulo CED. Ostensum autem est rectangulum contentum excessu ipsarum AC, DE et AB aequale rectangulo DAC. Ergo, permutando, ut rectangulum contentum excessu AC, DE et AB ad contentum excessu AC, DE et EB, hoc est ut AB ad BE, ita rectangulum DAC ad ipsum CED.

ALITER per rationem compositam. LEM. 17.

Quoniam est ut AB ad BC, ita DB ad BE, erit reliqua AD ad reliquam CE, ut AB ad BC. Rursus quoniam ut AB ad BD, ita CB ad BE, reliqua AC ad DE reliquam est ut CB ad BE. Quare ratio composita ex ratione AB ad BC, et ratione BC ad BE, quae quidem est ratio AB ad BE, eadem est rationi compositae ex ratione AD ad CE, et ratione AC ad DE, quae [23. 6.] est ratio rectanguli DAC ad rectangulum CED.

ALITER. LEM. 18.

Describatur in recta linea AE semicirculus AFE, et ducatur contingens BF, junganturque AF, CF, DF, EF. Quoniam igitur BF quidem circulum contingit, secatur autem BA, rectangulum ABE aequale est quadrato ex BF. Sed rectangulum ABE rectangulo CBD aequale ponitur. Ergo rectangulum CBD quadrato ex BF aequale erit; et ideo BFD angulus aequalis est angulo BCF^a, quorum



^a Quoniam enim est CB ad BF, ut BF ad BD, aequiangla erunt [6. 6.] triangula CBF, FBD. Com.

angulus BFE est aequalis ipsi FAC^b ; reliquus igitur DFE reliquo AFC est aequalis^c. Ergo ut rectangulum DAC ad rectangulum CED , ita quadratum ex AF ad quadratum ex FE^d . Sed ut quadratum ex AF ad quadratum ex FE , ita est AB ad BE^c . Ut igitur AB ad BE , ita erit DAC rectangulum ad rectangulum CED .

^b Aequiangula enim sunt triangu-
la ABF , FBE quia rectangulum ABE ae-
quale est quadrato ex BF . *Com.*

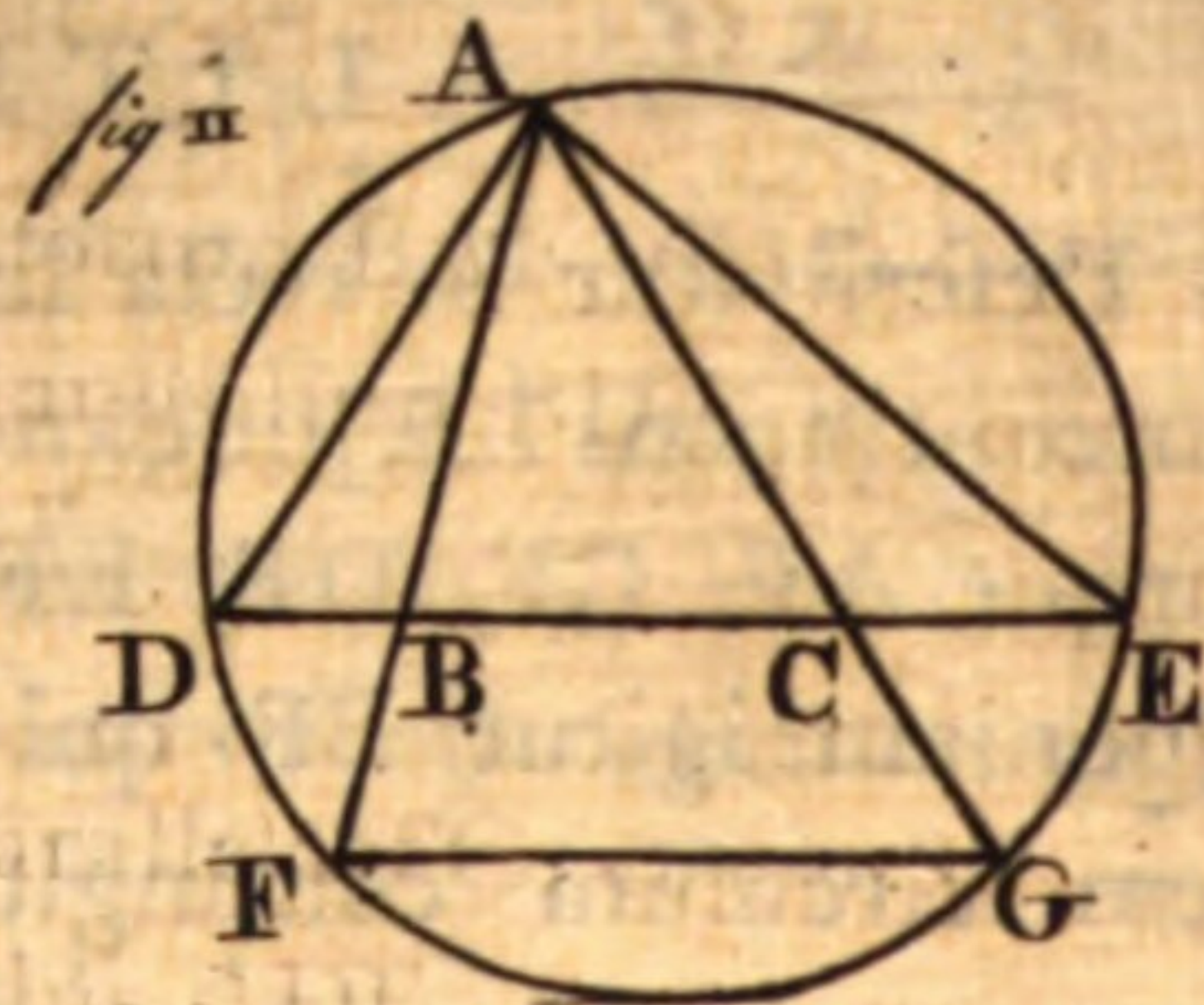
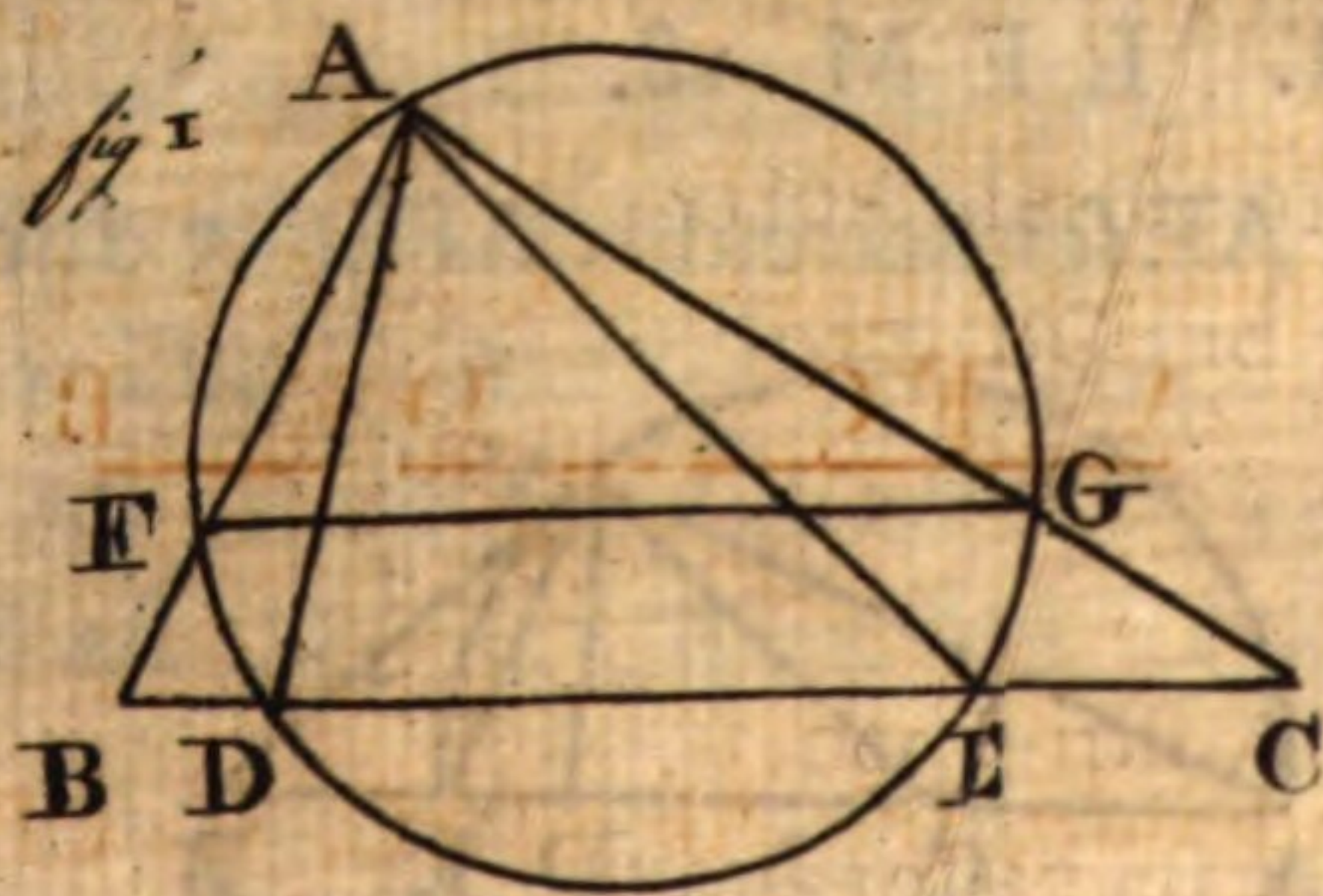
^c Est scilicet angulus BCF aequalis utrisque interioribus CAF , AFC , quare
ab angulo BCF ablato CAF , reliquus est AFC . *Com.*

^d Hoc ostensum est in Prop. 12. Lib. 6. Pappi, quae est ut sequitur,

PROP. XII. LIB. VI. PAPPI ALEXANDRINI.

“SIT triangulum ABC , et ducantur duae rectae lineae DA , AE in angulis
“aequalibus BAD , EAC . Erit ut rectangulum DCE ad rectangulum EBD ,
“ita quadratum ex AC ad quadratum ex AB .”

Describatur circa triangulum ADE circulus, et FG jungatur. Ergo FG pa-
rallela est ipsi BC , quia circumferentia FD circumferentiae EG est aequalis.
Ut igitur AC ad CG , ita est AB ad BF ; et ideo ut quadratum ex AC ad



rectangulum ACG , ita quadratum ex AB ad ABF rectangulum. Sed rectan-
gulum quidem ACG aequale est ipsi DCE , rectangulum vero ABF ipsi EBD .
Quare ut quadratum ex AC ad rectangulum DCE , ita quadratum ex AB ad
rectangulum EBD . Et permutando, ut quadratum ex AC ad illud ex AB ,
ita rectangulum DCE ad ipsum EBD .

^c Quoniam enim aequiangula sunt ABF , FBE triangu-
la, est quadratum ex
 AF ad illud ex FE , ut quadratum ex AB ad quadratum ex BF , hoc est ut AB
ad BE , quia proportionales sunt AB , BF , BE .

“ Observandum est quatuor esse demonstrationes Prop. 1. et totidem Prop. 8. et quartam utriusque Propositionis demonstrationem bis fieri, ope scilicet duorum Lemmatum, ita ut quinque utriusque Propositionis demonstrationes habendae sunt. Propositionis vero hujus 14. tres tantum sunt, et forsitan aliae duae olim fuerunt quae nunc non exstant; quare has restituere et prioribus addere visum est; earum prior similis est demonstrationi Prop. 4. vel 10. altera autem ei Prop. 7. vel 13.

PROP. XIV. ALITER.

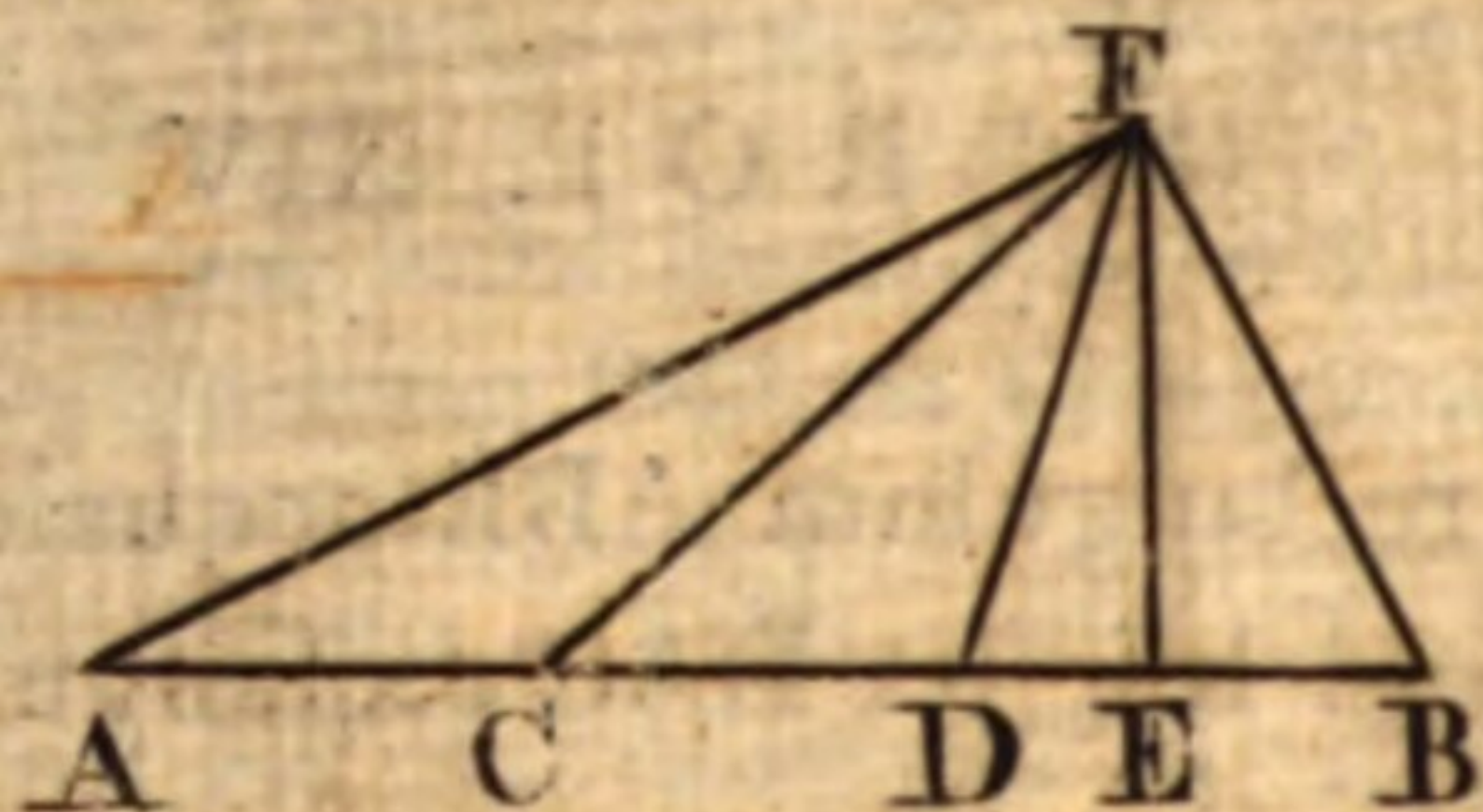
“ SI rectangulum ABE aequale sit rectangulo CBD, erit ut
 “ AB ad BE, ita DAC rectangulum ad rectangulum CED.”

Ponatur FC aequalis ipsi DE; rectangulum igitur DAC aequale est ipsis EAF, DFC simul [Prop. 3. hujus.] Quoniam autem rectangulum ABE aequale est ipsi CBD, ut AB ad BC, ita est DB ad BE; et divi-
 dendo permutandoque, ut
 AC ad DE, hoc est ad CF,
 ita CB ad BE, rursusque dividendo, erit AF ad FC, ita CE ad EB. Rectangulum igitur AF, EB aequale est ipsi FCE, hoc est rectangulo DFC; additoque communi rectangulo EAF, erit rectangulum BAF aequale rectangulis EAF, DFC simul, hoc est ipsi DAC. Permutando igitur, ut rectangulum BAF ad ipsum AF, EB, hoc est ut AB ad BE, ita rectangulum DAC ad ipsum DFC sive CED.

IDEM ALITER.

“SIT rursus rectangulum ABE aequale ipfi CBD, ut AB ad BE, ita erit rectangulum DAC ad rectangulum CED.”

Ducatur EF ad rectos angulos ipfi AB, et fiat quadratum ex EF aequale rectangulo AEB, et jungantur AF, CF, DF, BF. Rectus igitur est angulus AFB, ut in Prop. 13. ostensum fuit, et propterea quadratum ex AF aequale est rectangulo BAE, [Cor. 8. 6.]; et similiter quadratum ex BF aequale est rectangulo ABE, hoc est ipfi CBD. Acqui-angula igitur sunt CBF, FBD triacula [17. et 6. 6.], et angulus BFD aequalis ipfi BCF, hoc est ipsis CAF, AFC simul, quorum aequales sunt anguli BFE, CAF, reliqui igitur EFD, AFC sunt aequales; quare rectangulum DAC est ad ipsum CED, ut quadratum ex AF ad quadratum ex FE per Propositionem 12. Lib. 6. Pappi, quae habetur in notis ad Prop. 14. hujus, hoc est ut BAE rectangulum ad ipsum AEB, hoc est AB ad BE. Ut igitur AB ad BE, ita est rectangulum DAC ad rectangulum CED.”



PROP. XV. COMM. 36. LEM. 19.

Lemma utile ad Epitagma tertium sexti Problematis.^a

“RURSUS si rectangulum ABE aequale sit rectangulo
“CBD, ostendendum est ut CB ad BD, ita esse rectangulum
“ACE ad rectangulum ADE.”

Quoniam enim ut AB ad BD, ita est CB ad BE, erit reli-
qua AC ad reliquam DE, ut CB ad BE. Eadem ratione^b et
reliqua AD ad CE reliquam, erit ut DB ad BE; et invertendo,
“ut CE ad AD, ita EB ad
“BD.” Ratio igitur com-
posita ex ratione CB ad
BE et ratione BE ad BD,
quae quidem est ratio CB ad BD, eadem est rationi compo-
sitae ex ratione AC ad DE, et ratione CE ad AD, quae est ra-
tio [23. 6.] rectanguli ACE ad rectangulum ADE. Ergo ut
CB ad BD, ita est rectangulum ACE ad ADE rectangulum.

$$\frac{A \quad C \quad DE \quad B}{\quad}$$

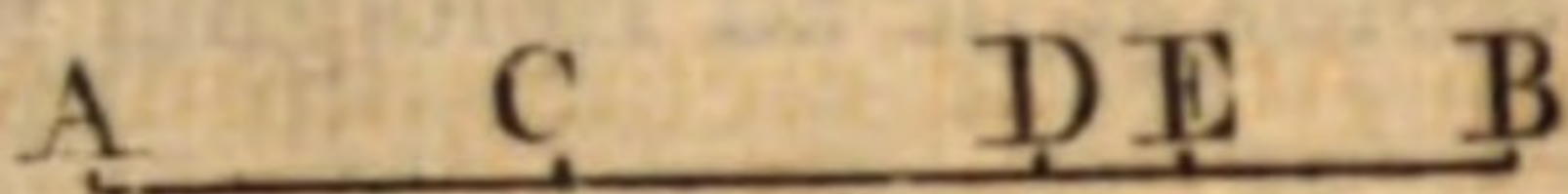
ALITER. LEM. 20.

Quoniam ut AB ad BD, ita est CB ad BE, erit reliqua AC
ad reliquam DE, ut CB ad BE, et, convertendo, ut AC ad
excessum ipsarum AC, DE, ita CB ad CE. Rectangulum igitur
ACE aequale est ei quod continetur excessu ipsarum AC,

^a Ita restituendum fuit; nam in codicibus Graecis et versione Commandini dictum est “Lemma ad Epitagma 1. Prob. 1.” quae corrupta esse recte suspicatus est Commandinus.

^b Quoniam scilicet est AB ad BC, ut DB ad BE.

DE et ipsa BC. Rursus, quoniam reliqua AC est ad reliquam DE, ut AB ad BD, erit, dividendo, ut excessus ipsarum AC, DE ad DE, ita AD ad DB. Ergo rectangulum ADE aequale est rectangulo contento excessu ipsarum AC, DE et ipsa DB. Ut igitur rectangulum contentum excessu AC, DE et BC ad contentum excessu AC, DE et DB, hoc est ut CB ad BD, ita ACE rectangulum ad rectangulum ADE. Q. E. D.



A L I T E R. L E M. 21.

Describatur in recta CD semicirculus CFD, et ducatur contingens BF, junganturque AF, CF, DF, EF. Itaque cum rectangulum ABE aequale sit rectangulo CBD; rectangulum autem CBD aequale quadrato ex contingente BF [36. 3.]; et rectangulum ABE quadrato ex BF aequale erit. Angulus igitur BFE est aequalis angulo A^a. Sed et totus angulus BFD aequalis est toti FCB^b. Ergo reliquus EFD reliquo AFC [32. 1.]. Ut igitur quadratum ex CF ad quadratum ex FD, ita rectangulum ACE ad ADE rectangulum^c, per Prop. Pappi in



^a Quoniam similia sunt triangula ABF, FBE [17. et 6. 6.] Com.

^b Quoniam similia sunt triangula CBF, FBD. Com.

^c Commandinus longam et ineptam hujus demonstrationem tradit, quasi non eadem esset Propositio cum 12. lib. 6. Pappi.

notis ad Prop. 14. hujus: Sed ut quadratum ex CF ad quadratum ex FD, ita CB ad BD. Ergo ut CB ad BD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ADE.

“ Hujus autem Propositionis duae aliae sunt demonstrati-
“ ones similes iis quas in praecedente addidimus, viz.

PROP. XV. ALITER.

“ SI rectangulum ABE aequale sit rectangulo CBD, erit ut
“ CB ad BD, ita rectangulum ACE ad ipsum ADE.”

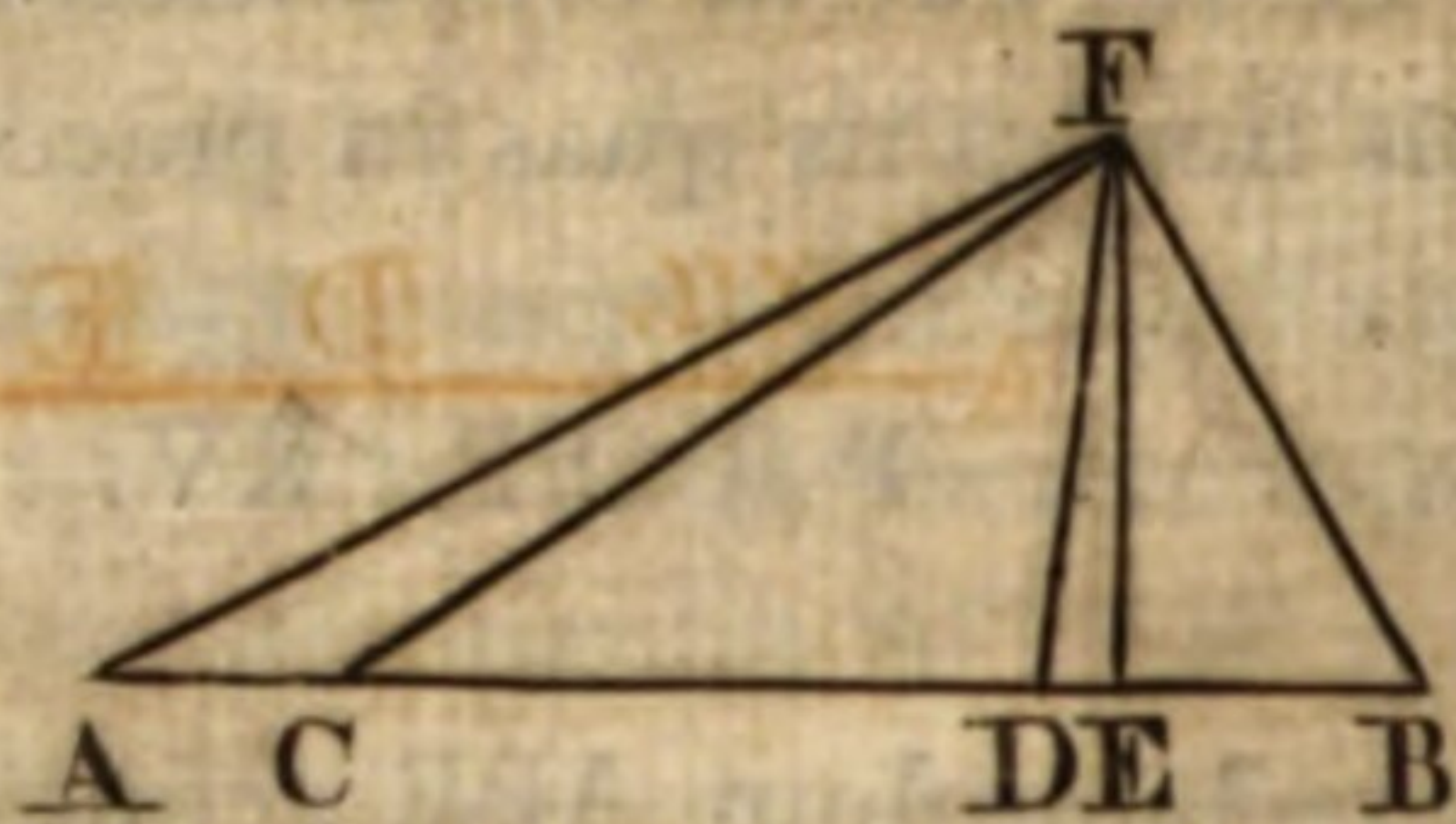
Ponatur AF aequalis ipsi DE, erit igitur per Prop. 9. hujus, rectangulum ACE aequale ipsis AFE, FCD simul. Quoniam autem rectangulum ABE aequale est rectangulo CBD, erit AB ad BC, ut DB ad BE, et convertendo, erit AB ad AC, ut BD ad DE, permutandoque, AB ad BD, ut AC ad DE, hoc est ad AF; et dividendo, erit AD ad DB, ut CF ad FA. Rectangulum igitur FC, DB aequale est ipsi FAD, hoc est rectangulo AFE. Addatur commune rectangulum FCD, et rectangulum FCB aequale erit rectangulis AFE, FCD simul, hoc est rectangulo ACE. Ergo rectangulum FCB est ad ipsum FC, DB, hoc est CB est ad BD, ut rectangulum ACE ad rectangulum AFE, hoc est ad ipsum ADE.

A F C D E B

IDEM ALITER.

“ SI rectangulum ABE aequale sit ipsi CBD, erit ut CB ad
“ BD, ita rectangulum ACE ad ipsum ADE.”

Erigatur DF ad rectos angulos ipsi AB, et fiat quadratum ex DF aequale rectangulo CDB, et jungantur AF, CF, EF, BF. Rectus igitur est angulus CFB, et angulus BFD aequalis ipsi BCF [8. 6.]. Quoniam vero quadratum ex BF aequale est rectangulo CBD [cor. 8. 6.] hoc est rectangulo ABE, erit angulus BFE aequalis angulo BAF, et ostensus est angulus BFD aequalis ipsi BCF, reliquus igitur EFD aequalis est reliquo AFC. Est igitur, per Prop. in notis ad 14. hujus, rectangulum ACE ad ipsum ADE, ut quadratum ex CF ad quadratum ex FD, hoc est ut rectangulum BCD ad rectangulum BDC, hoc est ut CB ad BD."



" PROPOSITIONES 22. 30. 35. lib. 7. Pappi, quae hic sunt
1. 8. 14. ita simul enuntiari possunt, viz.

" SI in recta linea sint quatuor puncta, et in eadem sumatur quintum quod faciat rectangulum contentum segmentis inter ipsum et duo quaecumque ex quatuor punctis, quorum alterutrum dicatur punctum primum, reliquum dicatur secundum, aequale rectangulo contento segmentis inter idem punctum quintum, et duo reliqua puncta. Erit segmentum inter primum et quintum punctum ad segmentum inter secundum et quintum, ut rectangulum contentum segmentis inter primum et duo reliqua ex quatuor punctis ad rectangulum contentum segmentis inter secundum punctum et eadem duo reliqua puncta."

Sint quatuor A, C, E, B et sumatur quintum D faciens rectangulum ADC aequale ipfi BDE, et dicatur A primum, et C secundum punctum; erit AD ad DC, ut rectangulum BAE ad rectangulum BCE.

A CG D E B

Vel dicatur B primum punctum, et E secundum; erit BD ad DE, ut rectangulum ABC ad ipsum AEC.

A C D E B

Sint A, C, E, B quatuor puncta, et quintum D faciens rectangulum ADE aequale ipfi BDC, et dicatur A primum, E secundum punctum; erit AD ad DE, ut BAC ad ipsum BEC.

Vel dicatur B primum et C secundum punctum; erit BD ad DC, ut rectangulum ABE ad ipsum ACE.

A C DE B

Sint A, C, D, E quatuor puncta, et quintum B faciens rectangulum ABE aequale ipfi CBD, et dicatur A primum, E secundum; erit AB ad BE, ut rectangulum DAC ad ipsum CED.

Vel dicatur D primum et C secundum; erit DB ad CB, ut rectangulum ADE ad rectangulum ACE.

Fig. Prop. 35. infervit etiam Prop. 36. sc. Dicatur C primum et D secundum punctum; erit CB ad DB, ut rectangulum ACE ad rectangulum ADE."

PROP. XVI. COMM. 37. LEM. 22.

"SIT recta linea AB, et in ipsa sumantur duo puncta C, D;
"fit autem ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum
"ex DC. Erit rectangulum ABC aequale quadrato ex BD."

Ponatur ipsa CD aequalis DE. Dividendo igitur, ut AC ad CB, ita [6. 2.] rectangulum CAE ad quadratum ex CD, hoc est ad rectangulum EDC. Ut autem AC ad CB, ita, sumpta communi altitudine AE, rectangulum CAE ad rectangulum quod AE, CB continetur. Ergo ut rectangulum CAE ad rectangulum EDC, ita rectangulum CAE ad rectangulum contentum AE, CB. Rectangulum igitur contentum AE, CB rectangulo EDC est aequale. Quare ob proportionem^a, componendoque, ut AD ad DE, hoc est ad DC, ita erit DB ad BC; et tota AB ad totam BD, ut DB ad BC. Ergo rectangulum ABC aequale est quadrato ex DB. Q. E. D.

"Et retrogradiendo ostendetur conversa, fiet autem brevius ita, viz.

^a AE scilicet est ad ED, ut DC ad CB.

A E D C B

CONVERSA PROP. XVI.

“ SI rectangulum ABC aequale fuerit quadrato ex BD, erit
 “ ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC.”

Quoniam enim ut AB ad BD, ita BD ad DC, erit [19. 5.]
 ut AB ad BD, ita AD ad DC; ergo [22. 6.] quadratum ex
 AB est ad quadratum ex BD, hoc est [cor. 2. 20. 1.] recta AB
 ad ipsam BC, ut quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Et ex hoc facile sequitur Prop. 16. ex absurdo.”

PROP. XVII. COMM. 38. LEM. 23.

“ SIT rursus ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad qua-
 “ dratum ex DC. Erit rectangulum ABC aequale quadrato
 “ ex BD.”

Ponatur ipsi CD aequalis DE; erit, dividendo, ut AC ad
 CB, hoc est ut rectangulum EAC ad rectangulum EA, BC,
 ita EAC rectangulum ad rectangulum CDE. Rectangulum
 igitur EA, BC rectangulo
 CDE aequale erit. Et ob
 proportionem^a, dividendo-
 que, ut AD ad DE, hoc est
 ad DC, ita DB ad BC. Ergo et reliqua AB ad BD reliquam,
 est ut DB ad BC. Rectangulum igitur ABC quadrato ex BD
 est aequale.

A C B D E

^a AE scilicet est ad ED, ut DC ad CB.

PROP. XVIII. COMM. 39. LEM. 24.

“ SIT recta linea AB, et in ipsa tria puncta C, D, E; sit au-
 “ tem ut rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita qua-
 “ dratum ex AC ad quadratum ex CD. Erit rectangulum
 “ ABD ad rectangulum AED, ut quadratum ex BC ad qua-
 “ dratum ex CE.”

Sumatur enim aequalitatis punctum F^a , ita ut rectangu-
 lum AFD aequale sit rectangulo BFE. Ut igitur AF ad FD,
 ita est rectangulum BAE ad rectangulum BDE, est enim
 Lemma in Sectione Deter-
 minata “ viz. Prop. 1. hu-
 “ jus.” Sed ut rectangu-
 lum BAE ad ipsum BDE,

A C D F E B

ita est quadratum ex AC ad quadratum ex CD. Ergo et ut
 AF ad FD, ita quadratum ex AC ad quadratum ex CD. Rect-
 angulum igitur AFD, hoc est rectangulum BFE quadrato ex
 FC est aequale [Prop. 16. hujus]. Ergo ut BF ad FE, ita est
 quadratum ex BC ad quadratum ex CE^b. Sed ut BF ad FE,
 ita est rectangulum ABD ad ipsum AED, “ per Prop. 1. hu-
 “ jus, est enim rectangulum AFD aequale ipsi BFE.” Ut igi-
 tur rectangulum ABD ad rectangulum AED, ita est quadra-
 tum ex BC ad quadratum ex CE.

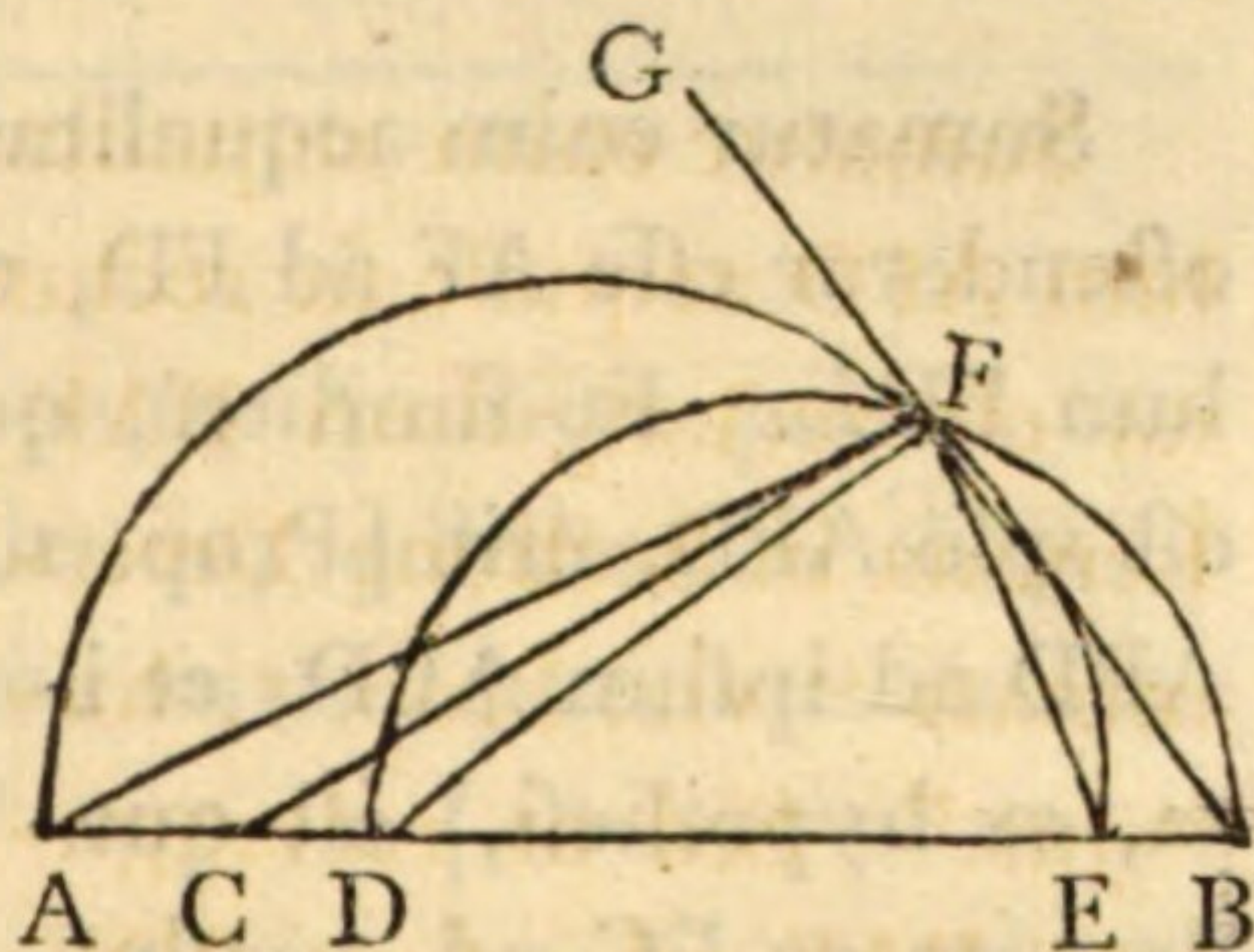
^a Punctum F ita invenitur; secetur AE in F ita ut AF sit ad FE, ut AB ad DE; erit igitur [19. 5.] AF ad FE, ut BF ad FD, et rectangulum AFD propterea aequale erit ipsi BFE. Com. Est casus primus Prop. 57. hujus.

^b Quoniam enim rectangulum BFE aequale est quadrato ex FC, proporti-
 onales erunt BF, FC, FE, quare [12. 5.] ut BF ad FC, ita BC ad CE. Est au-

ALITER. LEM. 25.

Describantur in rectis lineis AE, DB semicirculi AFE, DFB, et jungantur AF, FC, FD, FE, FB. Itaque quoniam anguli AFB, DFE duobus rectis sunt aequales, ut rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita erit quadratum ex AF ad quadratum ex FD [Prop. 5. hujus].

Sed ut rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex CD; ut igitur quadratum ex AC ad quadratum ex CD, ita quadratum ex AF ad quadratum ex FD, et ideo ut AG ad CD, ita est AF ad FD.



Quare angulus AFD bifariam sectus est recta linea CF [3.6.]. At producta BF ad G, angulus DFE aequalis est angulo GFA.^a Totus igitur EFC angulus toti CFG est aequalis. Ergo ut BC ad CE, ita est BF ad FE [A. 6. Elem. in editione nostra]; et ut quadratum ex BC ad quadratum ex CE, ita quadratum ex BF ad quadratum ex FE. Ut autem quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ita est [Prop. 5. hujus.] rectangulum ABD ad ipsum AED. Quare ut rectangulum ABD ad rectangulum AED, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CE. Q. E. D.

tem [cor. 2. 20. 6.] BF ad FE, ut quadratum ex BF ad quadratum ex FE, hoc est ut quadratum ex BC ad quadratum ex CE.

^a Uterque enim cum angulo DFE aequalis est duobus rectis. Com.

“ CONVERSA PROP. XVIII.

“ SIT recta linea AB, et in ipsa tria puncta C, D, E; fit au-
 “ tem ut rectangulum ABD ad rectangulum AED, ita qua-
 “ dratum ex BC ad quadratum ex CE. Erit rectangulum
 “ BAE ad rectangulum BDE, ut quadratum ex AC ad qua-
 “ dratum ex CD.”

Sumatur enim aequalitatis punctum F, et, ut in Prop. 18.
 ostendetur esse AF ad FD, ut rectangulum BAE ad rectangu-
 lum BDE. Et similiter, quoniam rectangulum BFE aequale
 est ipso AFD, erit [Prop. 1.] ut BF ad FE, ita (rectangulum
 ABD ad ipsum AED, et i-
 ta, ex hypothesi,) est qua-
 dratum ex BC ad quadra-
 tum ex CE. Igitur [Prop.

A C D F E B
 —————

17.] rectangulum BFE, hoc est AFD, aequale est quadrato ex
 CF; quare, per conversam Prop. 16. ut AF ad FD, ita qua-
 dratum ex AC ad quadratum ex CD. Ostensum autem fuit ut
 AF ad FD, ita rectangulum BAE ad rectangulum BDE. Ut
 igitur rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita est qua-
 dratum ex AC ad quadratum ex CD.

Est et alius casus hujus Propositionis 18vae, in quo scilicet punctum C est in AD producta, reliquis ut in hoc manentibus, viz.

Si rectangulum BAE sit ad rectangulum BDE, ut quadratum ex AC ad quadratum ex CD; erit rectangulum ABD ad rectangulum AED ut quadratum ex BC ad quadratum ex CE.”

A D F E C B

Et hujus duae sunt Demonstrationes, quarum prima fit iisdem verbis cum prima praecedentis, adhibendo autem Prop. 17. vice Prop. 16. hujus. Altera etiam, paucis mutatis, eadem est cum altera praecedentis.”

P R O P. XIX. C O M M. 40. L E M. 26.

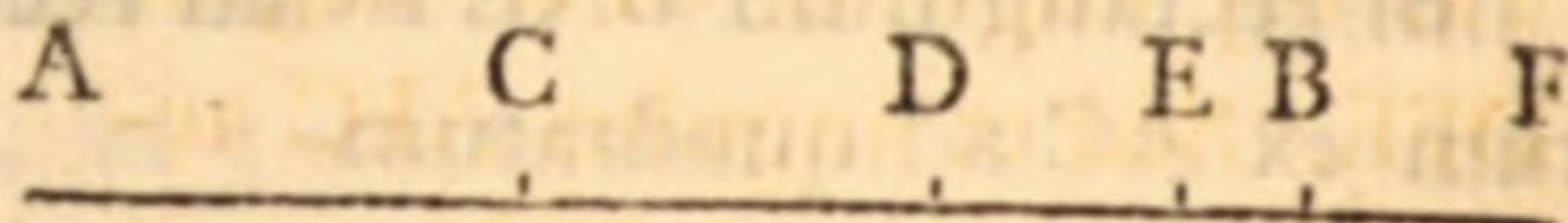
“ SIT rursus ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB,
 “ ita quadratum ex CD ad quadratum ex DE. Erit ut rect-
 “ angulum EAC ad rectangulum CBE, ita quadratum ex AD
 “ ad quadratum ex DB.”

Sumatur rursus aequalitatis punctum F^a, ut rectangulum AFB rectangulo CFE sit aequale. Est igitur [Prop. 15.] ut CF ad FE, ita

A C D E B F

(rectangulum ACB ad
^a Punctum F ita invenitur; in CB producta sumatur punctum F ita ut CF sit ad FB, ut AC ad EB. Erit igitur [12. 5.] CF ad FB, ut AF ad FE, et

ipsum AEB. Ut autem rectangulum ACB ad rectangulum AEB, ita) quadratum ex CD ad quadratum ex DE. Aequale igitur est [Prop. 16.] rectangulum CFE, hoc est AFB quadrato ex FD. Quare ut AF ad FB, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB^b. Sed ut AF ad FB, ita est rectangulum EAC ad rectangulum CBE [Prop. 14.], “quia rectangulum AFB aequale est ipsi CFE.” Est igitur ut rectangulum EAC ad rectangulum CBE, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB.



ALITER. LEM. 27.

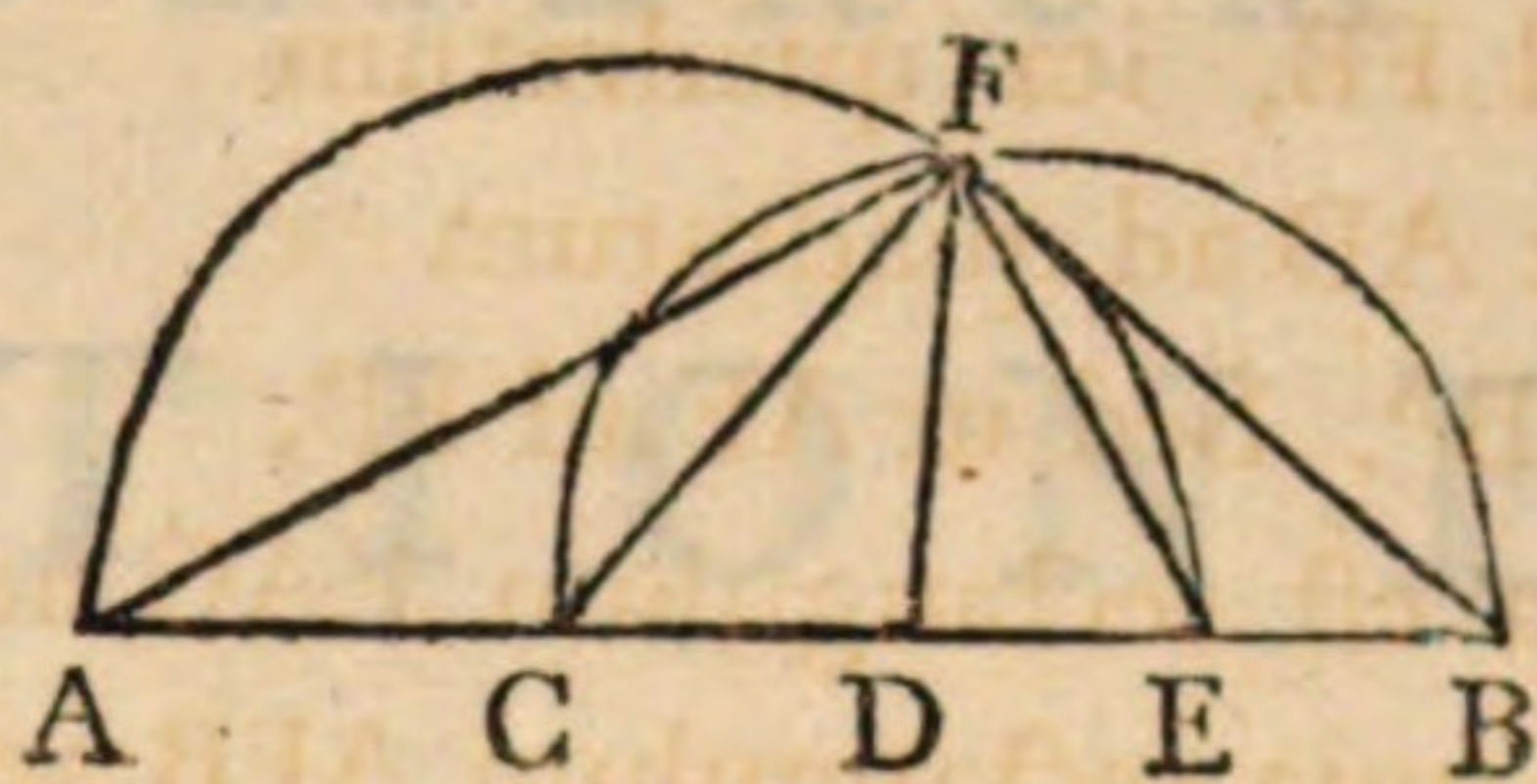
Describantur circa AE, CB semicirculi AFE, CFB, et jungantur AF, CF, DF, EF, BF. Erit angulus AFC angulo EFB aequalis. Est igitur ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FE^c. Ut autem

propterea rectangulum AFB aequale est rectangulo CFE. Com. Est Casus primus Prop. 65. hujus.

^b Quoniam enim rectangulum AFB aequale est quadrato ex FD, proportionales erunt AF, DF, BF; quare [19. 5.] AF est ad FD, ut AD ad DB. Est autem [cor. 2. 20. 6.] AF ad FB, ut quadratum ex AF ad quadratum ex FD, hoc est ut quadratum ex AD ad quadratum ex DB. Per ambages multas hoc ostendit Commandinus.

^c Sequitur hoc ex Prop. Pappi quae habetur in notis ad Prop. 14. In nota autem H ad hunc locum Commandinus dicit hoc sequi ex demonstratis ab ipso ad Prop. 36. Lib. 7. Pappi “ad notam scilicet Q in pag. 182. a.” Deceptus autem fuit, schemate Prop. hujus 40. non attentè satis spectato. In figura enim ejus ad notam Q angulus ABC, quem putat aequalem esse angulo CFE in figura Prop. 40. rectus ponitur; non autem rectus est CFE, est enim CFB, non CFE semicirculus. Sequitur igitur propositum ex Propositione quidem

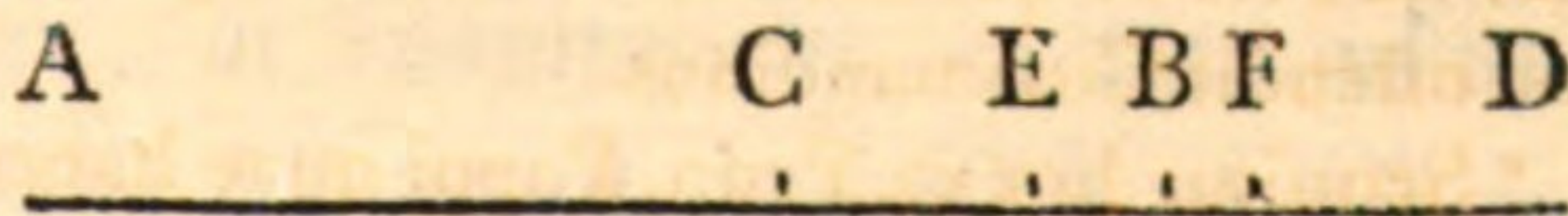
rectangulum ACB ad rectangulum AEB, sic ponitur quadratum ex CD ad quadratum ex DE. Ergo ut quadratum ex CD ad quadratum ex DE, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FE. Aequalis igitur est [3, et 22. 6.] angulus CFD angulo DFE. Sed et angulus AFC aequalis est angulo EFB, ergo totus AFD angulus toti DFB est aequalis. Ac propterea ut quadratum ex AF ad quadratum ex FB, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB [3, et 22. 6.]. Ut autem quadratum ex AF ad quadratum ex FB, ita rectangulum EAC ad rectangulum CBE, per Prop. Pappi in notis ad Prop. 14. hujus. Ergo ut rectangulum EAC ad CBE rectangulum, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB. Q. E. D.



“ Et retrogradiendo conversa ostendetur in utraque demonstratione.

Est et alius Casus hujus Propositionis, in quo scilicet punctum D est in AB producta, reliquis ut in hac manentibus, viz.

Si rectangulum ACB sit ad rectangulum AEB, ut quadratum ex CD ad quadratum ex DE; erit ut rectangulum EAC ad rectangulum EAB, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB.



quam citasse debuit ad notam Q, Prop. sc. 12. Lib. 6. Pappi, sed non ex Propositione quam ibi demonstrat.

Et hujus duae sunt Demonstrationes, quarum prima fit iisdem verbis cum prima praecedentis; adhibendo autem Prop. 17. vice Prop. 16. Altera etiam, paucis mutatis, eadem est cum altera praecedentis.



LEMMATA **IN** **SECUNDUM LIBRUM** **DE SECTIONE** **DETERMINATA.**

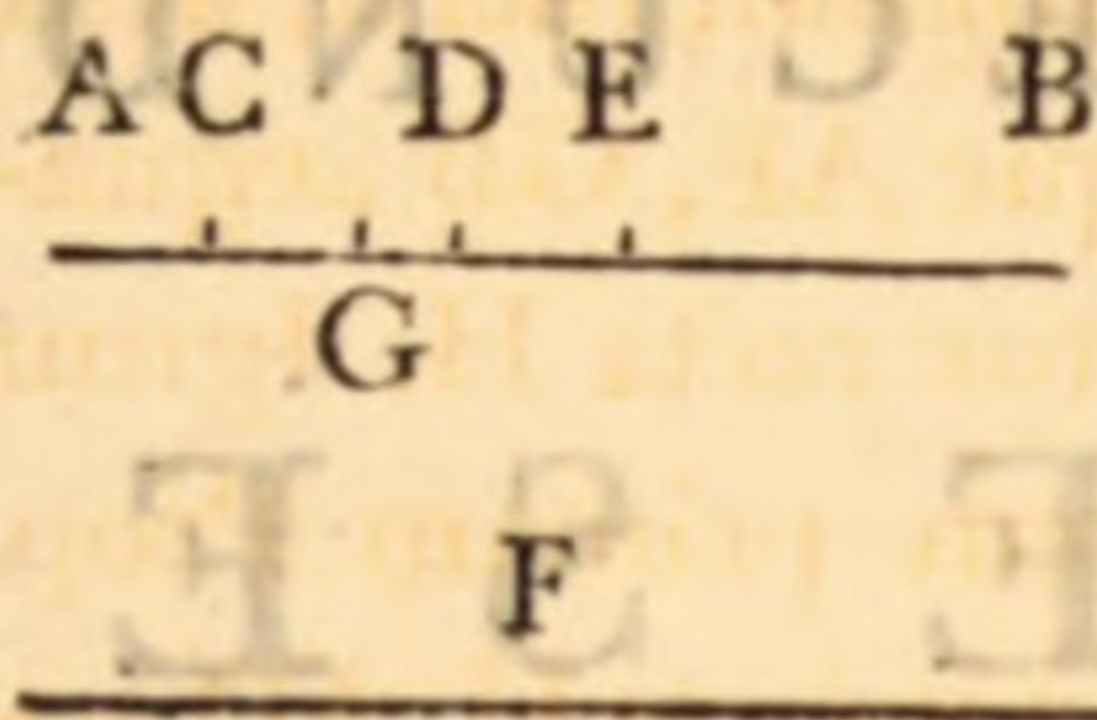
PROP. XX. COMM. 41. LEM. 1.

“SIT recta linea AB in qua fumantur tria puncta C, D, E
 “ita ut rectangulum ADC fit aequale rectangulo BDE; et
 “utrisque AE, CB aequalis ponatur recta linea F. Erit rect-
 “angulum quidem F, AD rectangulo BAE aequale; rectan-
 “gulum autem F, CD aequale rectangulo BCE; rectangu-
 “lumque F, BD rectangulo ABC; et rectangulum F, ED
 “rectangulo AEC aequale.”

Quoniam enim rectangulum ADC rectangulo BDE est ae-
 quale, erit ob proportionem, et invertendo, et tota ad to-
 tam, componendoque^a, ut CB, AE simul, hoc est F ad AE, ita

^a Est scilicet AD ad DB, ut ED ad DC, et invertendo CD ad DE, ut BD
 ad DA, et tota ad totam [12. 5.] CB ad AE, ut BD ad DA, componendo-
 que, ut CB, AE simul, hoc est F ad AE, ita BA ad AD. Verum prima
 harum proportionum superflua est, sequitur enim secunda, quae fit inverten-

BA ad AD. Rectangulum igitur F, AD est aequale rectangulo BAE, “ quae est prima pars.” Rursus quoniam tota AE est ad totam CB, ut ED ad DC^b, erit componendo, ut utraque AE, CB ad CB, hoc est ut F ad CB, ita EC ad CD. Ergo rectangulum F, CD rectangulo BCE aequale erit, “ quae est secunda pars.” Eodem mo-



do in reliquis. “ viz. tertia pars ita ostenditur; quoniam ut AE ad CB, ita est (ED ad DC, et ita) AD ad DB, erit componendo utraque AE, CB, hoc est F ad CB, ut AB ad BD. Rectangulum igitur F, BD aequale est ipsi ABC. Quarta autem pars ita; est CB ad AE, ut CD ad DE, et componendo utraque AE, CB ad AE, hoc est F ad AE, ut CE ad ED. Rectangulum igitur F, ED aequale est rectangulo AEC.” Fient igitur quatuor, “ ut dictum est^c.”

CONVERSA primae partis PROPOSITIONIS hujus haec est,

“ SIT recta linea AB in qua sumantur tria puncta C, D, E, “ et utrisque AE, CB aequalis ponatur recta F, sit autem rect-

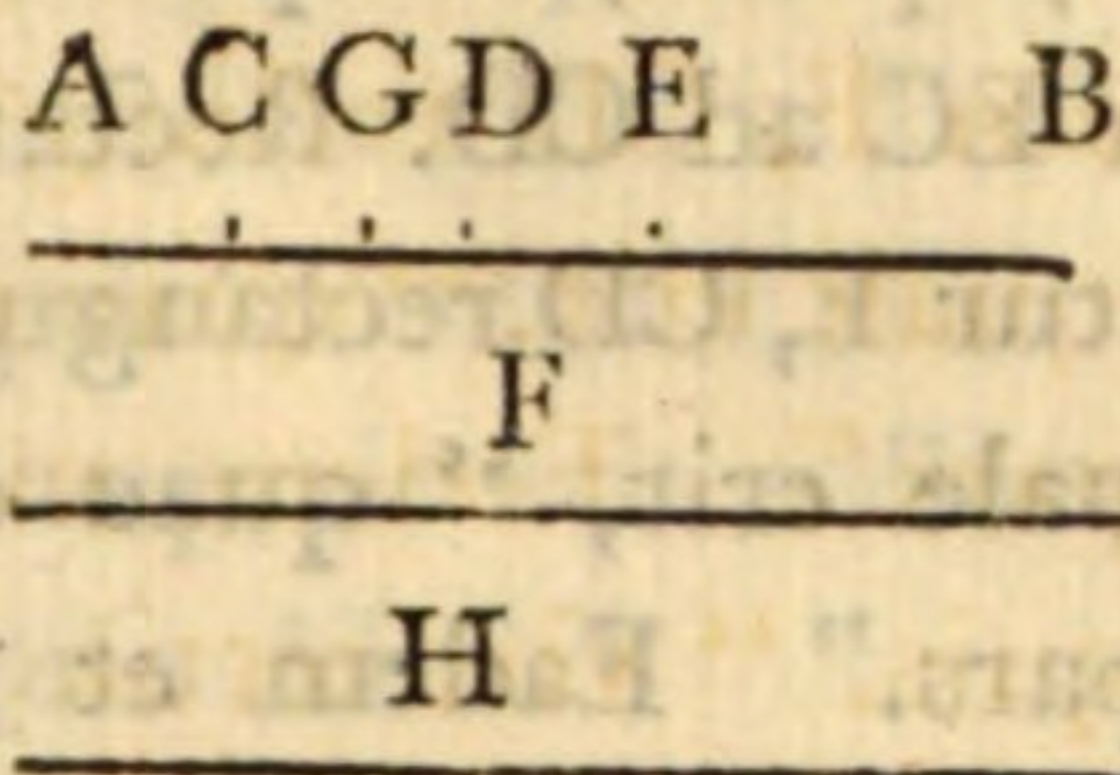
do, immediate ex aequalitate rectangulorum ADC, BDE, aeque ac prima; scribi igitur solummodo debuit, ob proportionem, et tota ad totam, componendoque. Commandinus autem in nota ad hunc locum non paucioribus quam sex proportionibus propositum ostendit; neque utitur proportionem tota ad totam, quae in textu habetur.

^b Quoniam enim rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE, erit AD ad DB, ut ED ad DC, et tota AE ad totam CB, ut ED ad DC. Commandinus textum hujus Demonstrationis in codicibus Graecis non parum corruptum et mutilatum recte restituit; ut et in locis aliis quam plurimis.

^c Verba haec “ ut dictum est” desunt in codice regio.

“angulum F, AD aequale ipsi BAE; erit rectangulum ADC
“aequale ipsi BDE.”

Si enim non fuerit, sit ADG rectangulum aequale ipsi BDE;
et utrisque AE, GB aequa-
lis ponatur recta H. Igitur
per partem primam Prop.
20. rectangulum H, AD ae-
quale est ipsi BAE, hoc est
ipsi F, AD. Ergo recta H
aequalis est ipsi F, quod fieri non potest. Rectangulum igitur
ADC aequale est ipsi BDE.



Similiter reliquarum partium Prop. 20. ut et partium
Propp. 21. 22. conversae ostendi possunt.

PROP. XXI. COMM. 42. LEM. 2.

“SIT rursus nunc rectangulum ADC aequale rectangulo
“BDE, et utrisque AE, CB aequalis ponatur recta linea F.
“Rursus quatuor fient, videlicet rectangulum quidem F, AD
“aequale erit rectangulo BAE; rectangulum vero F, CD
“rectangulo BCE; rectangulumque F, BD aequale erit rect-
“angulo ABC; et rectangulum F, ED rectangulo AEC.

Quoniam enim rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE,
erit ob proportionem, et invertendo, et reliqua ad reliquam,
componendoque, ut utraque AE, CB ad AE, ita BA ad AD^a.

^a Et hic etiam prima quatuor proportionum superflua est, sequitur enim se-
cunda immediate ex aequalitate rectangulorum ADC, BDE; est scilicet BD ad

Utraque autem ^b AE, CB aequales sunt ipsi F. Ergo ut F ad AE, ita BA ad AD; et ideo rectangulum F, AD aequale est rectangulo BAE, “ quae est prima pars.” Rursus, quoniam ut AD ad DB, ita ED ad DC, erit reliqua AE ad reliquam CB, ut ED ad DC; quare, componendo, ut AE, CB simul, hoc est ut F ad BC, ita EC ad CD. Rectangulum igitur F, CD rectangulo

A E D C B

BCE aequale erit, “ quae est secunda pars.” Eadem et in duobus reliquis ostendemus.

F

“ Tertia scilicet pars ita ostenditur; quoniam est CB ad AE, ut BD ad DA, invertendo, et componendo erit AE una cum CB, hoc est erit F ad CB, ut AB ad BD. Rectangulum igitur F, BD aequale est ipsi ABC. Quarta autem pars ita; est CB ad AE, ut (BD ad DA, hoc est ut) CD ad DE; igitur, componendo, est F ad AE, ut CE ad ED, quare rectangulum F, ED aequale est rectangulo AEC.” Quatuor igitur fient, “ ut proponebatur ^c.”

DA, ut CD ad DE, reliqua igitur CB est ad reliquam AE, ut BD ad DA; et componendo, ut utraque AE, CB, hoc est F ad AE, ita BA ad AD. Scribi igitur solummodo debuit ob proportionem, et reliqua ad reliquam, componendoque.

^b Commandinus habet “ igitur,” sensus vero requirit “ autem;” et in codice regio habetur δ .

^c Defunt “ ut proponebatur” in codice regio.

PROP. XXII. COMM. 43. LEM. 3.

“SIT autem punctum “scilicet D” extra totam rectam “scilicet AC,” et sit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE. “Si rectarum AE, BC excessui aequalis ponatur “recta” F, “rursus quatuor fient, videlicet rectangulum F, AD aequale “erit rectangulo BAE; rectangulum vero F, CD rectangulo “BCE; rectangulumque F, BD aequale erit rectangulo ABC; “et rectangulum F, DE rectangulo AEC.”

Quoniam nimirum rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE, erit ob proportionem, et reliqua ad reliquam, et convertendo, ut AE ad excessum rectarum AE, BC, ita DA ad AB^a. Sed ipsarum AE, BC excessus est “recta” F; ergo rectangulum F, AD est aequale rectangulo BAE, “quae est prima pars.” Rursus, quoniam reliqua AE est ad reliquam BC, ut ED ad DC, erit, dividendo,

$$\begin{array}{ccccccc} A & & E & B & C & D \\ \hline & & F & & & \end{array}$$

ut excessus rectarum AE, BC, hoc est ut “recta” F ad BC, ita EC ad CD. Rectangulum igitur F, CD est aequale rectangulo BCE, “quae est secunda pars.” Eadem et in reliquis duabus ostendentur. “Tertia scilicet pars ita ostenditur; quoniam ut AE ad BC, ita est AD ad DB, dividendo excessus ipsarum AE, BC, hoc est recta F erit ad BC, ut AB ad BD. Rectangulum igitur F, BD aequale est ipsi ABC. Quarta autem pars ita;

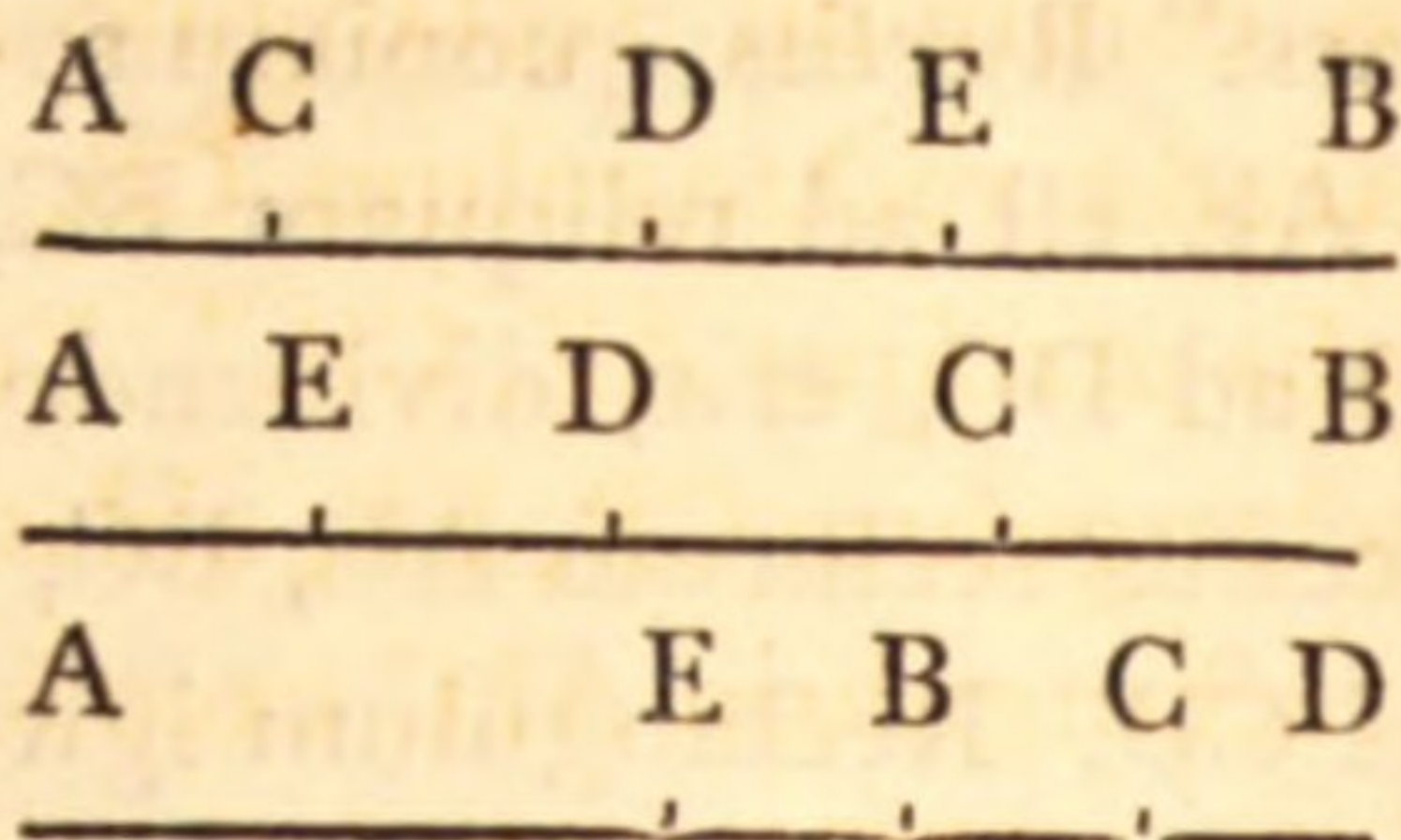
^a Est enim AD ad DB, ut ED ad DC, ergo reliqua AE est ad reliquam BC, ut AD ad DB; et convertendo, ut AE ad excessum ipsarum AE, BC, ita DA ad AB. Com.

quoniam est AD ad DB, ut ED ad DC, erit reliqua AE ad reliquam BC, ut ED ad DC [cor. 19. 5.], et convertendo, ut AE ad excessum ipsarum AE, BC, hoc est ad rectam F, ut DE ad EC. Rectangulum igitur F, DE aequale est rectangulo AEC." Fiunt igitur quatuor ut proponebatur.

PROP. XXIII. COMM. 44. LEM. 4.

"Hoc autem demonstrato facile invenientur quae in "Li-
"brum" primum de Sectione Determinata "prius ostensa
"sunt Lemmata," iisdem positis in hunc modum, "Si rect-
"angulum ADC aequale fuerit rectangulo BDE;" Dico ut
"BD ad DE, ita esse rectangulum ABC ad rectangulum
"AEC^a."

Quoniam nimirum demonstratum est, "in tribus praece-
dentibus Propositionibus,"
rectangulum quidem F, BD
rectangulo ABC aequale,
rectangulum vero F, ED ae-
quale rectangulo AEC, erit
ut rectangulum F, BD ad
rectangulum F, DE, hoc est ut BD ad DE, ita rectangulum
ABC ad rectangulum AEC.



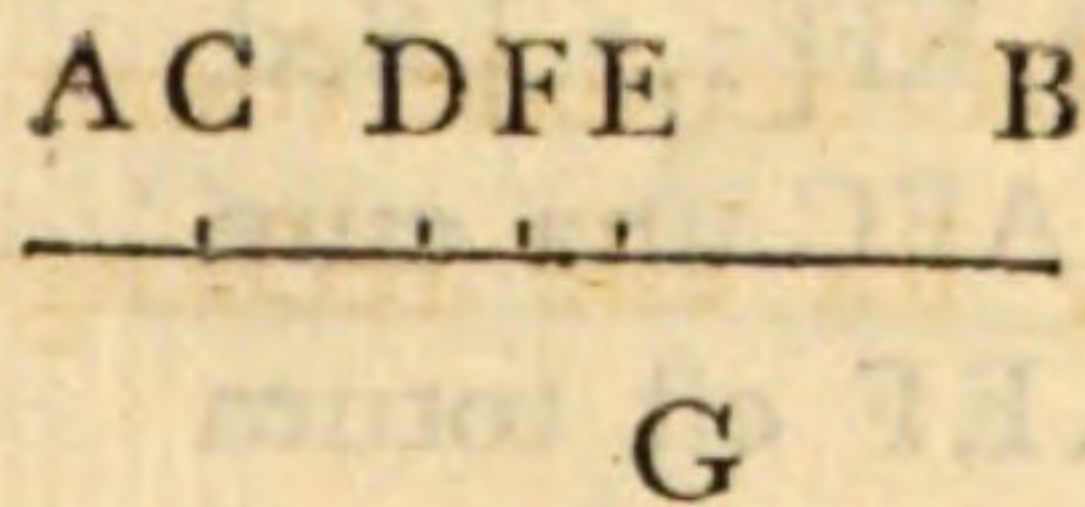
^a In impressis Commandini unicum tantum habetur schema ad hanc Propo-
sitionem, quod hic tertium est. Codex regius tria habet, in quorum tertio viti-
ose ponitur γ loco δ , et vice versa. Primum hic positum, nam est secundum in
codice regio, spectat ad Prop. 1. hujus. Secundum ad Prop. 8. et tertium ad
Prop. 15.

PROP. XXIV. COMM. 45. LEM. 5.

In Epitagma primum primi Problematis.

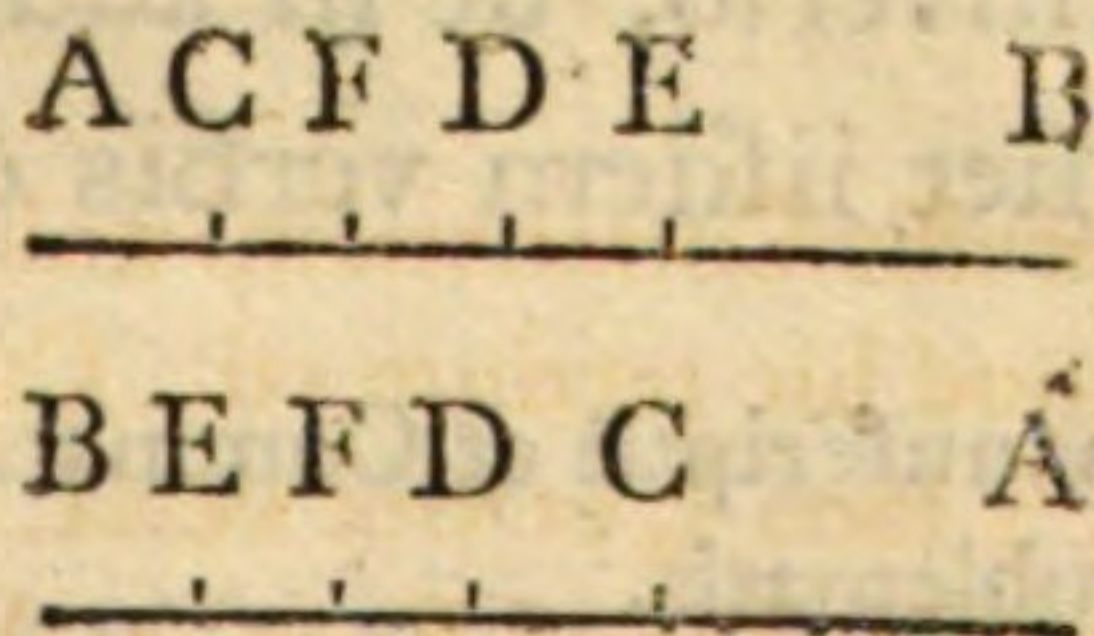
“SIT rursus rectangulum ADC aequale rectangulo BDE, et
 “quodvis punctum F “inter D et E.” Si utrisque AE, CB
 “ponatur aequalis “recta” G, rectangulum AFC excedet rect-
 “angulum BFE rectangulo G, DF.”

Quoniam nimirum demonstratum est “in quarta parte
 Prop. 20.” rectangulum G, DE aequale rectangulo AEC, com-
 mune auferatur rectangu-
 lum G, FE; reliquum igi-
 tur rectangulum G, DF est
 excessus quo rectangulum
 AEC excedit rectangulum



G, FE. Quo autem rectangulum AEC excedit ipsum G, FE,
 ablato communi rectangulo AEF, eodem rectangulum AE,
 CF excedit rectangulum CB, FE [1. 2.], “est enim recta G
 aequalis utrisque AE, CB.” Et quo rectangulum AE, CF exce-
 dit rectangulum CB, EF, ablato communi rectangulo CFE, eo-
 dem rectangulum AFC excedit rectangulum BFE. Rectangu-
 lum igitur AFC excedit ipsum BFE rectangulo G, DF. Q. E. D.

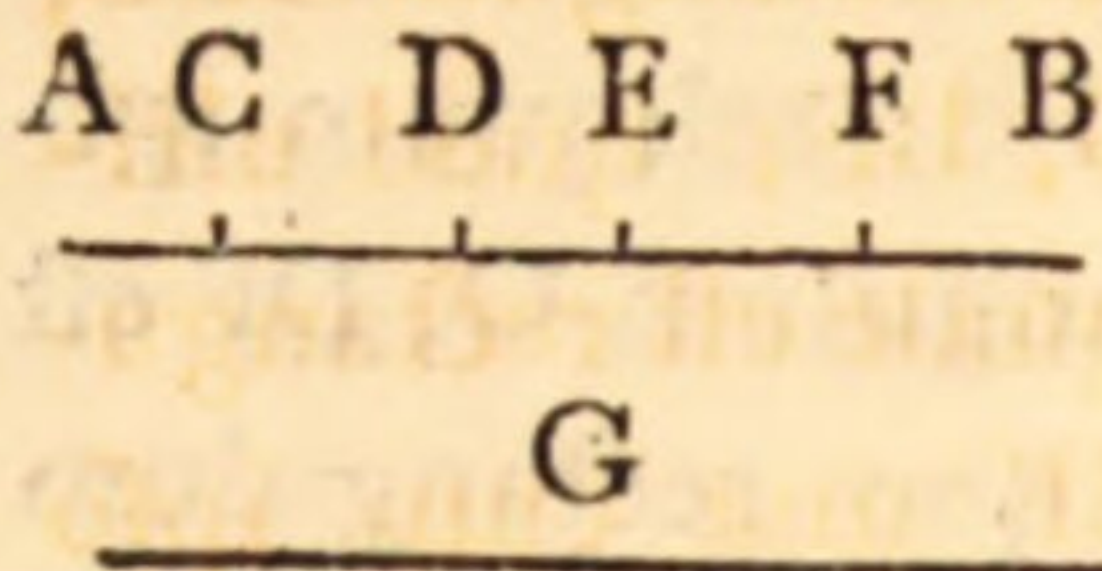
“Si vero punctum F sumatur inter D et C, reliquis ma-
 nentibus, rectangulum BFE
 excedet rectangulum AFC
 rectangulo G, DF. Demon-
 stratur autem iisdem verbis
 quibus Propositio, mutatis
 notis alphabeticis, ut in figura.”



Aliud in tertium Epitagma secundi^a Problematis.

“ SIT punctum F inter E, B “ reliquis ut in praecedente
 “ manentibus ;” erit rectangulum AFC una cum ipso EFB
 “ aequale rectangulo G, DF.”

Quoniam igitur prius ostensum est rectangulum G, DE
rectangulo AEC aequale, commune apponatur rectangulum
G, EF; totum igitur rectangulum G, DF aequale est rectan-
gulo AEC, ipsoque AEF, et
rectangulo CB, EF[1.2.]. Sed
rectangulum AEC una cum
rectangulo AEF est totum
rectangulum AE, CF. Rect-
angulum igitur G, DF est aequale rectangulo AE, CF una
cum ipso CB, EF. At rursus rectangulum CB, EF aequale est
[1. 2.] rectangulis CFE, EFB; rectangulum vero AE, CF una
cum ipso CFE est totum rectangulum AFC [1. 2.]. Sed ha-
bebamus etiam rectangulum EFB; ergo rectangulum G, DF
aequale est rectangulo AFC una cum ipso EFB.



“Idem sequitur si punctum F sumatur inter puncta A, C reliquis manentibus. Si enim notae alphabeticae ponantur ordine inverso, ut in additamento ad praecedentem, demonstratio fiet iisdem verbis quibus ea Propositionis.”

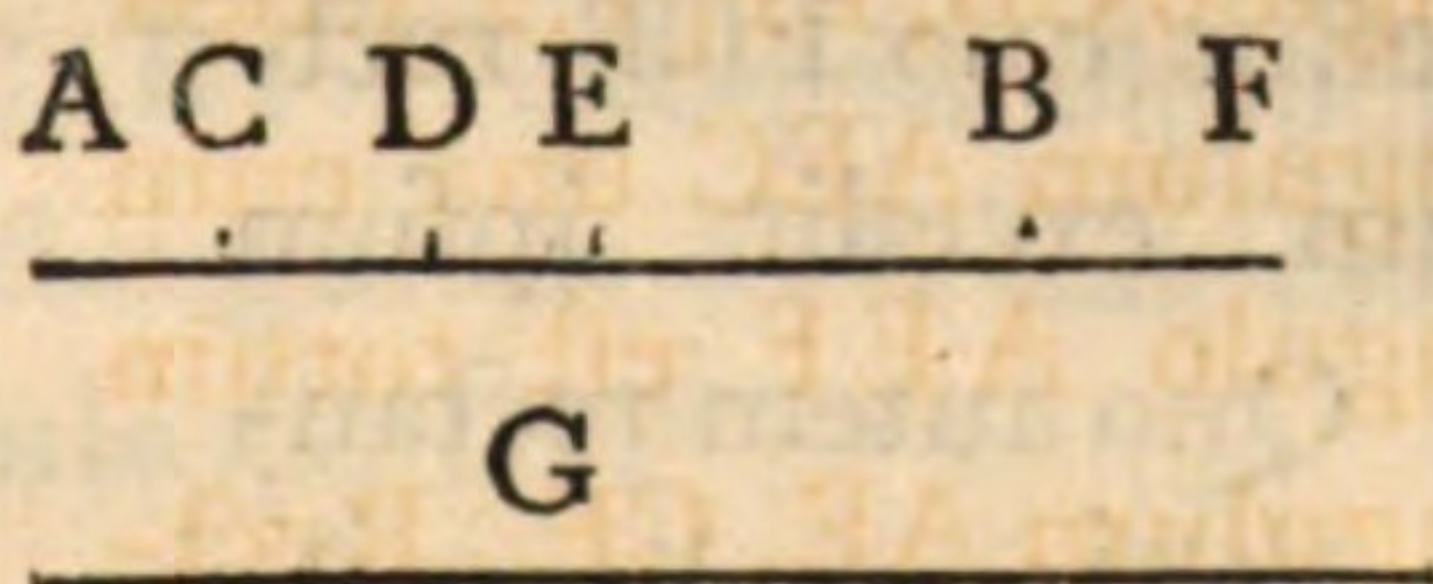
* In manuscriptis et Commandini impressis vitiose habetur "tertii" vice secundi Problematis.

PROP. XXVI. COMM. 47. LEM. 7.

In Epitagma primum tertii Problematis.

“SIT rursus punctum F extra rectam AB “reliquis manen-
 “tibus.” Ostendendum est rectangulum AFC excedere rect-
 “angulum EFB rectangulo G, DF.”

Quoniam enim rectangulum G, DB aequale est rectangu-
 lo ABC, “per tertiam partem Prop. 20.” commune appona-
 tur rectangulum G, BF; totum igitur rectangulum G, DF
 aequale est rectangulo ABC,
 ipfque G, BF; quod ulti-
 mum aequale est rectangu-
 lo AE, BF una cum ipso
 CBF [1. 2.]; rectangulum
 autem ABC una cum ipso CBF est totum rectangulum AF,
 CB [1. 2.]. Ergo rectangulum G, DF aequale est rectangulo
 AF, CB et ipso AE, BF simul. Sed rectangulum AF, CB una
 cum ipso AE, BF est excessus quo rectangulum AFC excedit
 ipsum EFB^a. Rectangulum igitur G, DF est excessus quo
 AFC rectangulum excedit ipsum EFB.



^a Est enim rectangulum EFB una cum ipso AE, BF aequale rectangulo
 AFB [1. 2.]; cui si addatur rectangulum AF, CB fiet totum AFC.

PROP. XXVII. COMM. 48. LEM. 8.

In secundum Epitagma ejusdem primi Problematis.

“ SIT rectangulum ADC aequale rectangulo EDB, fitque
 “ punctum F inter D et C, et utrisque AE, CB aequalis po-
 “ natur recta G. Rectangulum EFB excedet rectangulum
 “ AFC rectangulo G, DF.”

Quoniam enim rectangulum G, DC aequale est rectangulo BCE, per partem secundam Prop. 21. commune auferatur rectangulum G, FC; reliquum igitur rectangulum G, DF est excessus quo ECB rectangulum excedit ipsum G, FC. Quo autem rectangulum ECB excedit rectangulum G, FC, communi ablato rectangulo FCB, eodem rectangulum EF, CB excedit rectangulum AE, FC. Et quo rectangulum EF, CB excedit rectangulum AE, FC, addito communi rectangulo EFC, eodem rectangulum EFB excedit rectangulum AFC. Rectangulum igitur EFB excedit ipsum AFC rectangulo G, DF.

“ Si vero fumatur punctum F inter D et E, reliquis manentibus, rectangulum AFC excedet rectangulum EFB rectangulo G, DF. Hoc autem demonstratur iisdem verbis quibus ipsa Propositio, mutatis notis alphabeticis ut in figura.

$$\begin{array}{ccccccc} A & E & D & F & C & & B \\ \hline & & & & & & \\ G & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

A E F D C B

G

COR. Hinc si fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo EDB, et inter E, C fumatur punctum F faciens rectangulum AFC majus rectangulo EFB, erit punctum F inter puncta E, D.

Si vero inter E, C fumatur punctum F faciens rectangulum AFC minus rectangulo EFB, erit punctum F inter D, C puncta."

B C F D E A

PROP. XXVIII. COMM. 49. LEM. 9.

"SED sit punctum F inter C, B; " reliquis ut in praecedente manentibus." Erit rectangulum AFC una cum rectangulo BFE aequale rectangulo G, DF."

Quoniam enim rectangulum G, DC aequale est rectangulo BCE, commune addatur rectangulum G, CF; totum igitur G, DF est aequale rectangulo BCE una cum ipso G, CF, hoc est una cum rectangulo AE, CF et rectangulo BCF. Rectangulum autem ECB una cum ipso BCF est totum rectangulum EF,

A E D C F B

G

CB. Ergo rectangulum EF, CB una cum ipso AE, CF est aequale rectangulo G, DF. Sed rectangulum quidem EF, CB est aequale rectangulis EFC, BFE simul [1. 2.]; rectangulum autem EFC una cum ipso AE, CF est totum rectangulum AFC. Rectangulum igitur AFC una cum ipso BFE est aequale rectangulo G, DF.

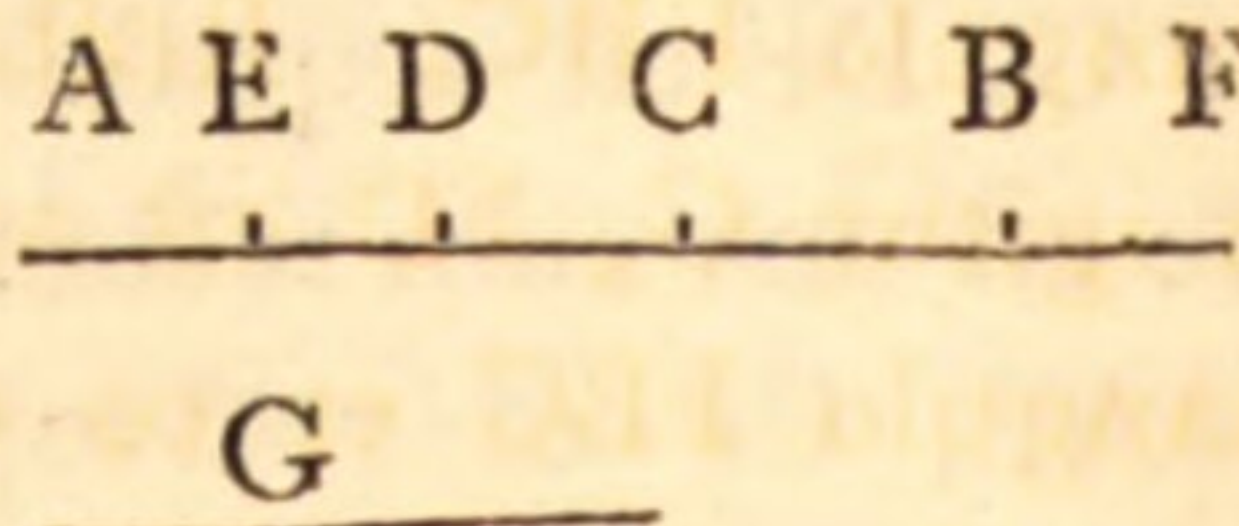
COR. Ex hac et Prop. 27. sequitur, Si fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo EDB, existente puncto D inter E, C puncta, et fumatur inter D, B punctum F faciens rectangulum G, DF minus ipso EFB, erit F inter puncta D, C. Si vero fumatur punctum F faciens rectangulum G, DF majus ipso EFB, erit F inter C, B puncta.

PROP. XXIX. COMM. 50. LEM. 10.

In secundum Epitagma tertii Problematis.

“SIT punctum F extra rectam AB, reliquis manentibus;”
 “Dico rectangulum AFC excedere rectangulum EFB rectan-
 “lo G, DF.”

Quoniam enim rectangulum G, DB est aequale rectangulo ABC “per partem tertiam Prop. 21.” commune apponatur rectangulum G, BF, totum igitur rectangulum G, DF est aequale rectangulo ABC una cum ipso G, BF, hoc est una cum rectan-



gulo AE, BF et rectangulo CBF. Rectangulum autem ABC una cum ipso CBF est totum rectangulum AF, CB. Ergo rectangulum AF, CB una cum ipso AE, BF est aequale rectangulo G, DF. Sed rectangulum AF, CB una cum ipso AE, BF est excessus quo rectangulum AFC excedit rectangulum EFB^a. Rectangulum igitur AFC excedit rectangulum EFB rectangulo G, DF. Q. E. D.

^a Est enim rectangulum EFB una cum ipso AE, BF aequale rectangulo AFB, cui si addatur rectangulum AF, CB, fiet rectangulum AFC.

PROP. XXX. COMM. 51. LEM. 11.

In tertium Epitagma primi Problematis.

“ SIT rectangulum ADC rectangulo BDE aequale; et exceſ-
 “ fui rectarum AE, BC aequalis ponatur “ recta” G; suma-
 “ turque punctum F inter ipſa E, B. Rectangulum AFC ex-
 “ cedit rectangulum EFB rectangulo G, DF.”

Quoniam enim rectangulum G, BD eſt aequale rectangulo ABC, per tertiam partem Prop. 22. commune apponatur rectangulum G, BF, totum igitur G, FD aequale eſt rectangulo ABC una cum rectangulo G, BF, hoc eſt una cum rectangulo quod exceſſu ipſarum AE, BC et recta BF continetur. Sed rectangulum ABC eſt id quod continetur AF, BC una cum rectangulo FBC. Rectangulum igitur G, FD eſt aequale rectangulo AF, BC una cum rectangulo FBC et eo quod exceſſu ipſarum AE, BC et BF continetur. Rectangulum autem CBF una cum eo quod exceſſu ipſarum AE, BC et BF continetur totum eſt rectangulum AE, BF. Ergo rectangulum G, FD eſt aequale rectangulo AF, BC una cum ipſo AE, BF. Sed rectangulum AF, BC una cum ipſo AE, BF eſt exceſſus quo rectangulum AFC excedit rectangulum EFB^a. Rectangulum igitur AFC excedit rectangulum EFB rectangulo G, FD. Q. E. D.

^a Eſt enim rectangulum EFB una cum ipſo AE, BF aequale rectangulo AFB, cui ſi addatur rectangulum AF, BC fiet rectangulum AFC.

“ IDEM magis perspicue.

Fiat GE aequalis ipsi BC; est igitur AG excessus ipsarum AE, BC, quare per tertiam partem Prop. 22. rectangulum AG, BD aequale est rectangulo ABC; est vero rectangulum GE, BD aequale ipsi DBC; ergo totum AE, BD rectangulum est aequale ipsis ABC, DBC simul, hoc est rectangulo AD, BC. Commune apponatur rectangulum AE, FB una cum ipso EFB, quae simul aequalia sunt rectangulo AFB; totum igitur, rectangulum scilicet AE, FD una cum ipso EFB aequale erit (toti, rectangulo scilicet AD, BC una cum ipso AFB, hoc est rectangulis DF, BC; AF, BC; AFB; hoc est) ipsis DF, BC; AFC; quorum rectangulum GE, DF aequale est ipsi BC, DF. Reliquum igitur AG, DF una cum ipso EFB aequale est reliquo rectangulo AFC.”

A G E FB C D

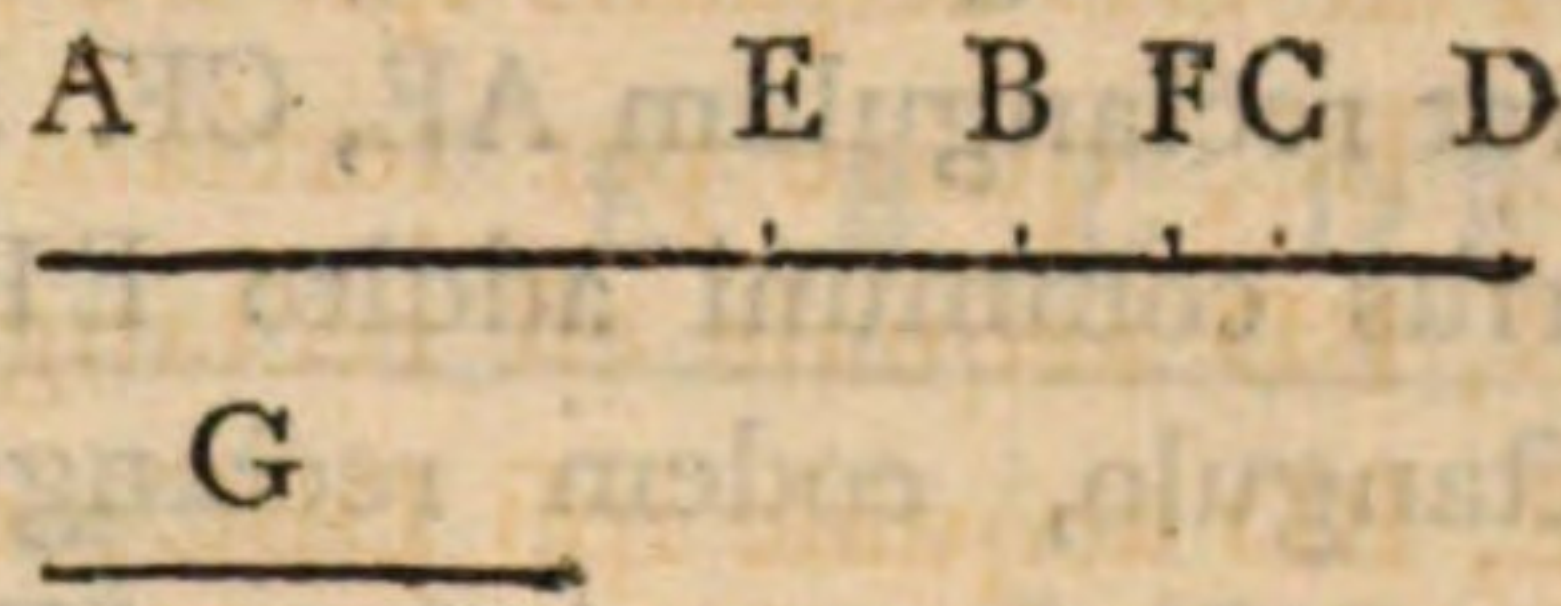
PROP. XXXI. COMM. 52. LEM. 12.

In primum Epitagma secundi Problematis.

“ Iisdem positis, sit punctum F inter B, C. Erit rectangulum AFC una cum rectangulo EFB aequale rectangulo G, FD.”

Quoniam enim rectangulum G, CD aequale est rectangulo ECB, per partem secundam Prop. 22. commune apponatur rectangulum G, FC, totum igitur G, FD est aequale rectangulo ECB et ipsi G, FC. Sed rectangulum quidem G, FC est id quod excessu ipsarum AE, BC et ipsa FC continetur. Rect-

angulum autem ECB est rectangulum BCF una cum ipso EF, BC. Ergo rectangulum G, FD aequale est rectangulo EF, BC ipsique BCF et ei quod excessu ipsarum AE, BC et ipsa FC continetur. Rectangulum vero contentum excessu ipsarum AE, BC et ipsa FC una cum rectangulo BCF est totum rectangulum AE, FC. Rectangulum igitur G, FD aequale est rectangulo AE, FC una cum ipso EF, BC. At rectangulum quidem EF, BC est rectangulum EFC una cum ipso EFB; rectangulum autem EFC una cum ipso AE, FC est totum rectangulum AFC. Sed habebamus etiam rectangulum EFB. Rectangulum igitur AFC una cum rectangulo EFB aequale est rectangulo G, FD. Q. E. D.

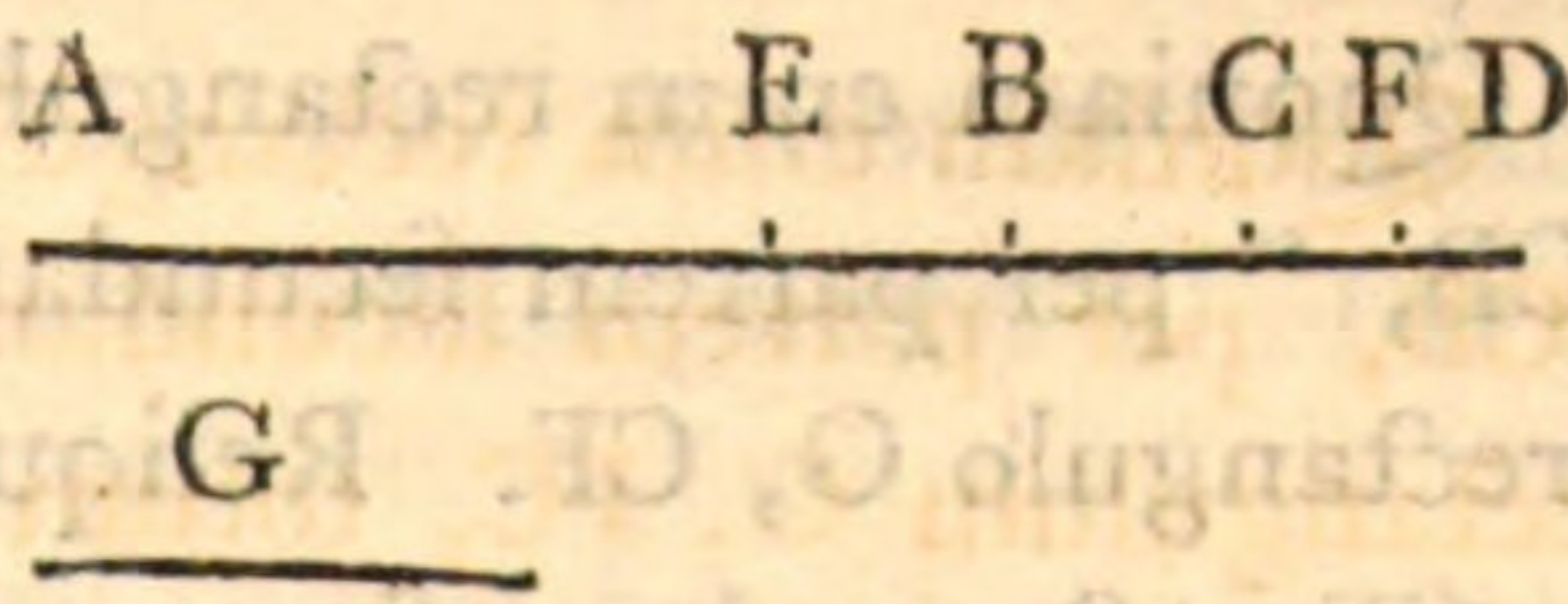


PROP. XXXII. COMM. 53. LEM. 13.

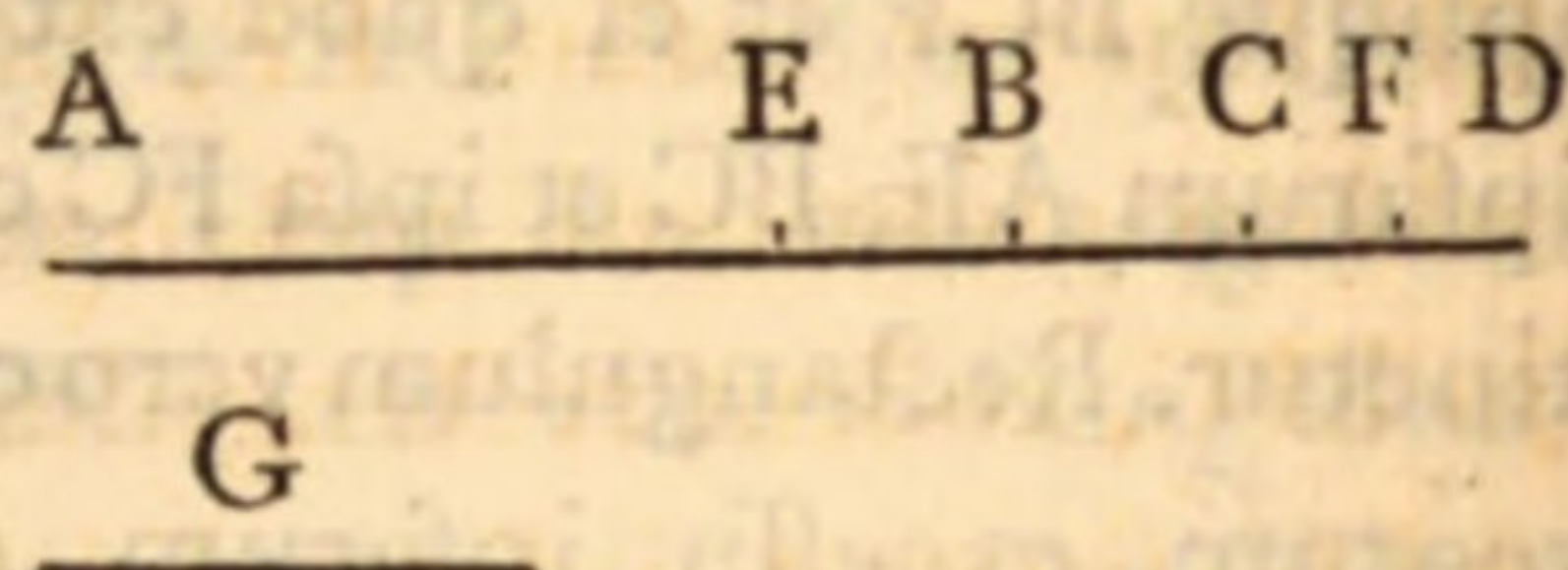
In tertium Epitagma tertii Problematis.

“SIT rursus punctum F inter C, D” reliquis ut in Prop. 30. “manentibus.” Erit rectangulum AFC minus quam rectangulum EFB, rectangulo G, FD.”

Quoniam enim rectangulum G, CD est aequale rectangulo ECB, commune auferatur G, CF rectangulum, reliquum igitur G, FD est excessus quo rectangulum ECB superat rectangulum G, CF, hoc est id quod excessu ipsarum AE, BC et ipsa CF continetur. Quo autem



rectangulum ECB superat rectangulum contentum excessu ipsarum AE, CB et CF, addito communi rectangulo FCB, eodem rectangulum EF, CB superat rectangulum AE, CF. Et rursus communi addito EFC rectangulo, eodem rectangulum EFB superat ipsum AFC. Ergo rectangulum AFC minus est quam rectangulum EFB, rectangulo G, FD.



COR. Ex hac et Prop. 31. sequitur, si fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE, existente puncto D in AC producta, et fumatur inter B et D punctum F faciens rectangulum G, DF majus ipso EFB, erit punctum F inter B, C puncta. Si vero fumatur punctum F faciens rectangulum G, DF minus ipso EFB, erit F inter puncta C, D.

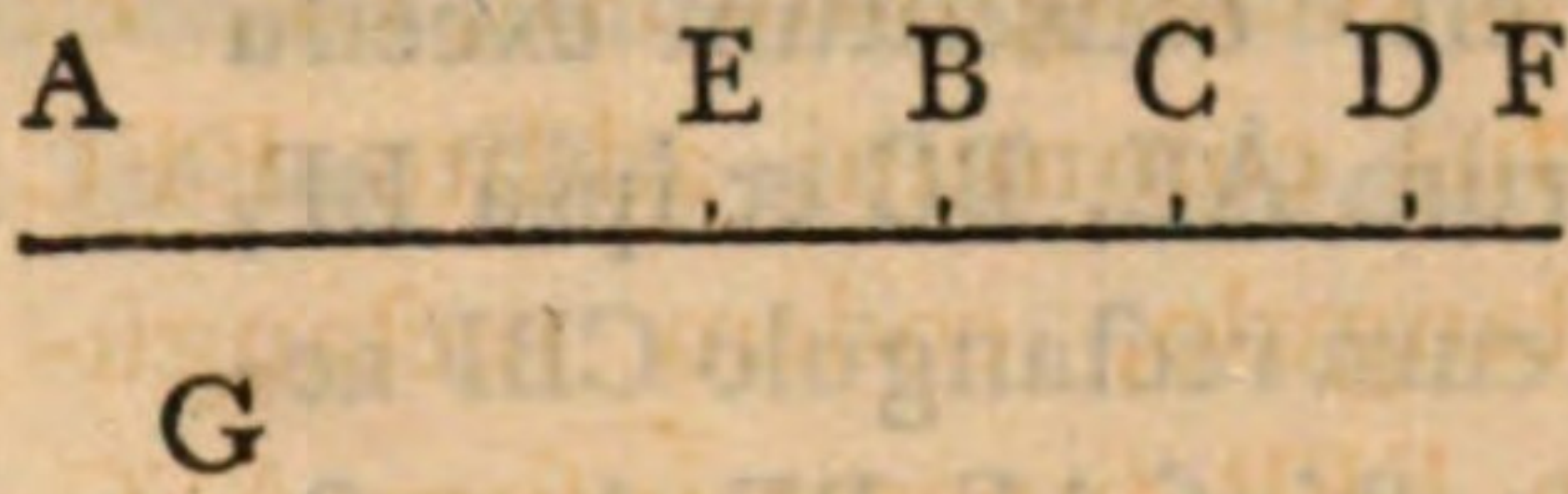
PROP. XXXIII. COMM. 54. LEM. 14.

In tertium Epitagma tertii Problematis.

“SED sit punctum F extra “ rectam AD ad partes ipsius D, “ reliquis manentibus.” Erit rectangulum AFC majus rectangulo EFB rectangulo G, DF.”

Quoniam enim rectangulum G, CD est aequale rectangulo ECB, “ per partem secundam Prop. 22.” utraque auferantur a rectangulo G, CF. Reliquum igitur G, DF est excessus quo G, CF rectangulum superat ipsum ECB, et communi addito rectangulo BCF, eodem excessu rectangulum AE, CF superat

ipsum EF, BC; etenim excessus ipsarum AE, BC una cum BC aequalis est ipsi AE. Quo autem rursus rectangulum AE, CF superat ipsum EF, BC, addito communi rectangulo EFC, eodem rectangulum AFC superat ipsum EFB. Rectangulum igitur AFC superat rectangulum EFB rectangulo G, DF.



“COR. Ex Propp. 32. et 33. sequitur si fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE, existente puncto D in AC producta, et in eadem AC producta sumatur punctum F faciens rectangulum AFC majus rectangulo EFB; erit punctum F in CD producta. Si vero sumatur punctum F in AC producta faciens AFC rectangulum minus rectangulo EFB, erit punctum F inter C et D.

PROP. XXXIV. COMM. 55. LEM. 15.

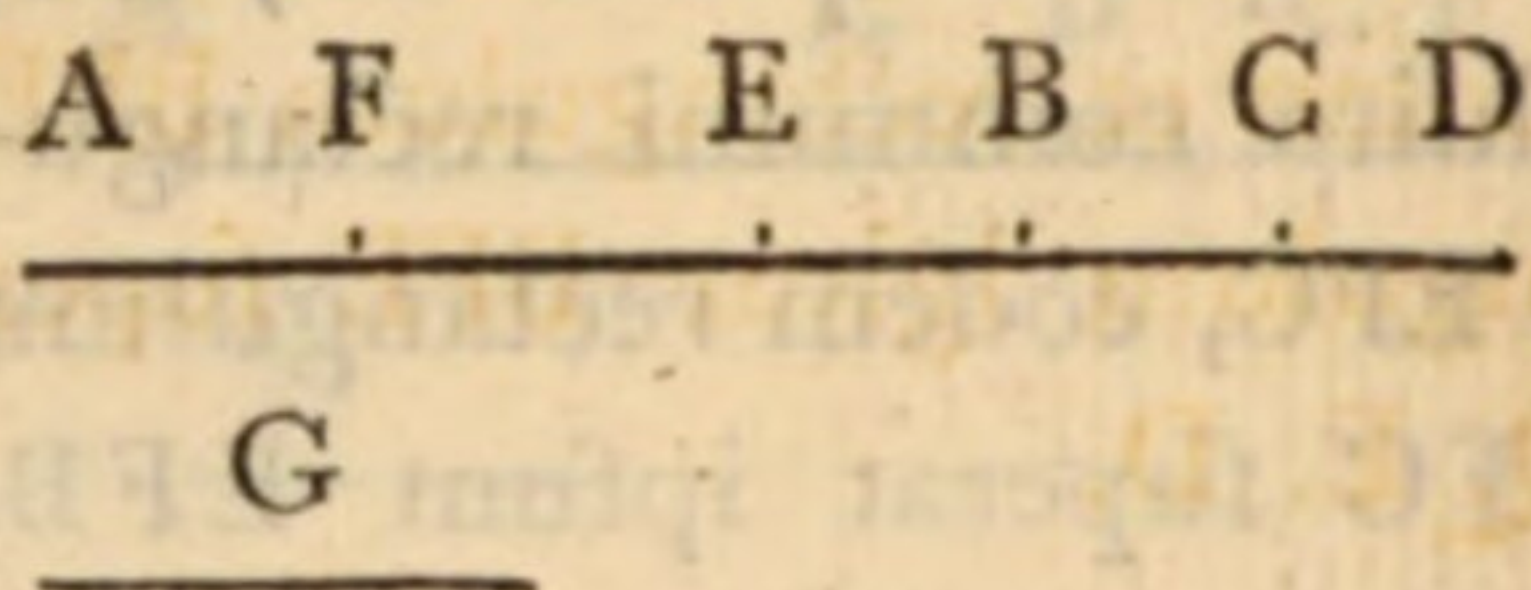
In primum Epitagma secundi Problematis.^a

“SIT punctum F inter A et E, “reliquis manentibus.” Erit rectangulum AFC una cum ipso EFB aequale rectangulo G, FD.”

Quoniam enim rectangulum G, BD aequale est rectangulo ABC, “per partem tertiam Prop. 22.” commune addatur rectangulum G, BF; totum igitur rectangulum G, FD est

^a Ita restituendum fuit, nam in codicibus Graecis scriptum est, In tertium Epitagma tertii Problematis. Ratio mutationis patebit ex Propp. Lib. 2. de Sectione Determinata.

aequale rectangulis ABC, G, BF simul. Sed rectangulum quidem ABC aequale est rectangulo AF, BC una cum ipso FBC; rectangulum vero "G, BF, hoc est" contentum excessu ipsarum AE, BC et ipsâ BF, una cum rectangulo CBF aequale est ipsi AE, BF. At rectangulum quidem AE, BF est rectangulum BFE una cum ipso AFB; quod quidem AFB una cum ipso AF, BC est rectangulum AFC; rectangulum igitur AFC una cum ipso BFE aequale est rectangulo G, FD. Q. E. D.

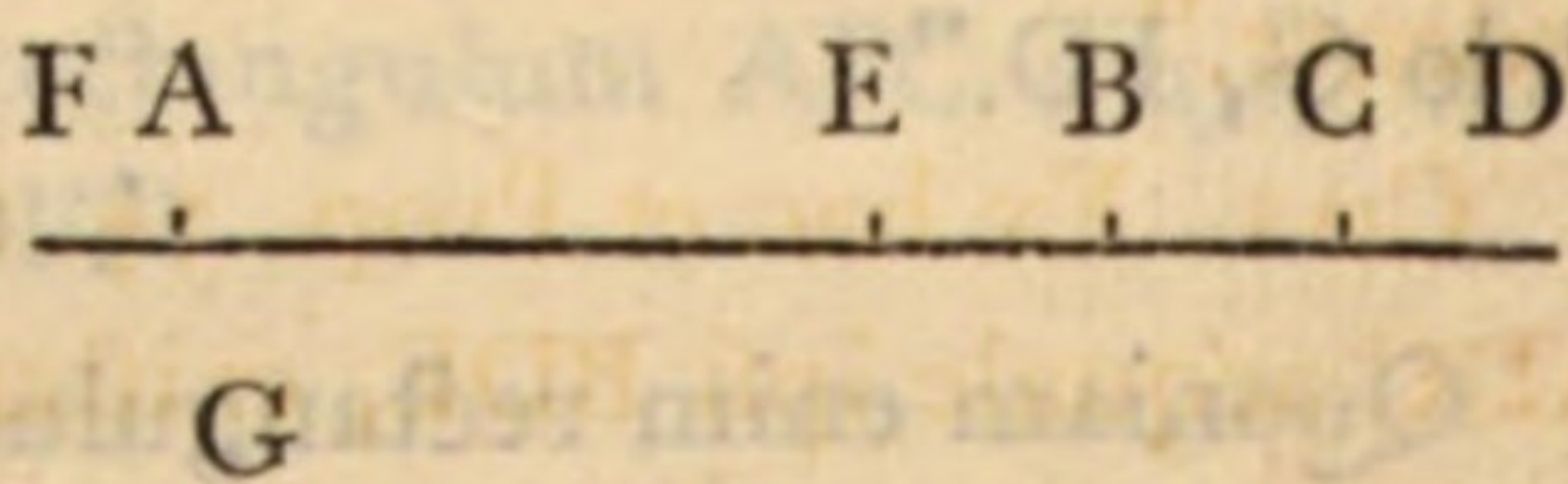


PROP. XXXV. COMM. 56. LEM. 16.

In tertium Epitagma tertii Problematis.

“ SIT rursus punctum F extra rectam “ AD ad partes ipsius
 “ A, reliquis manentibus ;” erit rectangulum AFC minus
 “ rectangulo EFB, rectangulo G, FD.”

Quoniam enim rectangulum G, AD est aequale rectangulo BAE, “per partem primam Prop. 22.” commune apponatur rectangulum G, AF, totum igitur rectangulum G, DF est aequale rectangulo BAE et rectangulo contento excessu ipsarum AE, BC et ipsâ AF, hoc est rectangulo FB, AE dempto rectangulo FA, BC^a.



* Graecus codex quo Commandinus utebatur, ut et codex regius habent τὸ ὑπὸ ΖΒ, ΑΕ. λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΒΓ. Quae corrupta et manca esse existimat

Rectangulum igitur G, DF est excessus quo rectangulum FB, AE superat ipsum FA, BC. Sed quo rectangulum FB, AE superat rectangulum FA, BC, addito communi rectangulo BFA, eodem et rectangulum BFE superat rectangulum CFA. Rectangulum igitur BFE superat ipsum CFA rectangulo G, DF. Q. E. D.

“ A L I T E R.

Fiat GE aequalis ipsi BC; est igitur AG excessus ipsarum AE, BC. Et quoniam, “ per primam partem Prop. 22.” rectangulum GAD est aequale rectangulo BAE, commune apponatur rectangulum GAF, totum igitur rectangulum AG, FD est aequale rectan-

FA G E B C D

gulo BAE una cum ipso GAF. Rursus apponatur commune rectangulum FA, BC, siue FA, GE; rectangulum igitur AG, FD una cum ipso FA, BC aequale est rectangulis BAE, FAE, hoc est rectangulo FB, AE. Rectangulum igitur AG, FD est excessus quo rectangulum FB, AE superat ipsum FA, BC. Sed quo, &c. ut in praecedente.”

COR. Ex hac et Prop. 34. sequitur, Si fuerit rectangulum ADC aequale ipsi BDE, existente puncto D in AC producta, et

Commandinus ad notam B in pag. 193. 6. Lib. 7. Pappi Alexandrini. Minime autem sunt, sed hisce verbis Pappus significat, nimis quidem breviter, rectangulum BAE una cum contento excessu ipsarum AE, BC et ipsâ AF aequale esse rectangulo FB, AE dempto rectangulo FA, BC. Quod quidem verum est. *Λοιπὸν* igitur hic idem est quod *λείπει* apud Diophantum.

sumatur punctum F in DE producta ad partes E faciens rectangulum G, DF majus ipso EFB, erit punctum F inter A et E. Si vero sumatur punctum F faciens rectangulum G, DF minus ipso EFB, erit F in EA producta ad partes A.

PROP. XXXVI. COMM. 57. LEM. 17.

In tertium Epitagma primi Problematis.

“SIT AB aequalis ipfi CD, et quodvis punctum E inter B, C puncta. Rectangulum AED superabit rectangulum BEC rectangulo ACD.”

Quoniam enim rectangulum AED aequale est rectangulo AEC et ipfi AE, CD, quorum rectangulum AEC rursus est aequale rectangulo BEC ipsique AB, EC; erit rectangulum AED aequale rectangulo BEC una cum rectangulo AB, EC et ipso AE, CD.

A B E C D

Rectangulum igitur AED superat rectangulum BEC et rectangulo AB, EC, hoc est ipso ECD (etenim AB, CD aequales sunt) et rectangulo AE, CD. Sed rectangulum ECD una cum ipso AE, CD est totum rectangulum ACD. Ergo rectangulum AED superat ipsum BEC rectangulo ACD. “Est haec alia demonstratio Prop. 9. hujus.”

PROP. XXXVII. COMM. 58. LEM. 18.

In primum Epitagma secundi Problematis ^a.

“SIT AB aequalis ipsi CD, et sumatur punctum E inter
 “C, D. Rectangulum AED una cum ipso BEC aequale erit
 “rectangulo ACD.”

Quoniam enim rectangulum AED est aequale rectangulo AC, ED ipsique CED simul, commune apponatur rectangulum BEC; rectangulum igitur AED una cum rectangulo BEC est aequale rectangulo AC, ED, rectanguloque CED, et rectangulo BEC. Sed rectangulum quidem CED una cum ipso BEC totum est rectangulum BD, CE, hoc est ACE, aequales enim sunt et totae rectae AC, BD; rectangulum vero AC, ED una cum ipso ACE est aequale rectangulo ACD. “Est haec alia demonstratio Prop. 2. hujus.”

A B C E D
 —————

PROP. XXXVIII. COMM. 63. LEM. 19.

Propositio haec in manuscriptis Graecis proprio suo loco excidit, atque hic ponenda est.

“SIT AB quidem aequalis CD, rectangulum autem BEC
 “rectangulo ABD majus ^b. Rectangulum BEC superabit ip-
 “sum AED rectangulo BDC.”

^a Ita legendum vice eorum quae habentur in codice Graeco, viz. “In tertium Epitagma primi Problematis.”

^b Hoc est rectangulum BEC rectangulo BDC majus, hoc est, sit punctum E in AD producta.

Quoniam enim rectangulum BEC aequale est et rectangulo BCE, et quadrato ex CE [3. 2.], hoc est et rectangulis CED, ECD [2. 2.]; rectangulum autem BCE una cum ECD rectangulo totum est rectangulum BD, CE, hoc est ACE; erit rectangulum BEC aequale rectangulo ACE una cum ipso CED. Sed rectangulum ACE aequale est et rectangulo AC, DE et rectangulo ACD; rectangulum vero AC, DE una cum ipso CED totum est AED rectangulum. Factum igitur est rectangulum BEC aequale rectangulo AED una cum ipso ACD, hoc est una cum ipso BDC. Quare BEC rectangulum superat ipsum AED rectangulo BDC. “Haec est alia demonstratio Prop. 3. hujus.”

A B C D E

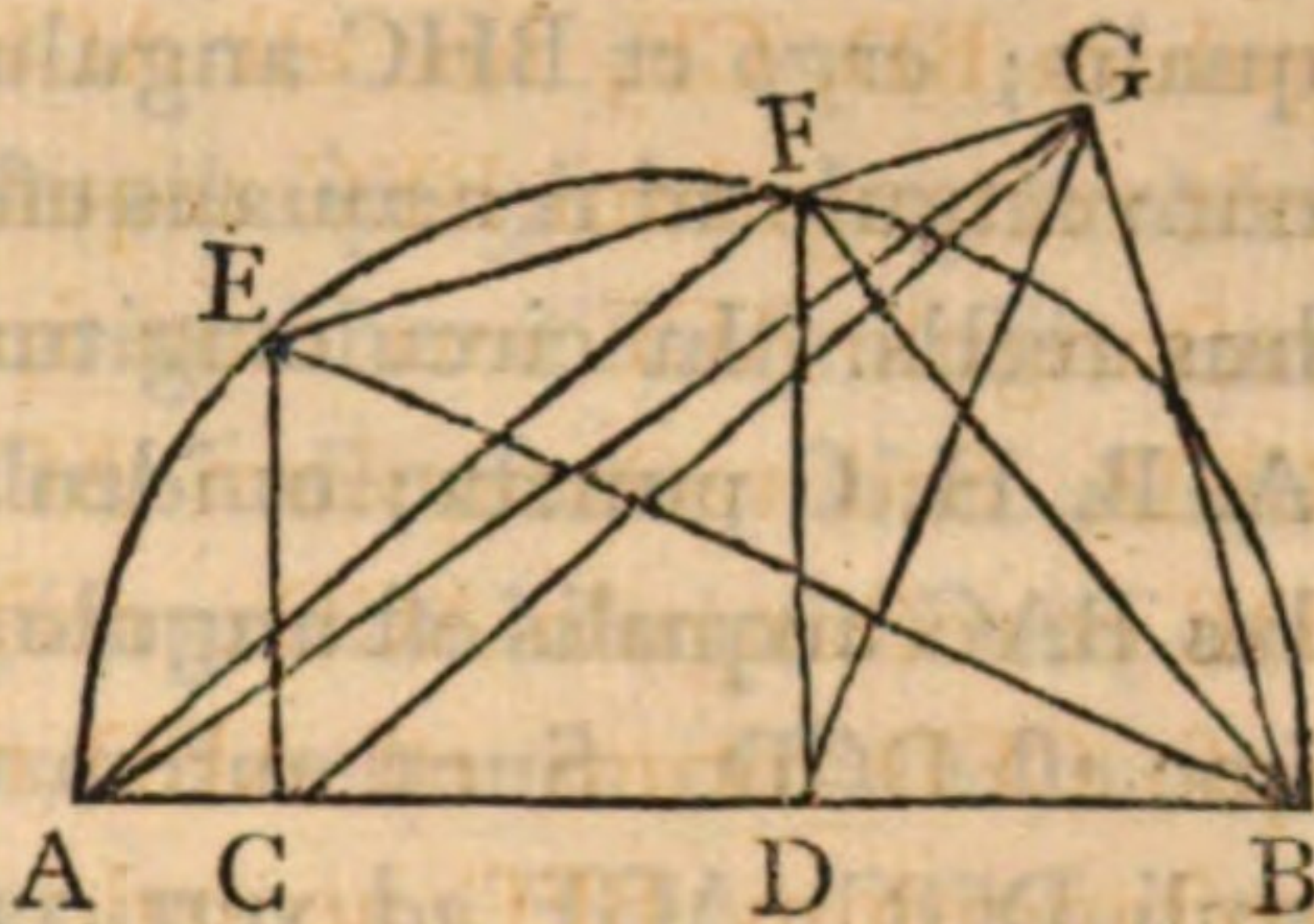
In Monachos “seu casus singulares” tertii Epitagmatis primi Problematis, et tertii tertii Problematis ^a.

P R O P. XXXIX. C O M M. 59. L E M. 20.

“In Monachum tertii Epitagmatis primi Problematis.”
 “SEMICIRCULO existente AEB, et diametro AB, existentibusque perpendicularibus CE, DF, et ductâ rectâ lineâ EFG, et ad ipsam perpendiculari BG; tria porrò fient, videlicet, rectangulum quidem CBD aequale erit quadrato ex BG; rectangulum vero AC, BD quadrato ex FG; et rectangulum AD, CB quadrato ex EG.”

^a Vice horum vitiose habentur apud Commandinum “In Monachos primi, secundi et tertii Epitagmatis.”

Jungantur enim CG, GD, FA, AG, FB. Quoniam igitur rectus est angulus AFB, et perpendicularis FD, erit [8. 6.] angulus DFB angulo BAF aequalis. Sed angulus quidem DFB est aequalis angulo DGB^b, angulus vero BAF (junctâ EB) est aequalis angulo BEF [21. 3.], hoc est angulo BCG^c. Angulus igitur DGB angulo BCG aequalis erit; et propterea rectangulum CBD est aequale quadrato ex BG [4, et 16. 3.]. Est autem totum rectangulum ABD aequale quadrato ex BF; reliquum igitur rectangulum AC, BD est aequale quadrato ex FG. Rursus quoniam rectangulum ABC aequale est quadrato ex BE, quorum rectangulum CBD est aequale quadrato ex BG, erit reliquum rectangulum AD, CB aequale quadrato ex EG. Fiunt igitur tria quae proponebantur.



PROP. XL. COMM 60. LEM. 21.

“In Monachum tertii Epitagmatis secundi Problematis.”

“SIT triangulum ABC, et ducantur AD, BE, CF sitque AD perpendicularis ad BC, et puncta A, F, G, E sint in circulo; erunt anguli ad E, F recti.”

^b Quoniam enim recti sunt anguli BDF, BGF, puncta B, D, F, G sunt in circulo. Conv. 22. 3.

^c Similiter quoniam recti sunt anguli BCE, BGE erunt puncta B, C, E, G in circulo. Ergo per 21. 3. in utroque casu.

Producatur enim AD, et ipsi GD aequalis ponatur DH, junganturque BH, HC. Aequalis igitur est angulus BHC angulo BGC, hoc est ipsi FGE. Sed angulus FGE una cum angulo ad A duobus rectis est aequalis; ergo et BHC angulus una cum angulo ad A aequalis est duobus rectis. In circulo igitur sunt A, B, H, C puncta; et ideo angulus BAG aequalis est angulo BCH, hoc est GCD. Sunt autem et anguli DGC, AGF ad verticem aequales; reliquus igitur angulus ad D reliquo ad F est aequalis. Sed angulus ad D est rectus; ergo et reliquus qui ad F. Eadem ratione et angulus qui ad E est rectus. Anguli igitur qui ad E, E puncta recti sunt. Q. E. D.



PROP. COMM. 61. LEM. 22.

Monachus tertii Epitagmatis primi Problematis.

Haec est pars demonstrationis tertii Epitagmatis primi Problematis Lib. 2. et habetur in proprio ejus loco ad finem Prop. 59. hujus.

PROP. COMM. 62. LEM. 23.

Monachus tertii Epitagmatis secundi Problematis^a.

Et haec est pars demonstrationis hujus Epitagmatis, et habetur ad finem Prop. 62. hujus.

^a Commandinus vitiose habet "tertii Problematis secundi Epitagmatis."

PROP. COMM. 64 LEM. 24.

Monachus tertii Epitagmatis tertii Problematis ^b.

Haec est pars demonstrationis hujus Epitagmatis, et habetur ad finem Prop. 65. hujus.

OBSERVANDUM est Lemmata in 5ti et 6ti Problematis Lib. 1. Epitagmata eodem ordine disposita esse quo Propositiones et Epitagmata quibus inserviunt. Non autem ita disposita sunt Lemmata in Epitagmata Libri secundi, cujus haec est ratio, viz. Tria prima Lemmata in Librum secundum, Propositiones scilicet 41. 42. 43. Lib. 7. Pappi secundum Commandini enumerationem inserviunt Propositionibus 45, 46. &c. usque ad Propositionem 57. viz. Prop. 41. inservit Propp. 45. 46. 47. Prop. 42. ipsis 48. 49. 50. et Prop. 43. ipsis 51. 52. 53. 54. 55. 56. Recte igitur dispositae sunt hae duodecim Propositiones secundum ordinem Propositionum 41. 42. 43. ex quibus dependent, non autem secundum ordinem Epitagmatum Lib. 2. quibus inserviunt.

^b Commandinus tantum habet "Monachus tertii Problematis."

LEMMATUM PAPPI ALEXANDRINI
IN LIBROS DUOS APOLLONII
DE SECTIONE DETERMINATA

F I N I S.

H

APOLLONIUPERCAE

SECTIO

DETERMINATA

PRIMUM

PROPOSITIONES

DEFINITIONES

LEMMA

PROPOSITIONES

DE SECTIONE DETERMINATA

EPITAGMA UNICUM

DATIS QUODAM PUNCTO A. II. TERTIAM INTERIUS IN RECTA

APOLLONII PERGAEI

D E

S E C T I O N E

D E T E R M I N A T A

L I B E R P R I M U S.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA I.

DATIS duobus punctis, tertium invenire in recta linea
“ quae per ea transit, quod faciet quadratum ex segmento
“ inter ipsum et alterum ex punctis datis, ad quadratum ex
“ segmento inter ipsum et reliquum punctum datum, in ra-
“ tione data.

Potest autem requiri ut punctum inveniendum sit vel in-
ter puncta data, vel extra eadem ad utraque partes; eadem
vero in utroque casu erit solutio, quare duo hi casus consti-
tuunt solummodo

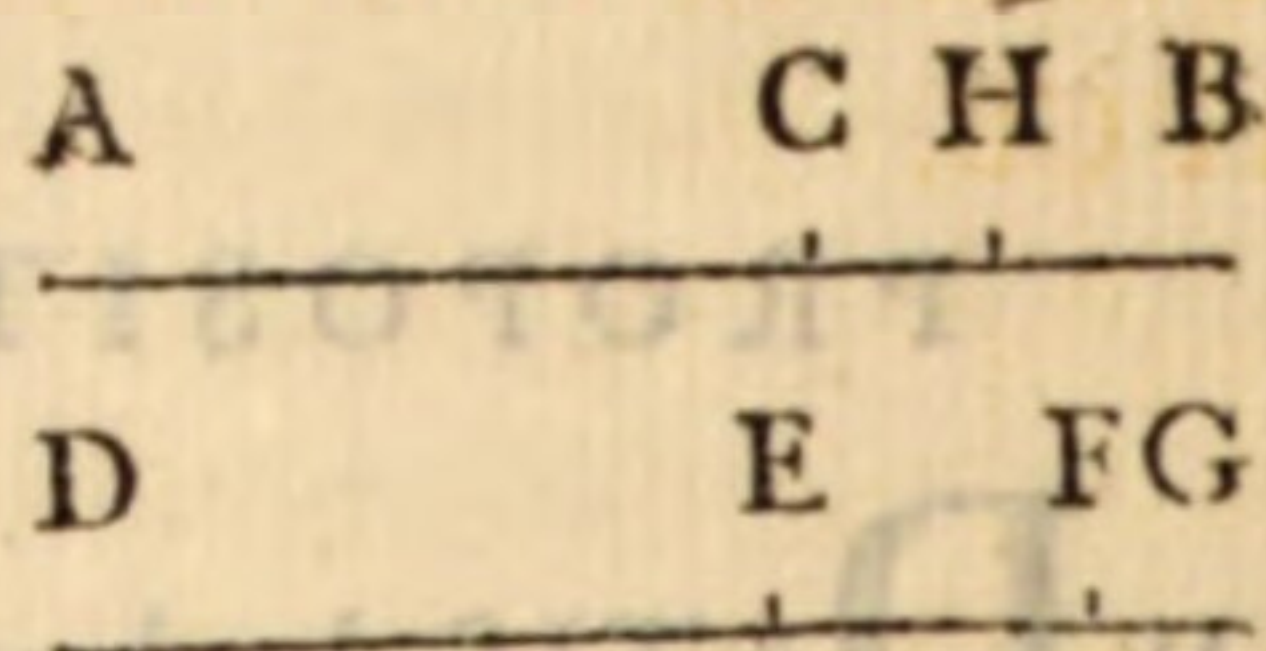
EPITAGMA UNICUM, viz.

“ DATIS duobus punctis A, B tertium invenire in recta
“ quae per ea transit, five inter puncta data, five extra ea-
“ dem, quod faciet quadratum ex AC ad quadratum ex BC
“ in ratione data.”

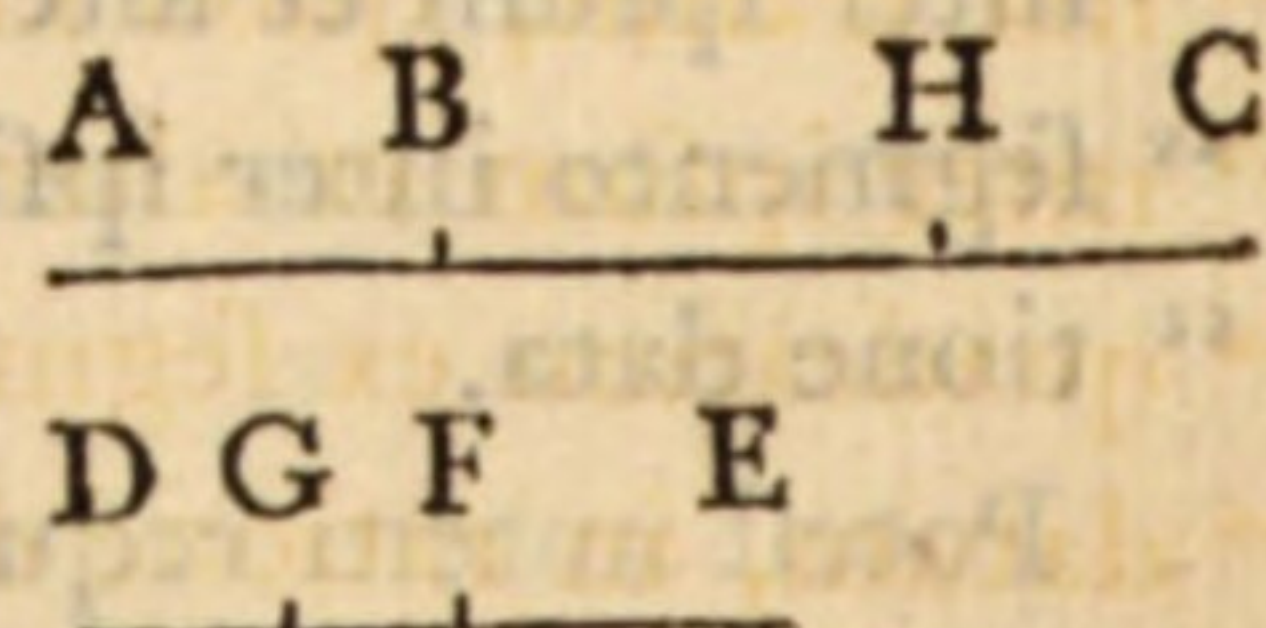
Factum puta; quoniam igitur quadratum ex AC est ad quadratum ex CB, ut recta AC ad tertiam proportionalem^a ipsis AC, CB; et data est ratio quadrati ex AC ad quadratum ex CB; data erit et ratio rectae AC ad tertiam proportionalem; igitur data^b est ratio AC ad CB, et propterea ratio AB ad BC data est; et data est AB, quare^c et BC. Punctum igitur C datum est.

Componetur ita,

Sit ratio quam quadratum ex AC habere debet ad quadratum ex CB eadem rationi datae rectae DE ad datam EF, ponatur autem EF in DE producta, si C requiratur esse inter A et B; si vero C debeat esse in AB produc-



ta, ponatur EF versus punctum D; et inter DE, EF inveniatur media proportionalis EG, quae ponatur ad easdem partes ad quas est F; et fiat ut DG ad GE, ita AB ad BC. Erit C punctum



inveniendum. Quoniam enim ut AB ad BC, ita est DG ad GE, componendo, si C sit extra, dividendo vero, si fuerit inter puncta data, erit ut AC ad CB, ita DE ad EG. Igitur^d quadratum ex AC est ad quadratum ex CB, ut quadratum ex DE ad quadratum ex EG, hoc est^a ut recta DE ad ipsam EF, proportionales enim sunt DE, EG,

N. B. Citationes Datorum fiunt ex editione nostra, quae Glasguae impressa est anno 1762.

EF. Quadratum igitur ex AC est ad quadratum ex CB, in data ratione quam habet recta DE ad ipsam EF.

In utroque autem casu puncta ipsi B propiora majores faciunt rationes quam puncta remotiora; quod quidem, si puncta fuerint inter A et B, manifestum est; in casu vero altero ita ostenditur. Sit punctum C extra puncta A, B, punctum vero H propius sit puncto B quam est punctum C, ad easdem tamen partes ipsius B. Est igitur ratio AB ad BH, major ratione AB ad BC, et componendo, ratio AH ad HB, major est ratione AC ad CB; ergo et ratio quadrati ex AH ad quadratum ex HB, major est ratione quadrati ex AC ad illud ex CB.

PROB. II.

“DATIS duobus punctis tertium invenire in recta quae per
“illa transit, quod faciet rectangulum contentum segmento
“inter ipsum et alterum ex punctis datis, et data recta, ad
“quadratum ex segmento inter ipsum et reliquum punctum
“datum, in ratione data.”

PROP. XLII. PROB. II. EPITAGMA I.

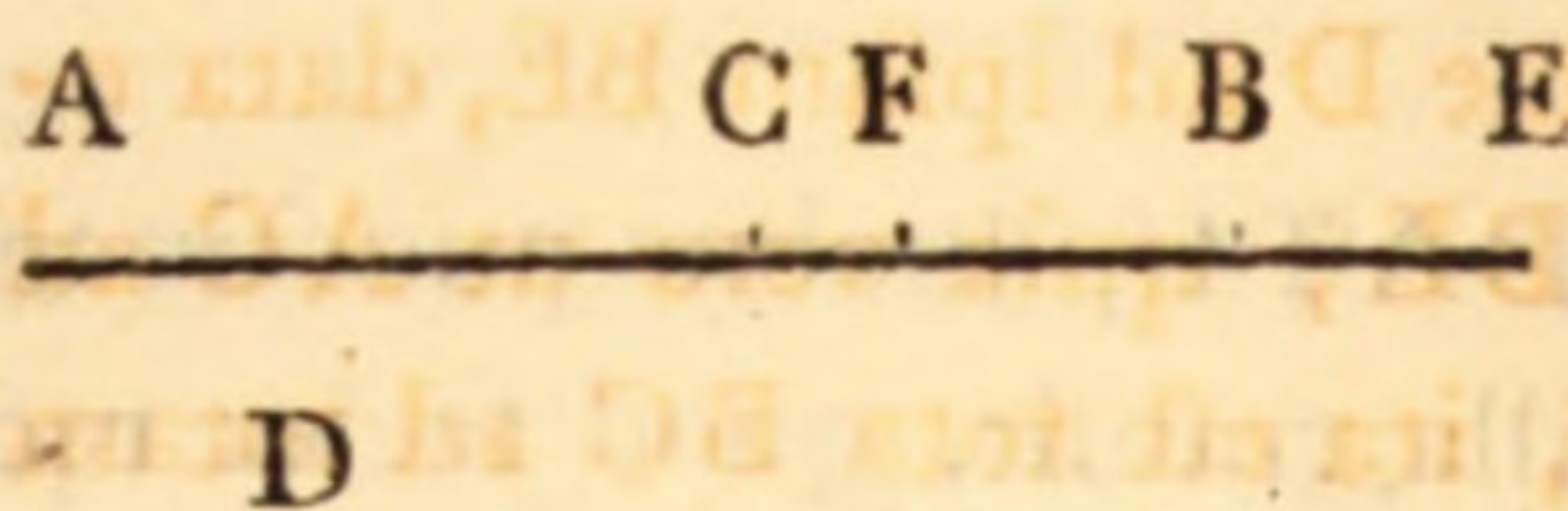
“DATIS duobus punctis A, B tertium C invenire in recta
“quae per ea transit, inter puncta data, quod faciet rectan-
“gulum contentum AC inter ipsum et utrumlibet ex punc-
“tis datis, et datâ rectâ D, ad quadratum ex reliquo segmen-
“to CB in ratione data.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum AC, D ad quadratum ex CB in ratione data. Erit igitur, per 63. Dat. AC ad

CB, ut CB ad eam ad quam habet recta D rationem datam, quam scilicet rectangulum AC, D habet ad quadratum ex CB. Sit ea BE quae data erit propter D datam. Quoniam igitur est AC ad CB, ut CB ad BE, erit, componendo, AB ad BC, ut CE ad EB; quare rectangulum ABE aequale est ipsi BCE. Datum autem est ABE, datum igitur est rectangulum BCE; ^a 85. Dat. et data est recta BE, quare datae ^a sunt BC, CE, datumque erit punctum C. Indeterminatum autem est Problema.

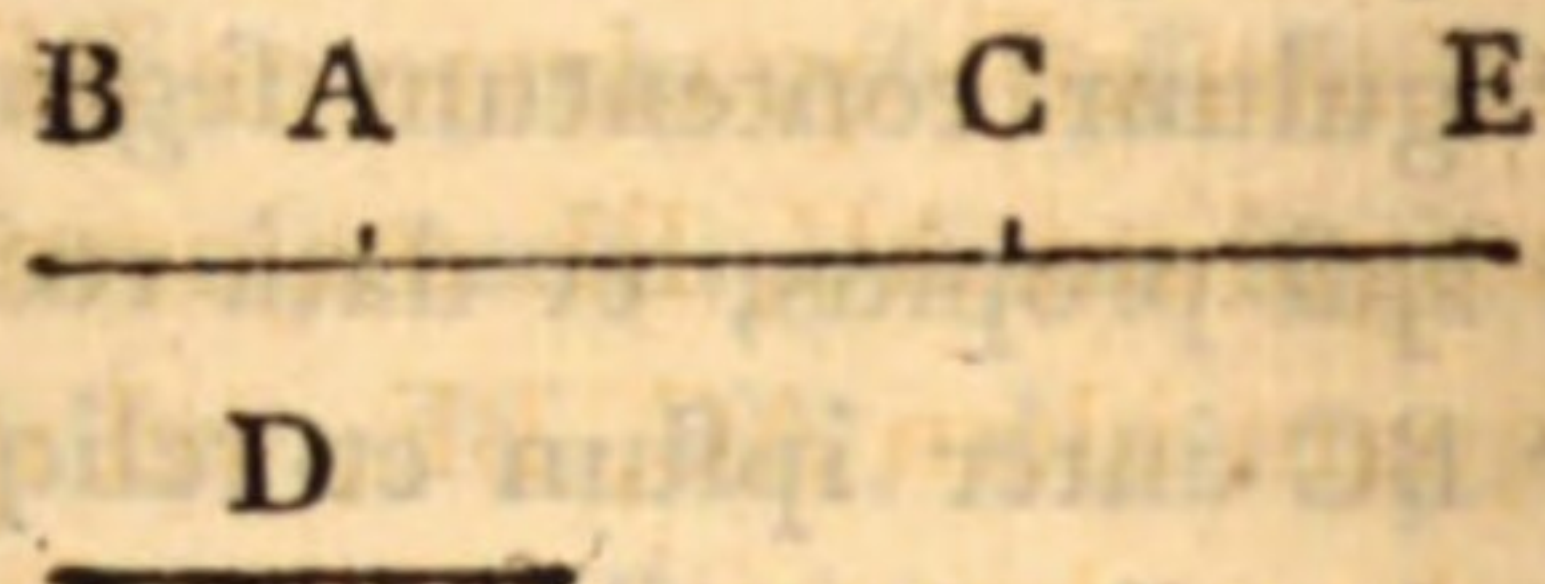
Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae D ad ipsam BE quae ponatur in AB ^b 29. 6. producta ad partes B. Et ad rectam BE applicetur ^b rectangulum aequale ipsi ABE excedens quadrato. Sitque C illud applicationis punctum quod est in EB producta ad partes B; erit C punctum inveniendum.



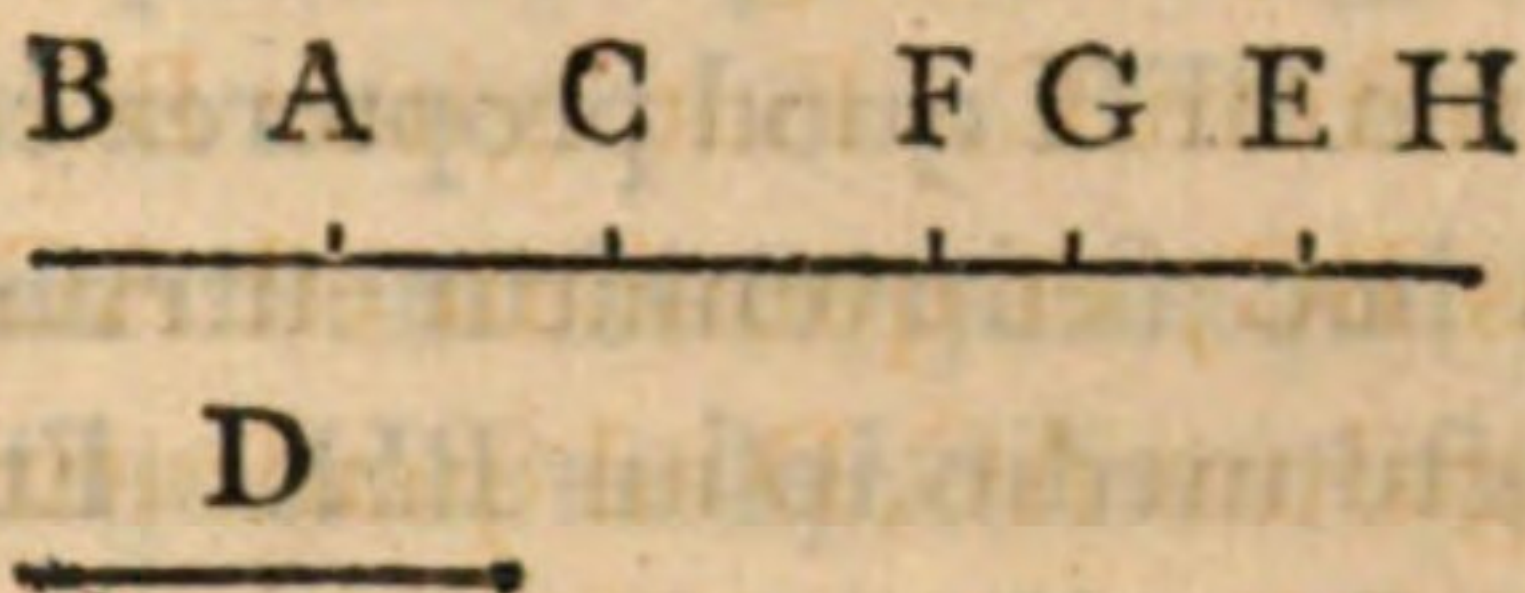
Quoniam enim, ex constructione, rectangulum BCE aequale est ipsi ABE, erit AB ad BC, ut CE ad EB. Est autem CE major EB, igitur AB major BC, et propterea cadet punctum C inter A, B puncta. Et propter praedictam proportionem, et dividendo, erit AC ad CB, ut CB ad BE; quare rectangulum AC, BE aequale est quadrato ex CB. Est igitur rectangulum AC, D ad quadratum ex CB, five rectangulum AC, BE, ut recta D ad ipsam BE. Patet autem puncta, ut F, remotiora a puncto A facere majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora ut C.

Ratio autem rectanguli ad quadratum, five ratio datae rectae D ad quaesitam BE, et punctum C quae hoc efficient, ita invenientur. Quoniam requiritur ut aequales sint BC, CE, et ex prius ostensis debet esse ut AC ad CB, ita CB ad BE; et est BE dupla ipsius BC, erit BC dupla ipsius BA. Data autem est BA, data igitur est BC, et punctum C. Fiat igitur BC dupla ipsius BA, et BE dupla ipsius BC; et quoniam est AC ad CB, ut CB ad BE; erit rectangulum AC, D ad quadratum ex CB, hoc est ad rectangulum AC, BE, ut D ad BE. Ratio autem ipsius D ad BE ea est quam habet D ad quadruplam rectae BA.



Inquirendum autem est an punctum C faciat maiorem vel minorem rationem rectanguli ad quadratum, quovis alio puncto in BA producta ad partes A. Manentibus igitur jam descriptis, fit aliud quodvis punctum F, quod primò fit inter A et E. Comparanda igitur est ratio rectanguli AC, D ad quadratum ex BC, cum ratione rectanguli AF, D ad quadratum ex BE. Et permutando, et per 1. 6. comparanda venit ratio rectae AC ad rectam AF, hoc est ratio rectanguli AC, BE ad ipsum AF, BE, cum ratione quadrati ex BC ad quadratum ex BE. Quia vero proportionales ostensae sunt AC, CB, BE, rectangulum AC, BE aequale est quadrato ex BC; igitur comparandum est rectangulum AF, BE cum quadrato ex BE. Et ablati utrisque ex rectangulo FBE, comparandum est reliquum rectangulum ABE cum reliquo BFE. Est autem rectangulum ABE aequale quadrato ex BC quod majus^d est rectangulo BFE, quia recta BE bifariam secta est in C. Ablato

igitur rectangulo ABE, et ipso BFE ex rectangulo FBE, erit reliquum rectangulum AF, BE minus reliquo, quadrato scilicet ex BF. Si autem punctum F cadat in ipsum E, vel fuerit in BE producta ultra E, manifestum est rectangulum AF, BE minus esse quadrato ex BF. Igitur, in quocunque casu, rectangulum AC, BE majorem habet rationem ad ipsum AF, BE quam idem AC, BE, vel ipsi aequale quadratum ex BC habet ad quadratum ex BF. Quare per 1. 6. et permutando, rectangulum AC, D majorem rationem habet ad quadratum ex BC, quam rectangulum AF, D habet ad quadratum ex BF. Punctum igitur C facit maximam rationem rectanguli ad quadratum, quae quidem ostensa est eadem rationi rectae D ad quadruplum ipsius BA.



Praeterea puncta, ut F, ipsi C propiora ad utrasvis ipsius C partes, faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora ad easdem partes puncti C, ut G.

Fiat enim ut AF ad FB, ita FB ad quartam BH. Est igitur rectangulum AF, D ad quadratum ex FB (five rectangulum AF, BH) ut recta D ad ipsam BH. Rectangulum vero AC, D ostensum fuit ad quadratum ex BC, ut D ad BE. Igitur ex praemissis ratio D ad BE, major est ratione D ad BH, et propterea recta BH major est ipsa BE. Quoniam vero est AF ad FB, ut tota FB ad totam BH, erit reliqua BA ad reliquam FH, ut FB ad BH; rectangulum igitur ABH aequale est ipsi BFH.

Comparanda autem proponitur ratio rectanguli AF, D ad quadratum ex BF, cum ratione rectanguli AG, D ad quadra-

tum ex BG. Et permutando, et per 1. 6. comparanda est ratio rectae AF ad ipsam AG, hoc est ratio rectanguli AF, BH ad ipsum AG, BH, cum ratione quadrati ex BF ad quadratum ex BG. Rectangulum autem AF, BH aequale est quadrato ex BF; comparandum igitur est rectangulum AG, BH cum quadrato ex BG. Et ablato utroque ex rectangulo GBH, comparandum est reliquum rectangulum ABH cum reliquo rectangulo BGH. Est autem ABH rectangulum aequale rectangulo BFH quod propterea comparandum est cum ipso BGH. Fiet hoc si inveniatur utrum punctum F an G propius sit puncto medio ipsius BH. Et primò inveniatur utrum punctum C an F puncto isto medio sit propius, hoc est con-

B A C F G E H

feratur rectangulum BCH

(cum ipso BFH, hoc est) cum

D

rectangulo ABH. Et ablato

utroque ex rectangulo CBH, conferatur reliquum, quadratum scilicet ex BC cum reliquo rectangulo AC, BH. Est vero quadratum ex BC aequale rectangulo AC, BE, quod propterea cum rectangulo AC, BH comparandum est. Minor autem est recta BE ipsâ BH, ut prius ostensum, igitur rectangulum AC, BE, hoc est quadratum ex BC minus est rectangulo AC, BH; quorum utroque ex rectangulo CBH ablato, reliquum, rectangulum scilicet BCH majus est reliquo rectangulo ABH, hoc est BFH. Punctum igitur C propius est medio puncto ipsius BH quam punctum F,* et F quam G, quia, ex hypothefi, F propius est puncto C quam est punctum G, et ad easdem ipsius C partes. Igitur rectangulum BFH, hoc est ABH majus est ipso BGH; et ablato utroque ex rectangulo GBH, reliquum,

rectangulum scilicet AG, BH minus est reliquo, quadrato scilicet ex BG. Quare rectangulum AF, BH majorem habet rationem ad ipsum AG, BH, quam idem AF, BH, hoc est quadratum ex BF habet ad quadratum ex BG. Et per 1. 6. rectangulum AF, D ad ipsum AG, D majorem habet rationem quam quadratum ex BF ad quadratum ex BG; et permutando.

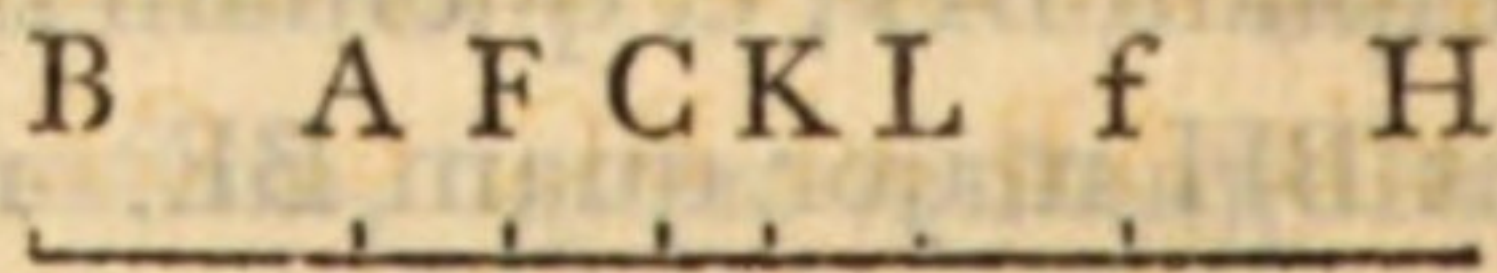
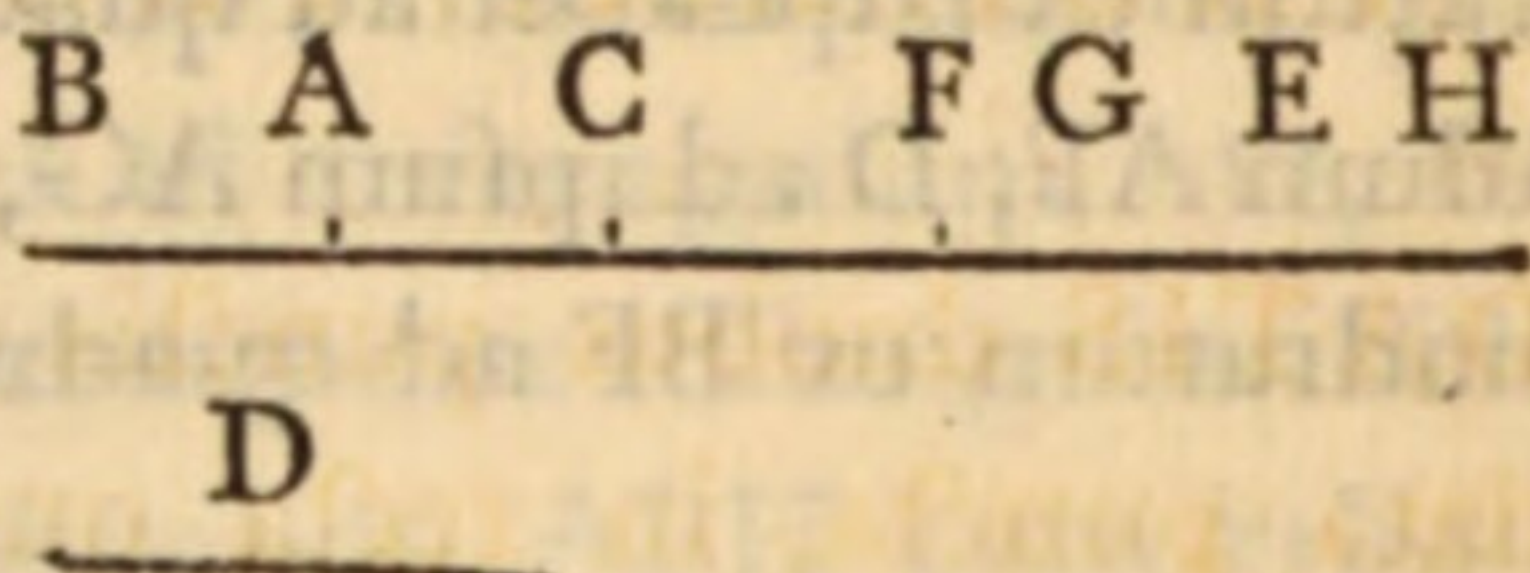
Componetur vero Problema primo propositum ita,

Sint B, A puncta data, et data recta sit D, juxtâque BA, in ipsa producta ad eas partes ad quas inveniendum est punctum, puta ad partes ipsius A, fumatur AC ipsi BA aequalis, et CE aequalis rectae BC. Si igitur ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum, eadem fuerit rationi rectae D ad quadruplum rectae BA, hoc est ad ipsam BE, punctum C idque solum Problema solvit, ut in praemissis ostensum est. Si vero ratio data non eadem sit rationi rectae D ad ipsam BE, erit hac necessariò minor, quoniam ostensum fuit rationem D ad BE maximam esse. Sit igitur ratio data eadem rationi rectae D ad ipsam BH; et quoniam ratio haec minor est rationi D ad BE, erit BH major quam BE. rectangulum igitur AC, BH majus est (ipso AC, BE, hoc est) quadrato ex BC; quorum utroque ablato ex rectangulo CBH, erit reliquum ABH minus reliquo rectangulo BCH. Rectangulum autem BCH minus est quadrato ex dimidio ipsius BH, quia punctum C quod ipsam BE bifariam secat, non secat bifariam rectam BH. Multo igitur rectangulum ABH minus est quadrato ex dimidio BH. Quare per 28. 6. ad datam rectam BH applicari potest rectangulum aequale ipsi ABH deficiens quadrato. Applicetur, fitque

F quodvis ex applicationum punctis. Quoniam igitur, ex constructione, rectangulum BFH aequale est ipsi ABH, major autem est BH quam FH, erit BF major quam BA, et propterea punctum F est in BA producta. Si autem ex rectangulo FBH auferantur aequalia rectangula ABH, BFH, erit reliquum rectangulum AF, BH aequale reliquo quadrato ex BF. Habet igitur rectangulum AF, D ad quadratum ex BF, (hoc est ad rectangulum AF, BH) rationem eandem rationi rectae D ad rectam BH, hoc est eandem rationi datae.

Quamvis vero ostensum fuit puncta ipsi C propiora facere majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti C; non tamen sequitur puncta propiora facere majores rationes quam puncta remotiora ad contrarias partes puncti C. Sint enim F, f puncta applicationum in praecedente compositione inventa, et bifariam sectâ BH in K, quoniam

* Vide hanc notam in pag. 66. ostensum est * utrumque ex punctis F, f remotius esse a puncto K medio scilicet ipsius BH, quam punctum C; unum ex ipsis cadet inter A, C puncta. Sit hoc punctum F, et quoniam aequales sunt FK, Kf, erit FC minor Cf. Fiat igitur CL aequalis ipsi CF, et quoniam punctum f eandem facit rationem quam facit punctum F, patet quodvis punctum inter L et f facere majorem rationem quam punctum f, sive quam punctum F, quamvis remotiora



sunt a puncto C quam est punctum F. Idemque in similibus casibus est observandum.

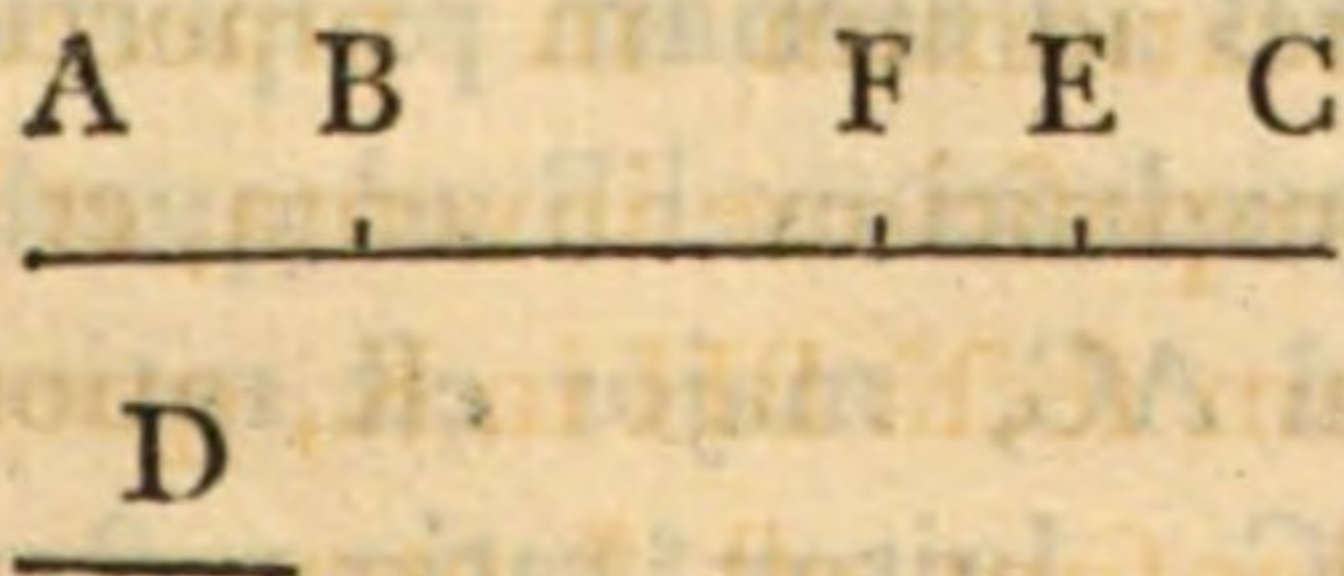
PROP. XLIV. PROB. II. EPITAGMA 3.

“ DATIS duobus punctis A, B, tertium C invenire extra
 “ data puncta, in recta quae per A, B transit, quod faciet
 “ rectangulum contentum segmento AC inter punctum C et
 “ punctum ab ipso remotius, et datâ rectâ D ad quadratum
 “ ex segmento CB inter ipsum et reliquum punctum datum,
 “ in ratione data.”

Factum puta; fit scilicet rectangulum contentum AC et D ad quadratum ex CB in ratione data. Erit igitur ^a AC ad CB, ^a 63. Dat. ut CB ad eam ad quam habet recta D rationem datam, quam scilicet habet rectangulum AC, D ad quadratum ex CB; fit ea BE quae ponatur versus partes C, et quoniam data est ratio rectae D ad ipsam BE, data erit BE; quia vero ut AC ad CB, ita est CB ad BE, dividendo erit AB ad BC, ut CE ad EB; rectangulum igitur ABE aequale est ipsi BCE. Datum autem est ABE rectangulum, datae enim sunt AB, BE rectae, quare datum est rectangulum BCE; et data est BE, datae igitur ^b sunt BC, EC, datumque ^b 85. Dat. erit punctum C. Et indeterminatum est Problema.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae D ad ipsam BE, quae ponatur



a puncto B in recta AB producta. Et ad rectam BE applicetur^c rectangulum aequale ipsi ABE excedens quadrato, sitque C illud applicationis punctum quod est in BE producta ad partes E; erit C punctum inveniendum. Quoniam enim ex constructione, rectangulum BCE est aequale ipsi ABE, erit AB ad BC, ut CE ad EB, et componendo, ut AC ad CB, ita CB ad BE. Igitur quadratum ex CB aequale est rectangulo AC, BE, et rectangulum AC, D erit ad quadratum ex CB, hoc est ad rectangulum AC, BE, ut recta D ad ipsam BE, hoc est in ratione data.

A B F E C

D

Puncta autem, ut F, propiora ipsi B majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta a B remotiora, ut C. Quoniam enim AB habet ad BF, majorem rationem quam AB ad BC, componendo erit ratio AF ad FB, major ratione AC ad CB, et, permutando, erit ratio FA ad AC, major ratione FB ad BC. Est vero ratio FB ad BC, major ratione^d quadrati ex FB ad quadratum ex BC. Multo igitur ratio FA ad AC, major est ratione quadrati ex FB ad quadratum ex BC. Igitur^e ratio rectanguli AF, D ad ipsum AC, D, major est ratione quadrati ex FB ad quadratum ex BC; et, permutando, ratio rectanguli AF, D ad quadratum ex FB, major est ratione rectanguli AC, D ad quadratum ex CB.

^d2. cor. 20. 6.

^e1. 6.

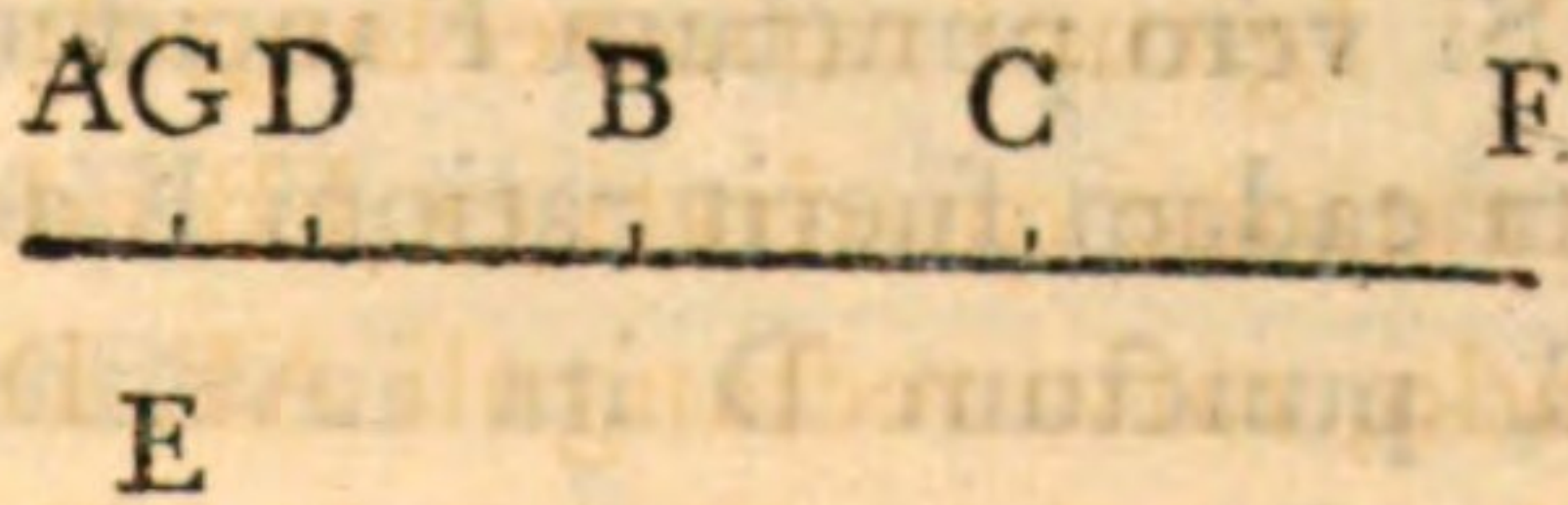
PROB. III.

“ DATIS in recta linea tribus punctis, quantum invenire
 “ inter ipsa, viz. inter utrumlibet ex punctis extremis et
 “ punctum medium, quod faciet rectangulum a segmento
 “ inter ipsum et quodlibet ex punctis datis et datâ rectâ, ad
 “ rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua data punc-
 “ ta, in ratione data.”

PROP. XLV. PROB. III. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quantum D
 “ invenire inter puncta A, B quod faciet rectangulum a seg-
 “ mento DA inter ipsum et punctum A, et data recta E, ad
 “ rectangulum BDC inter ipsum et reliqua puncta B, C quae
 “ scilicet sunt ad eandem partes puncti D, in ratione data.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum AD, E ad ipsum
 BDC in ratione data. Est igitur ^a AD ad DB, ut DC ad eam ^a 63. Dat.
 ad quam habet recta E rationem datam quam scilicet habet
 rectangulum AD, E ad ipsum
 BDC; sit ea BF, quae data e-
 rit propter datam E. Et quo-
 niam est AD ad DB, ut DC ad
 BF, erit ^b AC ad DF, ut DC ad ^c 12. 5.
 BF; rectangulum igitur CDF aequale est rectangulo dato AC,
 BF. Et data est recta CF, quare data ^c est CD, datumque erit ^c 85. Dat.
 punctum D.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AD, E ad ipsum BDC eadem rationi rectae E ad ipsam BF, et ponatur BF a puncto B versus partes C. Et, si punctum F non inci-

^a 29. 6.

derit in ipsum C, ad rectam CF, applicetur^d rectangulum aequale ipsi AC, BF excedens quadrato, fitque D punctum applicationis quod est in CF producta ad partes B; erit D punctum inveniendum. Est enim,

ex constructione, rectangulum

AGD B C F

FDC aequale ipsi AC, BF, qua-

re FDC minus est rectangulo

E

FAC, et propterea cadit D in-

ter puncta A, C. Et quoniam AC major est BC, erit rectangulum AC, BF, hoc est ipsum FDC majus rectangulo FBC; igitur punctum D est in CB producta versus A, et cadet inter puncta A, B. quoniam vero rectangulum AC, BF aequale est ipsi FDC, erit AC ad FD, ut DC ad BF, et^e AD ad DB, ut DC ad BF. Et rectangulum AD, E est ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF, hoc est in ratione data.

^e cor. 19. 5.

Si vero punctum F inciderit in ipsum C, hoc est, si ratio data eadem fuerit rationi E ad BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, ut in analysi ostensum, est AC ad CD, ut (DF ad BF, id est in hoc casu) DC ad BC; si inter AC et CB media proportionalis inveniat CD, et ponatur a puncto C versus A, erit D punctum in-

A G D B C
F

veniendum. Est enim AC ad CD, ut CD ad CB, et ^e AD ad ^e cor. 19. 5. DB, ut DC ad CB. Igitur rectangulum AD, E est ad ipsum AD, CB, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam CB, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut D remotiora a puncto A faciunt majores rationes quam puncta propiora ut G. Est enim rectangulum AD, E majus ipso AG, E; at rectangulum BDC minus ipso BGC.

PROP. XLVI. PROB. III. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C invenire
 “ quartum D inter puncta B, A quod faciet rectangulum a
 “ segmento DA inter ipsum et punctum medium A, et datâ
 “ rectâ E, ad rectangulum BDC a segmentis inter ipsum et
 “ reliqua puncta B, C, in ratione data.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum DA, E ad ipsum BDC in ratione data. Est igitur ^a AD ad DB, ut DC ad eam ^a 63. Dat. ad quam habet E rationem datam quam scilicet habet rectangulum AD, E ad ipsum BDC.

Sit ea BF, quae propter datam E

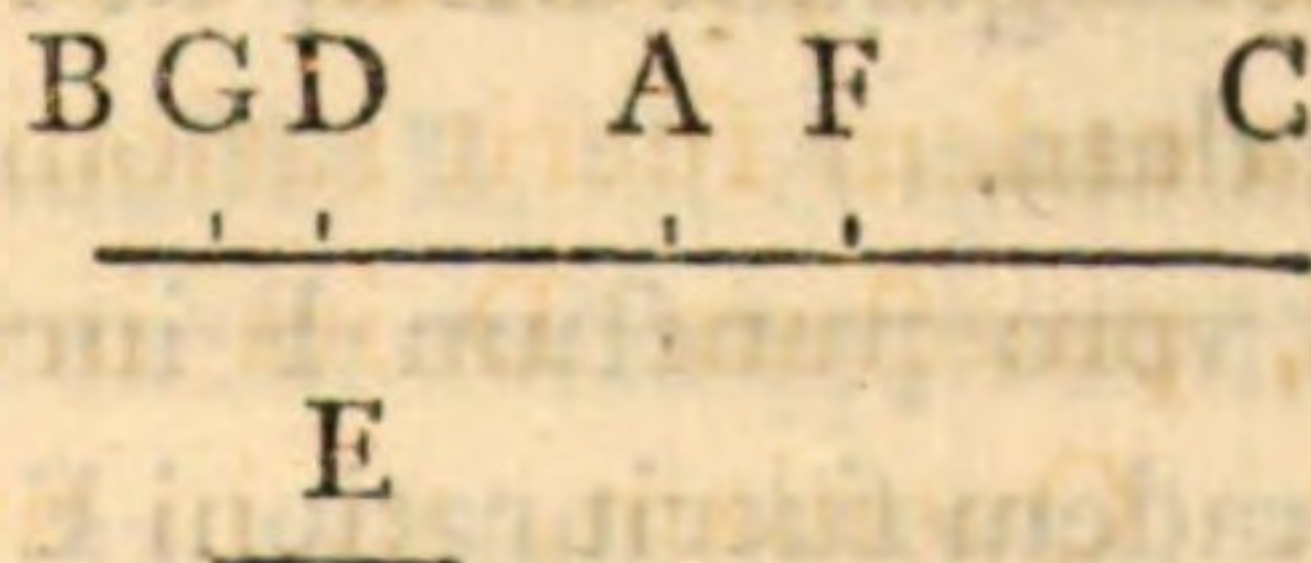
data erit. Et quoniam est ut AD

ad DB, ita DC ad BF, erit ^b AC

ad DF, ut DC ad BF. Rectangu-

lum igitur FDC aequale est dato rectangulo BF, AC; et data

est CF, igitur ^c data est CD, et punctum D datum erit.



^b 19. 5.

^c 85. Dat.

Componetur ita,

- Sit ratio data quam habere debet rectangulum AD, E ad ipsum BDC eadem rationi rectae E ad ipsam BF, et ponatur BF a puncto B versus partes C. Et, si punctum F non incidit in ipsum C, applicetur^d ad rectam CF rectangulum aequale ipsi BF, AC excedens quadrato, fitque D punctum applicationis quod est in CF producta ad partes puncti B; erit D punctum inveniendum. Est enim, ex constructione, rectangulum FDC aequale ipsi BF, AC, minus igitur est FDC rectangulo FBC, quare punctum D cadit inter punctum B et rectam CF, et propterea DF minor est ipsa BF. Quoniam vero rectangulum FDC aequale est ipsi BF, AC, erit DF ad AC, ut BF ad DC; et est DF minor BF, igitur^e et AC minor est DC, et propterea cadet punctum D inter puncta A, B. Est autem AC ad DF, ut DC ad BF, quare^b ut AD ad DB, ita est DC ad BF; rectangulum vero AD, E est ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF, hoc est in ratione data.

Si vero punctum F incidit in ipsum C, hoc est si ratio data eadem fuerit rationi E ad BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, ut in analysi ostensum, est AC ad CD, ut (DF ad FB, id est in hoc casu) DC ad CB; si inter

B G D A F C

—————

E

—————

B G D A C F

—————

E

—————

B D A C

—————

F

—————

E

AC et CB media proportionalis inveniatur CD, et ponatur a puncto C versus B, erit D punctum inveniendum. Est enim BC ad CD, ut CD ad CA, quare^b BD est ad DA, ut BC ad^b 19. 5. CD. Rectangulum vero AD, E est ad ipsum AD, BC, hoc est ad ipsum BDC ut recta E ad rectam BC, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut G, propiora puncto B faciunt majores rationes quam puncta remotiora, ut D. Quoniam enim punctum C est in GA producta, ratio GA ad AD, hoc est ratio rectanguli GA, E ad ipsum AD, E major est (ratione GC ad CD, hoc est ratione) rectanguli BD, GC ad ipsum BDC. Majus autem est rectangulum BD, GC ipso BGC, quare ratio rectanguli BD, GC ad ipsum BDC major est ratione rectanguli BGC ad idem BDC; multo igitur ratio rectanguli GA, E ad ipsum DA, E major est ratione rectanguli BGC ad ipsum BDC; et permutando, ratio rectanguli GA, E ad ipsum BGC, major est ratione rectanguli DA, E ad ipsum BDC. Puncta igitur ipsi B propiora faciunt majores rationes quam puncta remotiora.

PROP. XLVII. PROB. III. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quantum D
 “ invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum DA, E
 “ a segmento inter D et punctum extremum A quod est ad
 “ eas partes ipsius D ad quas est punctum medium C, et da-
 “ ta recta E, ad rectangulum BDC a segmentis inter D et re-
 “ liqua puncta B, C, in ratione data.”

Factum puta; fit scilicet rectangulum DA, E ad ipsum
^a 63. Dat. BDC in ratione data. Est igitur^a AD ad DC, ut BD ad eam
 ad quam habet E rationem datam quam scilicet habet rect-
 angulum DA, E ad ipsum BDC. Sit ea BF, quae, propter da-
 tam E, data erit. Et
 quoniam est AD ad $\frac{B}{F}$ D $\frac{C}{A}$
 DC, ut BD ad BF, di-
 videndo, erit AC ad $\frac{E}{CD}$
 CD, ut DF ad FB. Rect-
 angulum igitur FDC aequale est dato rectangulo BF, CA; et
 data est recta FC, et est punctum D inter F et C, quia AD
^b 86. Dat. major est DC, et propterea BD major BF; data igitur^b est FD,
 datumque punctum D.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ad da-
 tam rectam FC applicetur rectangulum aequale dato rectan-
 gulo BF, CA deficiens quadrato, quod non semper fieri po-
 test, quoties scilicet rectangulum BF, CA majus fuerit qua-
 drato ex dimidio ipsius FC; ideo Problema non semper con-
 strui potest. Fiet autem modo singulari in casu quo rectan-
 gulum BF, CA est aequale quadrato ex dimidio ipsius FC, hoc
 est quando punctum applicationis D cadit in medio ipsius FC.

Invenietur autem in hoc casu punctum D, et ratio datae E
 ad quaesitam BF, ut sequitur. Quoniam punctum D, ex hy-
 pothesi, bifariam secant rectam FC, et ex praemissis debet rect-
 angulum BF, CA aequale esse (rectangulo FDC, hoc est) qua-
 drato ex DC, addito communi rectangulo FAC, erit rectan-
 gulum BAC aequale quadrato ex DA. Datum autem est BAC
 rectangulum, quadratum igitur ex DA datum est, et ipsa DA
 data; datum igitur est punctum D, et propterea punctum F.

Inveniatur scilicet inter BA, AC media proportionalis AD quae ponatur in AC producta versus punctum B, et fiat DF aequalis ipsi DC; erit D punctum inveniendum, et ratio quaesita eadem erit rationi rectae E ad ipsam BF. Quoniam enim rectangulum BAC aequale est quadrato ex DA, ablato communi rectangulo FAC, reliquum BF, CA aequale est (reliquo, quadrato scilicet ex DC, five) rectangulo FDC. Est igitur AC ad CD, ut DF ad FB, et componendo, ut * AD ad DC, * ita est DB ad BF. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF.

Inquirendum autem est an punctum D faciat rationem rectanguli DA, E ad ipsum BDC majorem vel minorem ratione quam facit aliud quodvis punctum inter puncta B, C. Sit aliud istiusmodi punctum G. Compara-

$$\frac{B \quad F \quad D \quad G \quad C \quad A}{E}$$

landa igitur est ratio rectanguli DA, E ad

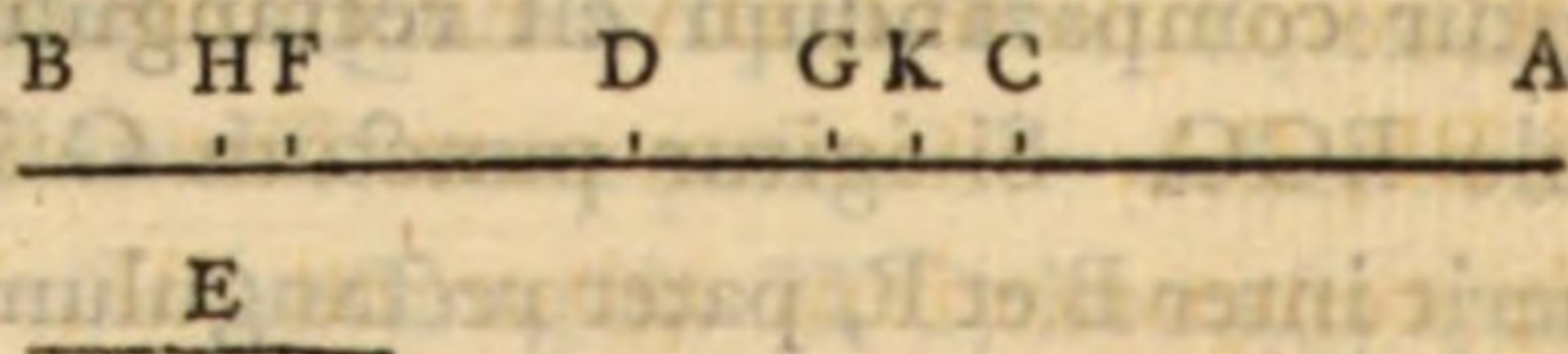
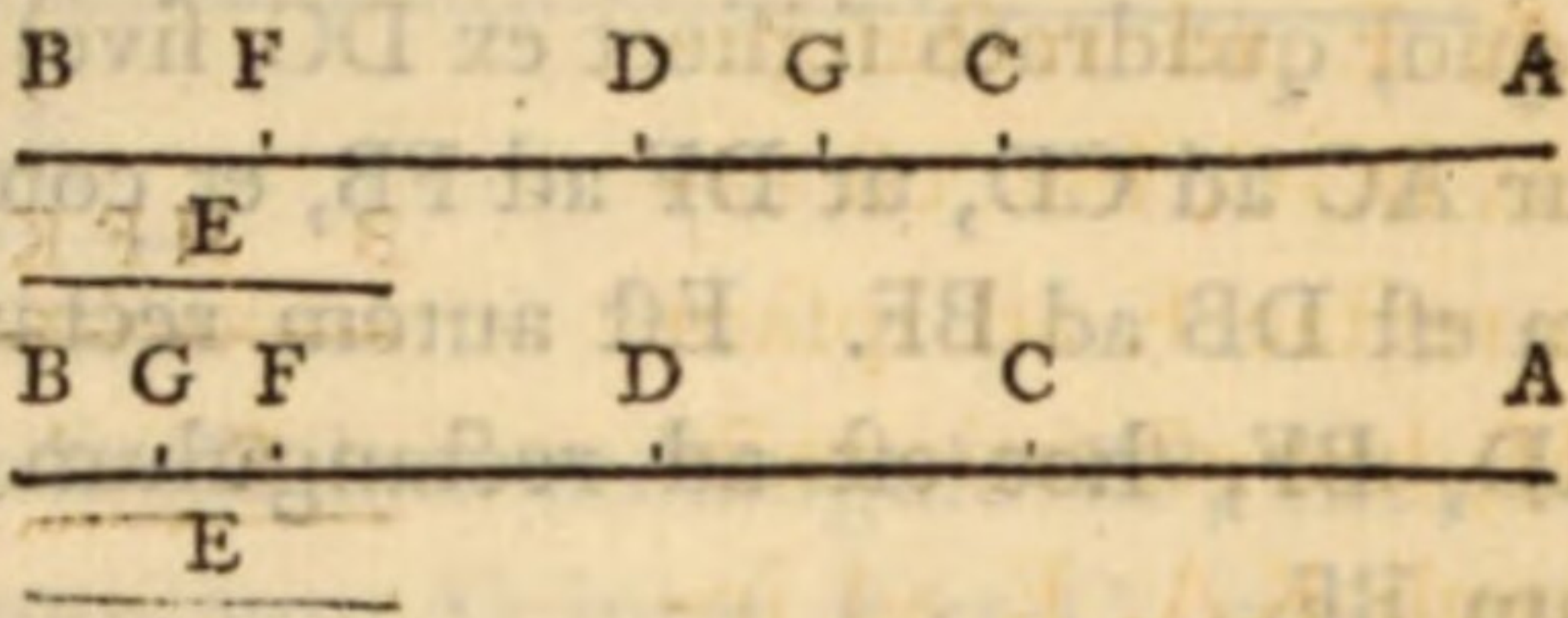
$$\frac{B \quad G \quad F \quad D \quad C \quad A}{E}$$

ipsum BDC, hoc est ratio rectae E ad ipsam BF, cum ratione rectanguli GA, E ad ipsum BGC. Et comparanda est ratio rectanguli GA, E ad ipsum GA, BF cum ratione ipsius GA, E ad ipsum BGC. Igitur comparandum est rectangulum GA, BF cum rectangulo BGC. Si igitur punctum G inciderit in ipsum F, vel fuerit inter B et F, patet rectangulum GA, BF majus esse rectangulo BGC. Si vero fuerit G inter F et C, ex rectangulis BF, GA et BGC quae inter se comparanda sunt, auferatur commune BF, GC, et conferatur reliquum BF, CA cum reli-

quo rectangulo FGC. Est autem BF, CA aequale quadrato ex
^{d 5. 2.} DC, quod majus ^d est rectangulo FGC; rectangulum igitur
 BF, CA majus est ipso FGC; hisce addatur commune rect-
 angulum BF, GC, et rectangulum BF, GA majus erit ipso
 BGC; quod etiam in altero casu ostensum fuit. Igitur in
 quocunque casu rectangulum GA, E ad ipsum BF, GA, et
 propterea recta E ad
 ipsam BF, minorem
 habet rationem quam
 rectangulum GA, E ad
 ipsum BGC. Ratio au-
 tem rectanguli DA, E ad ipsum BDC, eadem est rationi rec-
 tae E ad ipsam BF, quare rectangulum DA, E ad ipsum BDC
 minorem habet rationem quam rectangulum GA, E ad ip-
 sum BGC. Punctum igitur D facit minimam rationem rect-
 anguli DA, E ad rectangulum BDC.

Ostendendum restat puncta ipsi D propiora minores facere
 rationes quam puncta remotiora ad easdem partes ipsius D.

† Fiat enim, manentibus jam descriptis, ut AG ad GC, † ita
 GB ad BH. Erit igitur rectangulum GA, E ad ipsum BGC,
 hoc est ad ipsum GA, BH, ut recta E ad ipsam BH. Ostensa
 autem est ratio rect-
 anguli DA, E ad ip-
 sum BDC, hoc est ra-
 tio rectae E ad rectam
 BF, minor ratione rect-
 anguli GA, E ad ipsum BGC; igitur ratio rectae E ad ipsam
 BF minor est ratione ipsius E ad rectam BH, et propterea



recta BF major est ipsâ BH. Quoniam vero est AG ad GC, ut GB ad BH, dividendo erit AC ad CG, ut GH ad HB; igitur rectangulum BH, CA aequale est ipsi HGC.

Sit jam aliud quodvis punctum K inter B et C remotius a puncto D quam est punctum G, ad easdem autem partes puncti D ad quas est G. Et comparanda est ratio rectanguli

GA, E ad rectangu-

lum BGC, hoc est ra-

tio rectae E ad ipsam

BH, hoc est ratio rect-

anguli KA, E ad ip-

sam BH, KA, cum ratione rectanguli KA, E ad rectangu-

lum BKC. Comparandum igitur est rectangulum BH, KA

cum ipso BKC; et ablato communi rectangulo BH, KC, com-

parandum est reliquum rectangulum BH, CA cum reliquo

HKC. Est autem BH, CA aequale rectangulo HGC, quod

propterea comparandum est cum ipso HKC. Inveniatur igitur

utrum punctum G an K propius sit puncto quod bifariam

secat ipsam HC. Ut hoc fiat inveniatur utrum punctum D an

G puncto isto medio sit propius. Conferatur igitur rectangu-

lum HDC cum ipso (HGC, hoc est cum ipso) BH, CA; addito-

que communi rectangulo BH, DC, conferatur rectangulum

BDC cum ipso BH, DA. Est autem rectangulum BDC aequale

ipsi BF, DA, ostensum enim fuit * esse AD ad DC, ut DB ad

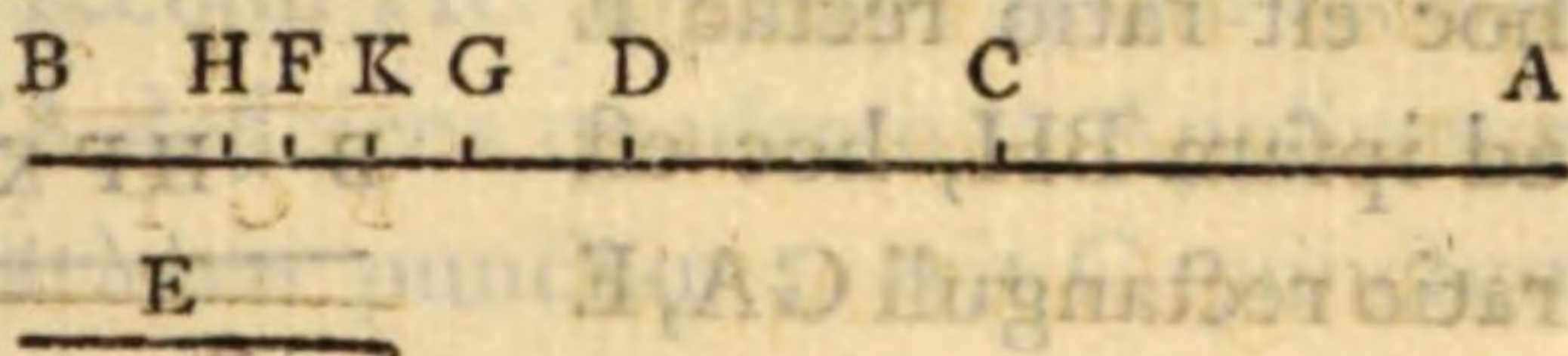
BF; comparandum igitur est BF, DA cum ipso BH, DA.

Ostensa autem est recta BF major ipsâ BH; igitur rectangu-

lum BF, DA, hoc est ipsum BDC majus est rectangulo BH,

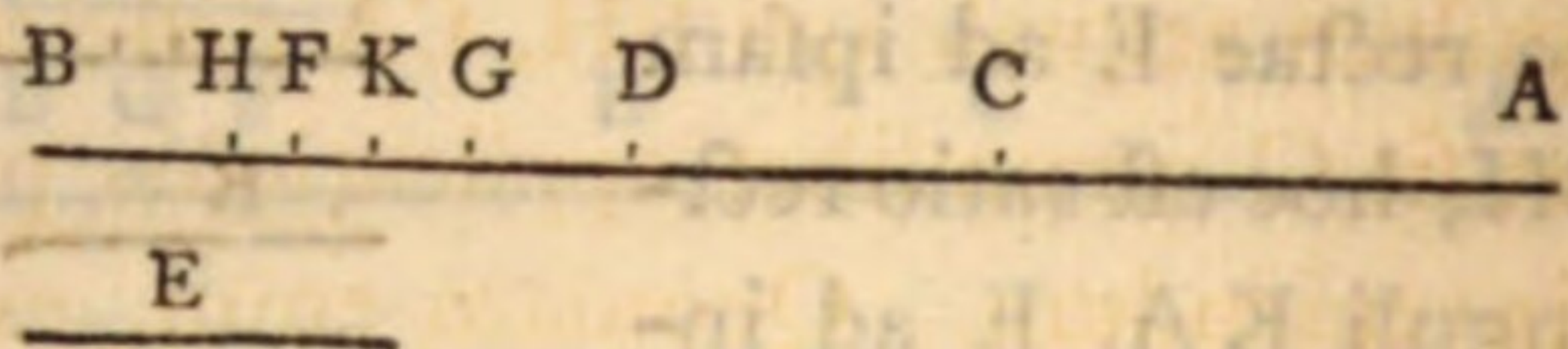
DA; et ablato communi rectangulo BH, DC, erit reliquum

HDC majus (reliquo BH, CA, hoc est ipso) HGC. Est igitur



Vide ad * in
pag. 77.

punctum D propius puncto medio ipsius HC quam punctum G; quare et punctum G propius est eidem puncto medio quam est punctum K quod remotius est a D quam est punctum G, et ad easdem puncti D partes. Igitur rectangulum HGC, hoc est ipsum BH, CA majus est ipso HKC, additoque communi rectangulo BH, KC, erit ipsum BH, KA majus rectangulo BKC. Ratio igitur rectanguli KA, E ad BH, KA, hoc est ratio rectae E ad ipsam BH, hoc est ratio rectanguli GA, E ad ipsum GA, BH, hoc



Vide ad † in
pag. 78.

est ad BGC, † minor est ratione rectanguli KA, E ad ipsum BKC. Puncta igitur propiora puncto D faciunt minores rationes quam puncta remotiora ad easdem partes ipsius D.

Componetur vero Problema ita,

Sit E recta data, et inveniatur punctum D, ut in praemissis ostensum fuit, quod facit rationem minimam rectanguli DA, E ad rectangulum BDC, et fiat DF aequalis ipsi DC. Si igitur ratio proposita eadem fuerit rationi rectae E ad ipsam BF, punctum D, idque solum Problema efficiet, ut in praemissis ostensum fuit. Si autem ratio proposita non eadem fuerit rationi minimae E ad BF, erit hac ratione major, nam si non fuerit, Problema non construi potest. Sit igitur ratio proposita ea quam habet E ad BH, quae quoniam major est ratione E ad BF, erit recta BF major ipsâ BH, et rectangulum BF, DA majus erit ipso BH, DA. Ostensum autem fuit rect-

angulum BF, CA aequale rectangulo FDC, additoque communi rectangulo BF, DC, erit rectangulum BF, DA aequale ipsi BDC. Igitur rectangulum BDC majus est ipso BH, DA, et ablato communi BH, DC, erit reliquum HDC majus reliquo BH, CA. Est autem rectangulum HDC minus quadrato ex dimidio ipsius HC, quia punctum D non bifariam secat rectam HC; multo igitur rectangulum BH, CA minus est eodem quadrato. Quare ad rectam HC applicari potest rectangulum aequale ipsi BH, CA deficiens quadrato^c. Applicetur, ^c 28. 6. et sit G utrumlibet applicationis punctum; erit G punctum inveniendum. Quoniam enim, ex constructione qua inventum fuit punctum D, proportionales sunt BA, DA, CA, erit BD major quam DC, hoc est quam FD, et cadet punctum F et propterea punctum H inter puncta B, C. Rectangulum autem HGC, ex constructione, aequale est ipsi BH, CA, et addito communi BH, GC, erit rectangulum BGC aequale ipsi BH, GA. Est igitur rectangulum GA, E ad ipsum BH, GA, hoc est ad ipsum BGC, ut recta E ad ipsam BH, hoc est in ratione data.

Ratio autem minima, quam scilicet habet recta E ad ipsam BF, ita determinatur. Est BF excessus quo utraque BA, AC excedunt utraque

FA, AC, utraque vero FA, AC sunt duae

DA, quia FC dupla est ipsius DC; DA autem

est ea quae potest rectangulum BAC, quare DA bis est ea quae potest rectangulum BAC quater. Ratio igitur minima, hoc est ratio rectae E ad ipsam BF, ea est quam habet E ad

excessum quo BA, AC simul excedunt eam quae potest rectangulum BAC quater. Est autem haec determinatio Prop. 19. Lib. 7. Pappi; et est Lemma Pappi ad Apollonii libros de Sectione Rationis et Spatii.

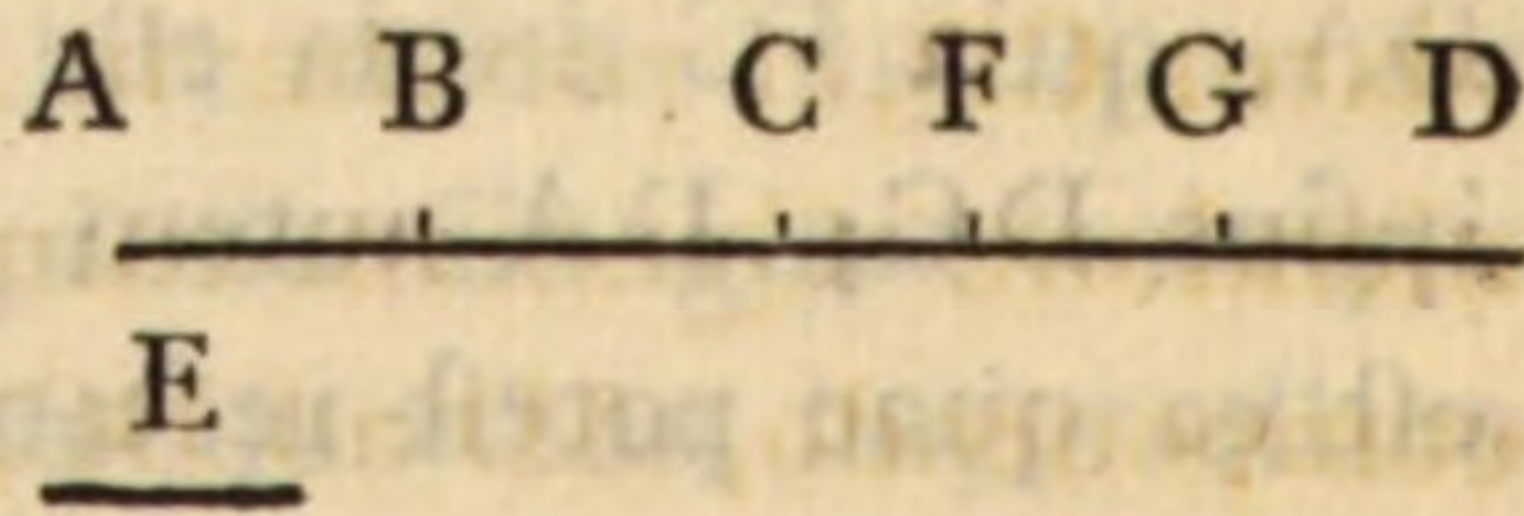
P R O B. IV.

“ DATIS in recta linea tribus punctis, quantum invenire
 “ extra ipsa, ad utraque partes, quod faciet rectangulum a
 “ segmento inter ipsum et unum ex punctis datis, et datâ
 “ rectâ ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua
 “ duo puncta, in ratione data.”

P R O P. XLVIII. P R O B. IV. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quantum in-
 “ venire D extra puncta data quod faciet rectangulum AD, E
 “ a segmento inter punctum D et punctum A ab eo remo-
 “ tissimum, et data recta E, ad rectangulum BDC a segmen-
 “ tis inter D et reliqua puncta B, C, in ratione data.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum AD, E ad ipsum
 * 63. Dat. BDC in ratione data. Est igitur^a AD ad DC, ut DB ad eam
 ad quam habet reliqua E ratio-
 nem datam quam scilicet habet
 rectangulum AD, E ad ipsum BDC.
 Sit ea BF quae, propter datam E,
 data erit. Et quoniam est AD ad
 DC, ut DB ad BF, dividendo, erit AC ad CD, ut DF ad FB.

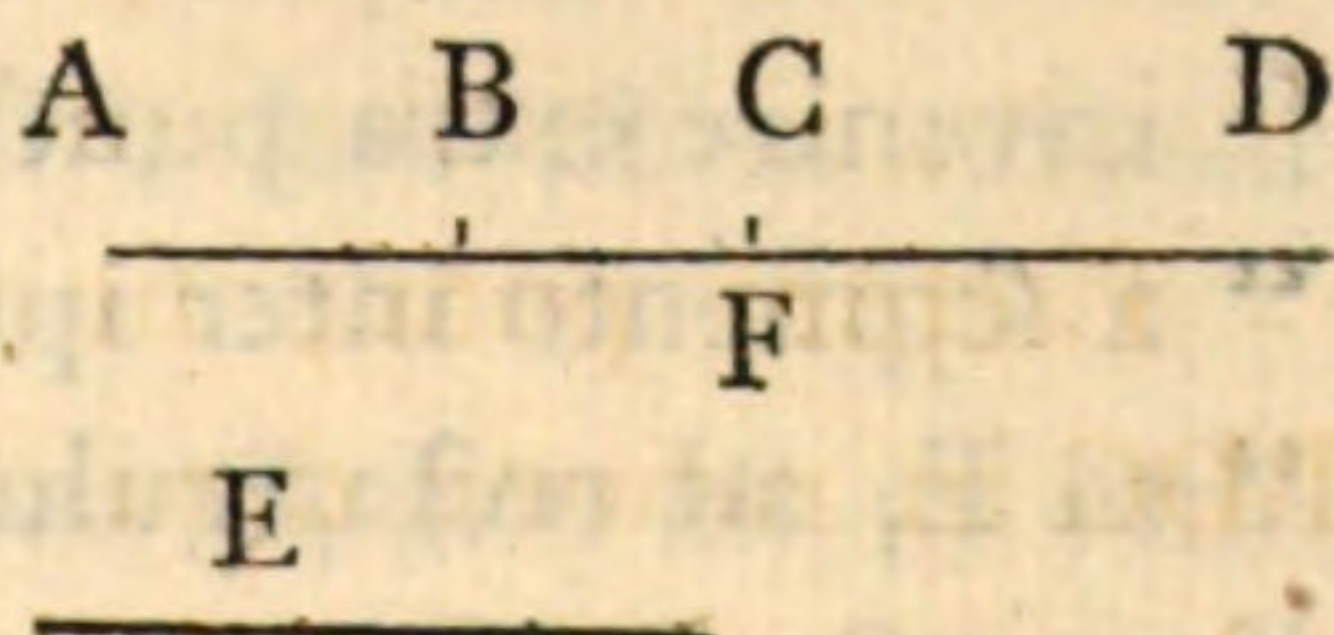


Igitur rectangulum CDF aequale est rectangulo dato AC, BF; et data est CF, et est D in CF producta, quia enim AD major DC, erit DB major BF; data igitur^b est CD, datumque erit^c 85. Dat. punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AD, E ad ipsum BDC, eadem rationi rectae E ad rectam BF quae ponatur a puncto B versus partes puncti C, et, si punctum F non inciderit in ipsum C, applicetur^c ad rectam CF rectangulum aequale ipsi AC, BF excedens quadrato, sitque D punctum applicationis quod est in CF producta ad partes contrarias iis ad quas est punctum B; erit D punctum invenendum. Est enim, ex constructione, rectangulum CDF aequale ipsi AC, BF, ut igitur AC ad CD, ita est DF ad FB; et componendo, ut AD ad DC, ita DB ad BF. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF, hoc est in ratione data.

Si vero punctum F inciderit in ipsum C, hoc est si ratio data eadem fuerit rationi E ad ipsum BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, in analyfi, ostensum fuit esse AC ad CD, ut (DF ad FB, hoc est in praesenti casu ut) DC ad CB; si inter AC et CB media proportionalis inveniat CD, et ponatur in AC producta, erit D punctum invenendum. Quoniam enim est AC ad CD, ut CD ad CB, erit, componendo, AD ad DC, ut DB ad BC. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BC, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BC, hoc est in ratione data.



Puncta autem, ut G, propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora, ut D. Quoniam enim AG major est CG, et punctum D in CG producta, erit ratio AG ad AD, major ratione CG ad CD; igitur et ratio rectanguli AG, E ad ipsum AD, E, major est ratione rectanguli BD, CG ad ipsum BDC; quoniam vero BD major est BG, rectangulum BD, CG majus est ipso BGC, quare ratio rectanguli BD, CG ad ipsum BDC, major est ratione rectanguli BGC ad idem BDC. Multo igitur ratio rectanguli AG, E ad ipsum AD, E, major est ratione rectanguli BGC ad ipsum BDC; et permutando, ratio rectanguli AG, E ad ipsum BGC, major est ratione rectanguli AD, E ad ipsum BDC. Puncta igitur propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora.

$$\frac{A \quad B \quad C \quad F \quad G \quad D}{E}$$

PROP. XLIX. PROB. IV. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “ invenire extra puncta data quod faciet rectangulum AD, E
 “ a segmento inter ipsum et punctum medium A et data rec-
 “ ta E, ad rectangulum BDC a segmentis inter D et reliqua
 “ puncta B, C in ratione data.”

Factum puta; fit scilicet rectangulum AD, E ad ipsum BDC in ratione data. Est igitur ^a AD ad DC, ut BD ad eam ad quam habet reliqua E rationem datam quam scilicet rectangulum AD, E habet ad ipsum BDC. Sit ea BF, quae, prop-

^a 63. Dat.

Componetur ita,

Si vero punctum F inciderit in ipsum C, hoc est si ratio data eadem fuerit rationi E ad ipsum BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, in analyfi, ostensum fuit esse AC ad CD, ut (DF ad FB, hoc est in praesentia casu ut) DC ad CB; si inter AC et CB media proportionalis inveniat CD, et ponatur in AC producta, erit D punctum invenendum. Quoniam enim est AC ad CD, ut CD ad CB, erit, componendo, AD ad DC, ut DB ad BC. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BC, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BC, hoc est in ratione data.

CD, et ponatur in AC producta, erit D punctum invenien-
dum. Quoniam enim est ut AC ad
CD, ita CD ad CB, componendo, e-
rit AD ad DC, ut DB ad BC. Est
autem rectangulum AD, E ad ip-
sum AD, BC, hoc est ad rectangu-
lum BDC, ut recta E ad ipsum BC, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut G, propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora, ut D. Nam quoniam AG major est CG, et est punctum D in CG producta, erit ratio AG ad AD, major ratione CG ad CD; igitur et ratio rectanguli AG, E ad ipsum AD, E major est ratione rectanguli BD, CG ad ipsum BDC, quoniam vero BD major est BG, rectangulum BD, CG majus est ipso BGC; quare ratio rectanguli BD, CG ad rectangulum BDC major est ratione ipsius BGC ad idem BDC. Multo igitur ratio rectanguli AG, E ad ipsum AD, E, major est ratione rectanguli BGC ad ipsum BDC; et permutando, ratio rectanguli AG, E ad ipsum BGC, major est ratione rectanguli AD, E ad rectangulum BDC. Puncta igitur propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora.

PROP. L. PROB. IV. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quartum D
 “ invenire extra puncta data, quod faciet rectangulum AD, E
 “ a segmento inter punctum D et punctum ipsi proximum A
 “ et recta data E, ad rectangulum BDC a segmentis inter D
 “ et reliqua puncta B, C, in ratione data.”

Factum puta; fit scilicet rectangulum AD, E ad ipsum BDC in ratione data. Est igitur ^a AD ad DC, ut BD ad eam ^a 63. Dat. ad quam habet reliqua E rationem datam quam scilicet habet rectangulum AD, E ad ipsum BDC. Sit ea BF, quae data erit, quia data est recta E. Et quoniam est AD ad DC, ut $\frac{B}{C} = \frac{A}{D} = \frac{F}{E}$ BD ad BF, erit, invertendo, ut ^{*} FB ad BD, ita CD ad DA, et convertendo, BF ad FD, ut DC ad CA. Igitur rectangulum CDF aequale est rectangulo dato CA, BF; et data est recta CF, et est punctum D inter C et F, quoniam enim CD major est DA, erit BF major BD; ^b 86. Dat. data igitur ^b est CD, datumque erit punctum D.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ad datam rectam CF applicetur rectangulum dato rectangulo CA, BF aequale deficiens quadrato, quod non semper fieri potest, quoties scilicet rectangulum CA, BF majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius CF; ideo Problema non semper construi potest. Fiet autem modo singulari quando rectangulum CA, BF aequale est quadrato ex dimidio ipsius CF, hoc est quando punctum applicationis cadit in medio rectae CF.

Invenietur autem in hoc casu punctum D, et ratio rectanguli AD, E ad ipsum BDC, five ratio datae rectae E ad quaesitam BF, ut sequitur. Quoniam punctum D, ex hypothesi, bifariam fecat rectam CF, et, ex praemissis, debet rectangulum CA, BF aequale esse (rectangulo CDF, hoc est) quadrato ex CD, ablato communi rectangulo CAF, erit reliquum rectangulum BAC aequale reliquo, quadrato scilicet ex AD. Datum autem est BAC rectangulum, datum igitur est quadratum ex AD,

et ipsa AD data; quare datum
est punctum D, et propterea
punctum E. Inveniatur igitur
inter BA, AC media proportionalis AD quae ponatur in BA
producta ad partes A, et fiat DF aequalis ipsi DC, erit D
punctum inveniendum, et ratio quaesita eadem rationi rectae
E ad ipsam BF. Est enim rectangulum BAC aequale quadra-
to ex AD, additoque communi rectangulo CAF, erit rectan-
gulum CA, BF aequale (quadrato ex CD, hoc est) rectangulo
CDF. Est igitur BF ad FD, ut DC ad CA, et convertendo,
FB ad BD, ut CD ad DA. Est autem rectangulum AD, E ad
ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad
ipsam BF.

Inquirendum autem est an punctum D faciat rationem
 rectanguli AD, E ad ipsum BDC majorem vel minorem rati-
 one quam facit aliud quodvis punctum in BA producta ad
 partes A. Sit aliud quodvis punctum G; comparanda igitur
 est ratio rectanguli AD, E ad ipsum BDC, cum ratione rect-
 anguli AG, E ad ipsum BGC, hoc est ratio rectae E ad ipsam
 a. 6. BF, cum ratione rectanguli AG, E ad ipsum BGC. Et com-

paranda est ratio rectanguli AG, E ad ipsum AG, BF, cum ratione ejusdem AG, E ad ipsum BGC. Igitur comparandum est rectangulum AG, BF cum ipso BGC. Si vero punctum G inciderit in ipsum F, vel fuerit in recta AF producta ultra F, patet rectangulum AG, BF minus esse ipso BGC. Si autem punctum G fuerit inter A et F, ex rectangulo CG, BF auferatur rectangulum AG, BF, et ex eodem rectangulum BGC, et comparandum erit reliquum rectangulum CA, BF cum reliquo CGF. Est autem CA, BF aequale quadrato ex CD quod majus^d est rectangulo CGF. Rectan-

d 5. 2.

gulum igitur CA, BF majus est B C A D GK F H
ipso CGF, et hisce ex rectan-
gulo CG, BF ablatis, erit re-
liquum AG, BF minus reliquo

BGC, quod etiam in altero casu ostensum fuit. Igitur in quocunque casu rectangulum AG, E ad ipsum AG, BF, five recta E ad ipsam BF, majorem habet rationem quam rectangulum AG, E ad ipsum BGC. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum BDC, ut recta E ad ipsam BF; ratio igitur rectanguli AD, E ad ipsum BDC, major est ratione rectanguli AG, E ad ipsum BGC; et propterea punctum D facit maximam rationem rectanguli AD, E ad ipsum BDC.

Ostendendum restat puncta ipsi D propiora majores facere rationes quam puncta remotiora ad easdem puncti D partes.

Fiat enim, manentibus jam descriptis, ut AG ad GC, ita BG ad quartam BH. Erit igitur rectangulum AG, E ad ipsum BGC, hoc est ad ipsum AG, BH, ut recta E ad ipsam BH. Ostensa autem est ratio rectanguli AD, E ad ipsum BDC, hoc est ratio rectae E ad ipsam BF, major ratione rect-

anguli AG, E ad ipsum BGC; quare ratio rectae E ad ipsam BF, major est ratione ipsius E ad rectam BH; recta igitur BF minor est ipsâ BH. Et quoniam est AG ad GC, ut BG ad BH, erit invertendo HB ad BG, ut CG ad GA, et convertendo BH ad HG, ut GC ad CA; rectangulum igitur CA, BH aequale est ipsi CGH.

Sit jam aliud quodvis punctum K in BA producta remotius a puncto D quam est punctum G, ad easdem autem ipsius D partes ad quas est G. Et comparanda est ratio rectanguli AG, E ad ipsum BGC, hoc est ratio rectae E ad ipsam BH, hoc est ratio rectanguli AK, E ad ipsum AK, BH, cum ratione rectanguli AK, E ad ipsum BKC. Comparandum igitur est rectangulum AK, BH cum ipso BKC; et utroque ablato ex rectangulo CK, BH, comparandum est reliquum rectangulum CA, BH cum reliquo CKH. Est autem CA, BH aequale ipsi CGH, quod propterea comparandum est cum ipso CKH. Inveniantur igitur utrum punctum G an K propius sit puncto quod bifariam fecat ipsam CH. Ut hoc fiat inveniantur utrum punctum D an G puncto isto medio sit propius. Conferatur igitur rectangulum CDH cum ipso (CGH, hoc est cum ipso) CA, BH; et ablato utroque ex rectangulo CD, BH conferatur reliquum BDC cum reliquo rectangulo AD, BH. Est autem rectangulum BDC aequale ipsi AD, BF, ostensum * enim fuit esse FB ad BD, ut CD ad DA; comparandum igitur est rectangulum AD, BF cum ipso AD, BH. Ostensa autem est recta BF minor ipsa BH; igitur rectangulum AD, BF, hoc est ip-

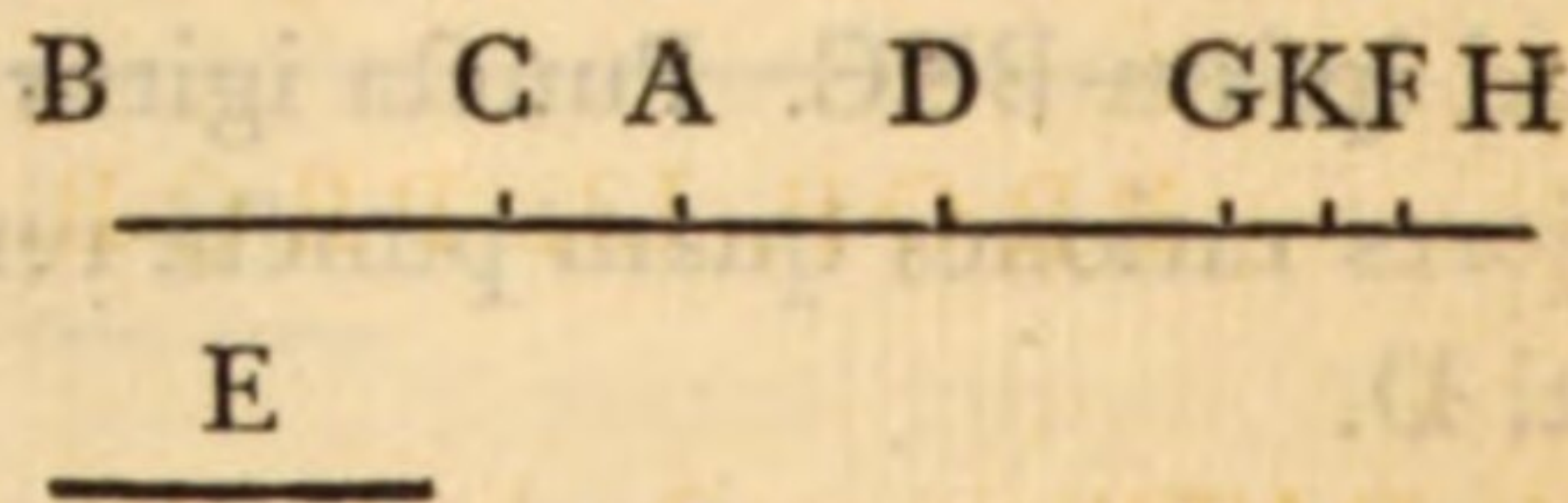
* ad notam
hanc in pag.
87.

sum BDC minus est rectangulo AD, BH, quorum utroque ablato ex rectangulo CD, BH, erit reliquum CDH majus (reliquo CA, BH, hoc est) rectangulo CGH. Est igitur Punctum D propius puncto medio ipsius CH quam punctum G. Puncta autem G, K sunt ad easdem partes puncti D, et G propius ipsi D quam est punctum K; quare et G propius est puncto medio ipsius CH quam K. Rectangulum igitur CGH, hoc est ipsum CA, BH majus est ipso CKH, et ablato utroque ex rectangulo CK, BH, erit reliquum AK, BH minus reliquo BKC. Igitur ratio rectanguli AK, E ad ipsum AK, BH, hoc est ratio rectae E ad ipsam BH, hoc est ratio rectanguli AG, E ad ipsum BGC, major est ratione rectanguli AK, E ad ipsum BKC. Puncta igitur propiora puncto D faciunt majores rationes quam puncta remotiora ad easdem partes puncti D.

Componetur vero Problema ita,

Sit E recta data, et inveniatur punctum D, ut in praemissis ostensum fuit, quod facit maximam rationem rectanguli AD, E ad ipsum BDC; et fiat DF aequalis ipsi DC. Si igitur ratio proposita eadem fuerit rationi rectae E ad ipsam BF, punctum D; idque solum, efficiet Problema, ut prius ostensum. Si autem ratio proposita non eadem fuerit rationi maximae, rectae E ad ipsam BF, erit haec ratione minor. Sit igitur ratio proposita ea quam habet recta E ad ipsam BH, quae quoniam minor est ratione E ad BF, erit recta BF minor ipsa BH, et rectangulum AD, BF minus ipso AD, BH. Ostensum autem fuit rectangulum CA, BF aequale rectangulo CDF, et ablati hisce ex rectangulo CD, BF, erit reliquum rectangu-

lum AD, BF aequale reliquo BDC, quod propterea minus erit ipso AD, BH; et hisce ex rectangulo CD, BH ablati, erit reliquum CDH majus reliquo CA, BH. Est autem CDH minus quadrato ex dimidio ipsius CH, quia inaequales sunt CD, DH; multo igitur rectangulum CA, BH minus est eodem quadrato. Igitur^e ad rectam CH applicari potest rectangulum aequale ipsi CA, BH deficiens quadrato. Applicetur, fitque G utrumlibet applicationis punctum; erit G punctum inveniendum. Quoniam enim CH major ostensa est quam CF, erit medium ipsius CH punctum ultra D medium scilicet punctum ipsius CF; et, ex constructione, rectangulum CGH aequale est ipsi CA, BH quod majus est rectangulo CAH; quare punctum G cadit propius medio puncto ipsius CH quam punctum A, et propterea G est in BA producta. Et quoniam rectangulum CGH aequale est ipsi CA, BH, ablati hisce ex rectangulo CG, BH, erit reliquum BGC rectangulum aequale reliquo AG, BH. Est autem rectangulum AG, E ad ipsum AG, BH, hoc est ad rectangulum BGC, ut recta E ad ipsam BH, hoc est in ratione data.



Ratio autem maxima, quam scilicet habet recta E ad ipsam BF, ita determinatur. Est BF aequalis ipsi BC, et rectae CD bis; hoc est ipsi BC, rectisque CA, AD bis sumptis, hoc est ipsis BA, AC simul, et rectae AD bis. Est autem AD ea quae potest rectangulum BAC, quia proportionales sunt BA, AD, AC, quare AD bis est ea quae potest rectangulum BAC quater. Igitur ratio maxima, hoc est ratio rectae E ad ipsam

BF, ea est quam habet E ad utramque BA, AC una cum ea quae potest rectangulum BAC quater. Determinatio autem haec habetur in Prop. 20. Lib. 7. Pappi Alexandrini, et est Lemma in Libros Apollonii de Sectione Rationis et Spatii.

PROB. V.

“DATIS in recta linea tribus punctis, quantum invenire
 “inter ipsa, viz. inter quodlibet ex extremis et punctum me-
 “dium, quod faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et
 “duo ex punctis datis, ad quadratum ex segmento inter ip-
 “sum et reliquum punctum datum, in ratione data.”

PROP. LI. PROB. V. EPITAGMA I..

“DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quantum D
 “invenire inter puncta C, B, quod faciet rectangulum ADC
 “a segmentis inter D et puncta A, C quae sunt ad easdem
 “ipfius partes, ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et
 “reliquum punctum B, in ratione data.”

CAS. I. Quando ratio data est aequalis ad aequale:

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC aequale qua-
 drato ex DB. Est igitur AD ad DB,
 ut BD ad DC; et ^a AD ad DB, ut $\frac{A}{AB} = \frac{C}{BC} = \frac{D}{DB}$ ^{12. 5.}
 Data autem est ratio AB
 ad BC, quare data est ratio AD ad
 DB. Et data est AB, igitur ^b datum est punctum D. ^{b 8. Dat.}

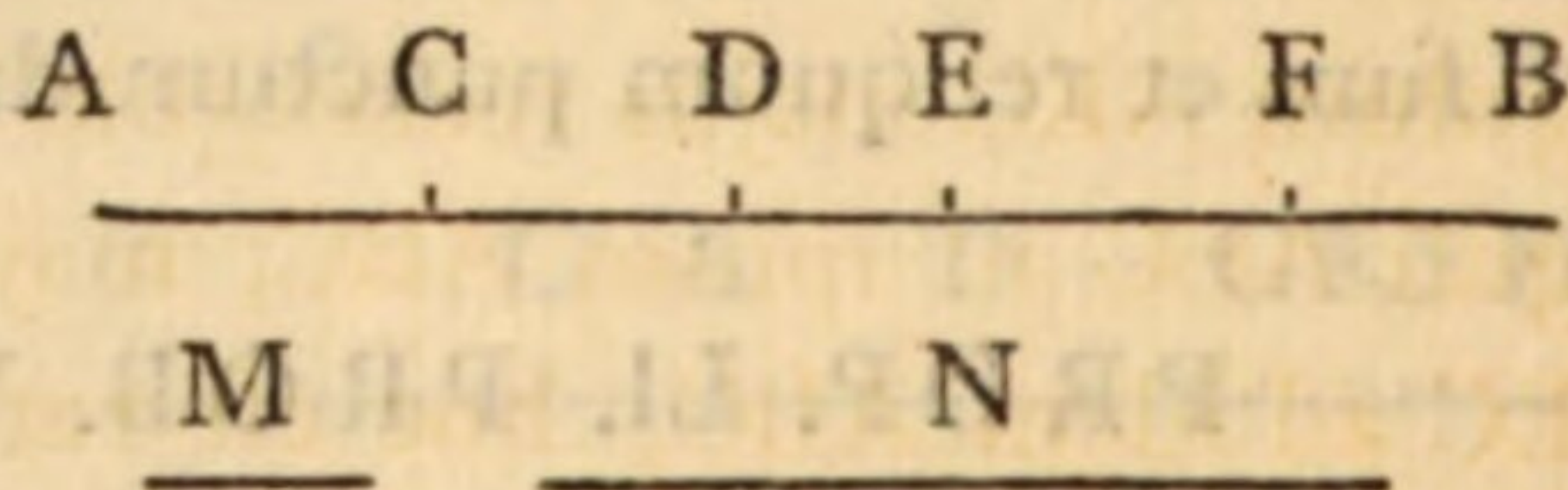
Componetur ita,

Secetur AB in D ita ut AD sit ad DB, ut AB ad BC; erit
^e 19. 5. D punctum inveniendum. Nam erit ^e AD ad DB, ut DB ad DC. Igitur rectangulum ADC aequale est quadrato ex DB.

CAS. 2. Quando ratio data non est aequalis ad aequale.

Factum puta; habeat scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB rationem datam; rectangulo autem ADC aequale sit rectangulum BDE, positâ DE ad partes puncti B. Quoniam igitur data est ratio rectanguli ADC, hoc est ipsius BDE ad quadratum ex BD,

data erit ratio rectae ED ad
 ipsam DB. Est autem, per
 Prop. 1. hujus, BD ad DE,
 ut rectangulum ABC ad ip-



suum AEC; horum igitur ratio data est. Et datum est rectangulum ABC, datum igitur est ipsum AEC; et data est

^d 85. Dat. recta AC, quare datum est ^d punctum E, et recta EB data erit.

^e 6. et 2. Dat. Data autem ostensa est ratio ED ad DB, datum igitur ^e est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ea quam habet recta M ad ipsam N; et fiat ut N ad M, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita CB ad BF, nam ita erit rectangulum

^f 29. 6. ABC ad ipsum ABF. Ad rectam vero AC applicetur ^f versus partes puncti B rectangulum aequale ipsi ABF excedens quadrato, sitque E punctum applicationis, et ut FC ad CB, ita fiat EB ad BD, sumatur autem punctum D in BE producta

versus C; erit D punctum inveniendum. Primò autem ostendendum est ipsum cadere inter puncta C, B. Quoniam est FC ad CB, ut EB ad BD, erit (componendo in casu quo M major est N, et dividendo inverse in casu quo M minor est N) FB ad BC, ut ED ad DB; igitur rectangulum ABF, hoc est, ex constructione, rectangulum AEC est ad ipsum ABC, ut ED ad DB. Si

$$\begin{array}{ccccccc} A & & C & & D & & B \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \end{array}$$

igitur ratio data rectae M ad ipsam N fit majoris ad minorem, erit rectangulum ABF majus ipso ABC, ut ex praemissis patet, quare et DE major erit DB; unde et AE major erit AB, et rectangulum AEC majus rectangulo AB, EC. Ratio igitur rectanguli AEC ad ipsum ABC, major erit ratione rectanguli AB, EC ad idem ABC, hoc est ratione rectae EC ad ipsam CB. Ostensum autem fuit esse rectangulum AEC ad ipsum ABC, ut recta ED ad ipsam DB; ratio igitur ED ad DB, major est ratione EC ad CB; igitur recta ED minor est ipsa EC, et cadet punctum D inter puncta C, B. Eadem vero demonstratio infervit casui in quo ratio data M ad N est minoris ad majorem, legendo "minor" vice "major," et "minus" vice "majus," usque ad "igitur recta ED minor est ipsa EC," &c. quae in utroque casu legenda sunt. Quoniam vero est ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipsum ABC, erit, per conversam Prop. 1. rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Rectangulum autem ADC, hoc est ipsum BDE, est ad quadratum ex BD, ut recta ED ad ipsam DB, hoc est ut FB ad BC, hoc est ut recta M ad ipsam N, hoc est in ratione data.

Manifestum autem est puncta ipsi B propiora majores facere rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora.

PROB. V. EPITAGMA I. ALITER.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum D
 “ invenire inter puncta C, B quod faciat rectangulum ADC
 “ ad quadratum ex DB in ratione data.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, centroque E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ducatur recta DF ipsum contingens in F, occurratque FD in puncto G rectae BG quae ad rectos angulos

^a 36. 3. ducta est ipsi AB. Est igitur ^a

quadratum ex FD aequale rectangulo ADC, quare, ex hypothesis, data est ratio quadrati ex FD ad quadratum ex DB, et propterea ratio rectae FD ad ip-

^b 59. Dat. sam DB data ^b est. Junctâ autem

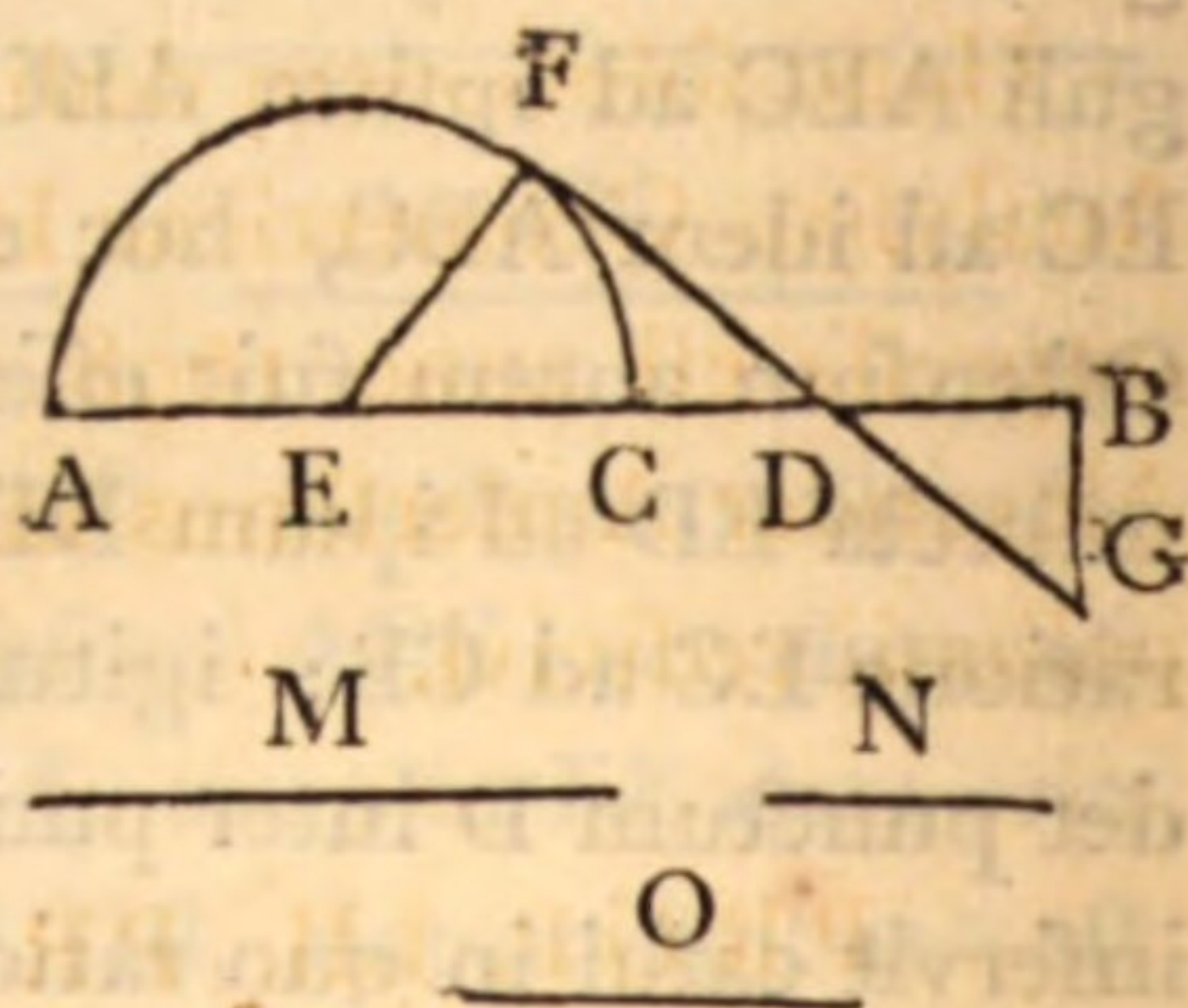
^c 18. 3. EF, rectus ^c est angulus EFD, et rectus est DBG, quare aequian-

gula sunt triangula DFE, DBG. Ut igitur FD ad DB, ita est EF ad BG; data propterea est ratio EF ad BG, et data est recta EF, magnitudine igitur data est BG, sed et positione, datumque est punctum B, quare datum est punctum G, et

^d 94. Dat. recta GF positione data erit ^d. Sed et recta AB positione data est; datum igitur est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB ea quam habet data recta M ad datam N, et



inter M et N media proportionalis inveniatur O; bifariamque sectâ AC in E, fiat ut M ad O, ita EC ad quartam BG, quae ponatur a puncto B ad rectos angulos ipsi AB. A puncto vero G ducatur recta GF contingens circulum super diametrum AC descriptum in puncto F, ad contrarias scilicet partes rectae AB ad quas est G; occurratque GF ipsi AB in D; erit D punctum inveniendum. Patet enim illud esse inter C, B puncta, et junctâ EF, propter aequiangula triangula, est quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, five EC ad quadratum ex BG, hoc est ut quadratum ex recta M ad quadratum ex ipsa O, hoc est^e ut recta M ad rectam N, hoc est in ratione data. ^{e2.cor. 20.6.}

Hanc solutionem dedit Rogerius Ventemiglia in pag. 256. Analyseos Geometricae Hugonis de Omerique, quae Gadibus impressa est anno 1698. et multo melior est eâ quam dedit Alexander Anderfonus in Cas. 1. Prob. 9. supplementi sui Apollonii redivivi.

PROP. LII. PROB. V. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
 “ invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum ADC
 “ a segmentis inter ipsum et puncta extrema A, C ad qua-
 “ dratum ex segmento DB inter ipsum et punctum medium
 “ B, in ratione data.”

CAS. 1. Quando ratio data est aequalis ad aequale.

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC aequale quadrato ex DB, et ipsi BD aequalis fiat DE. Quoniam igitur est

N



AD ad DB, ut DB, five DE ad DC, dividendo, erit AB ad BD, ut EC ad CD; et permutando, ut AB ad CE, ita BD ad DC; quare et AB ad CE, est ut BD bis, hoc est BE ad DC bis; ut igitur ^a AB ad CE, ita est AE ad ED una cum DC, hoc est ad BC. Rectangulum igitur AEC aequale est dato rectangulo ABC. Et data est recta AC, et punctum E est in AC producta, quia AD major est DB, et propterea BD, five DE major est ipsâ DC; datum igitur ^b est punctum E, quare et punctum D.

A B D C E

Componetur ita,

^c 29. 6. Ad datam rectam AC applicetur ^c rectangulum aequale dato rectangulo ABC excedens quadrato, fitque E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes puncti C, et bifariam fecetur BE in D; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim, ex constructione, rectangulum AEC aequale est ipsi ABC, ut EA ad AB, ita est BC ad CE; major autem est EA ipsâ AB, quare BC major est CE; est igitur BC major dimidio ipsius BE, hoc est ipsâ BD, quare punctum D cadit inter puncta B, C. Et quoniam est AB ad CE, ut AE ad CB, hoc ^d est ad DE una cum DC, erit ^d AB ad CE, ut (BE ad DC bis, hoc est ut) BD ad DC; et permutando, componendoque, est AD ad DB, ut ED, hoc est BD ad DC. Igitur rectangulum ADC aequale est quadrato ex BD.

CAS. 2. Quando aequales sunt AB, BC.

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex BD in ratione data. Igitur, componendo, quadratum

ex AB erit^a ad quadratum ex BD in ratione data. Datum autem est quadratum ex AB, quare et quadratum ex BD, et ipsa BD data erit; datum igitur est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex BD ea quam habet recta FG ad ipsam GH, et inter FH et HG media proportionalis inveniatur HK, ut vero FH ad HK, ita fiat AB ad BD; erit D punctum invenendum. Quoniam enim FH major est HK, erit AB, hoc est BC major BD; quare cadet punctum D inter B, C. Et quoniam est AB ad BD, ut FH ad HK, erit^b quadratum ex AB ad quadratum ex BD, ut (quadratum ex FH ad illud ex HK, hoc est^d ut) recta FH ad ipsam HG. Igitur, dividendo, est rectangulum ADC ad quadratum ex BD, ut FG ad GH, hoc est in ratione data.

A B D C

F K G H

^b 22. 6.

^d cor. 2. 20. 6.

Si vero in hoc casu ratio data fuerit aequalis ad aequale, erit FH dupla ipsius HG, quare et quadratum ex AB duplum erit quadrati ex BD. Unde BD erit latus quadrati cuius diameter est AB.

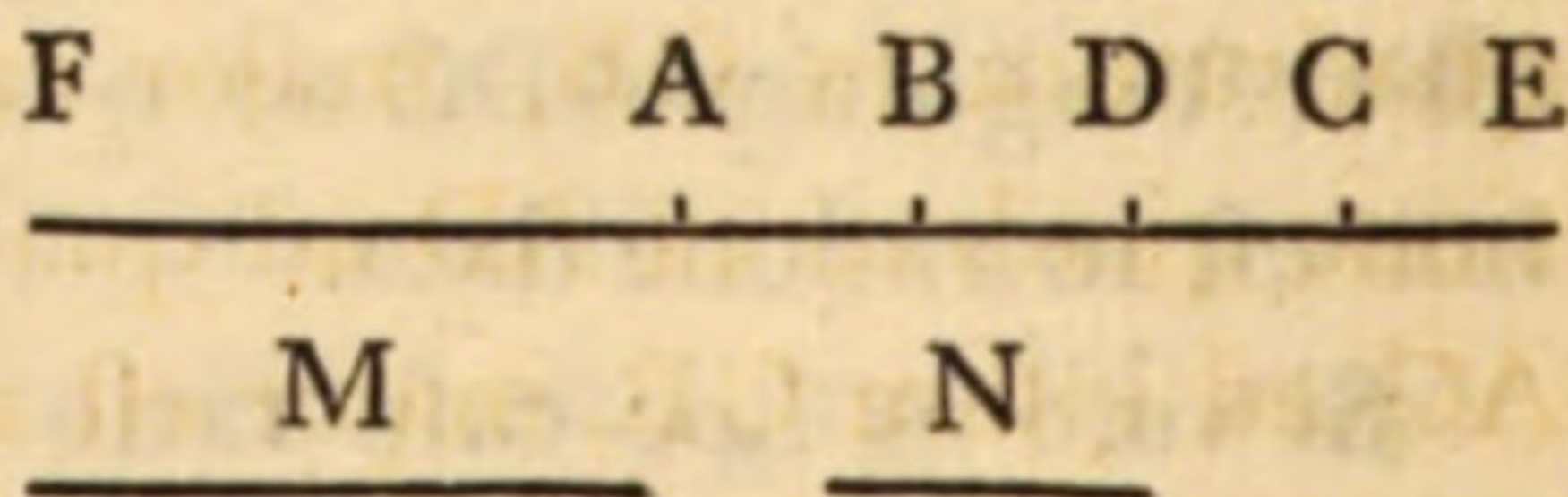
CAS. 3. Quando ratio data non est aequalis ad aequale, et inaequales sunt AB, BC.

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Et ipsi ADC aequale sit rectangulum BDE, positâ rectâ DE in AD producta ad partes C. Quoniam igitur data est ratio rectanguli ADC, hoc est ipsius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipsam DB.

Est autem, per Prop. 8. ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipsum ABC; horum igitur ratio data est; et datum est ABC, quare et rectangulum AEC. Et quoniam rectangulum ADC aequale est ipsi BDE, et est AD major BD, erit DE major DC; punctum igitur E est in AC producta. Quoniam vero datum
^a 85. Dat. est rectangulum AEC, datum erit ^a punctum E, quare data est recta EB; et data ostensa est ratio rectae ED ad ipsam
^b 8. Dat. DB, punctum igitur ^b D datum est.

Componetur vero ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB ea quam habet recta M ad rectam N. Et fiat ut N ad M, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita CB ad BF, nam ita erit rectangulum
^a 29. 6. ABC ad ipsum ABF. Ad rectam vero AC applicetur ^a, versus partes C, rectangulum aequale ipsi ABF excedens quadrato, fitque E punctum applicationis; ut vero FC ad CB, ita fiat EB ad BD, fumatur autem punctum D in AB producta versus C; erit D punctum inveniendum. Primò autem ostendendum est ipsum cadere inter puncta B, C. Quoniam est FC ad CB, ut EB ad BD, erit FB ad BC, ut ED ad DB; igitur rectangulum ABF, hoc est, ex constructione, rectangulum AEC est ad ipsum ABC, ut ED ad DB. Est autem AE major AB, quare rectangulum AEC majus est ipso AB, EC; ratio igitur rectanguli AEC ad ipsum ABC, hoc est ratio rectae ED ad ipsam DB, major est ratione rectanguli AB, EC ad idem ABC, hoc est ratione rectae EC ad ipsam CB. Quoniam igitur ratio ED ad DB, major



est ratione EC ad CB, erit punctum D propius puncto B quam est punctum C. Cadit igitur punctum D inter puncta B, C. Quoniam vero est ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipsum ABC, erit per conversam Prop. 8. rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Est autem rectangulum ADC, hoc est BDE, ad quadratum ex DB, ut ED ad DB, hoc est ut FB ad BC, hoc est in ratione data.

Puncta autem ipsi B propiora majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora. Sit enim punctum G propius ipsi B quam punctum D. Est igitur ratio CG ad GA, major ratione CD ad DA, quare et ratio rectanguli AGC ad quadratum ex

AG, major est rectanguli ADC ad quadratum ex DA. Est autem ratio quadrati ex AG ad quadratum ex GB, major ratione quadrati ex AD ad quadratum ex DB, quia ratio rectae AG ad ipsam GB, major est ratione AD ad DB. Igitur ex aequali ratio rectanguli AGC ad quadratum ex GB, major est ratione rectanguli ADC ad quadratum ex DB.

COR. Hinc si rectangulum ADC aequale fuerit quadrato ex DB, puncta quaevis inter B et D faciunt rectangulum majus quadrato; puncta autem inter D et C faciunt rectangulum minus quadrato.

PROB. V. EPITAGMA 2. ALITER.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
 “ invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum ADC
 “ ad quadratum ex DB in ratione data.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, centroque E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ducatur ad rectos angulos ipsi AC recta DF, et BF jungatur. Est igitur quadratum ex DF aequale rectangulo ADC, quare, ex hypothesi, da-

^a 59. Dat. data^a est ratio rectae FD ad ipsam DB; datus autem est angulus BDF; triangulum igitur

^b 44. Dat. BDF specie datum^b est, datus propterea est angulus DBF; et datum est punctum B, recta

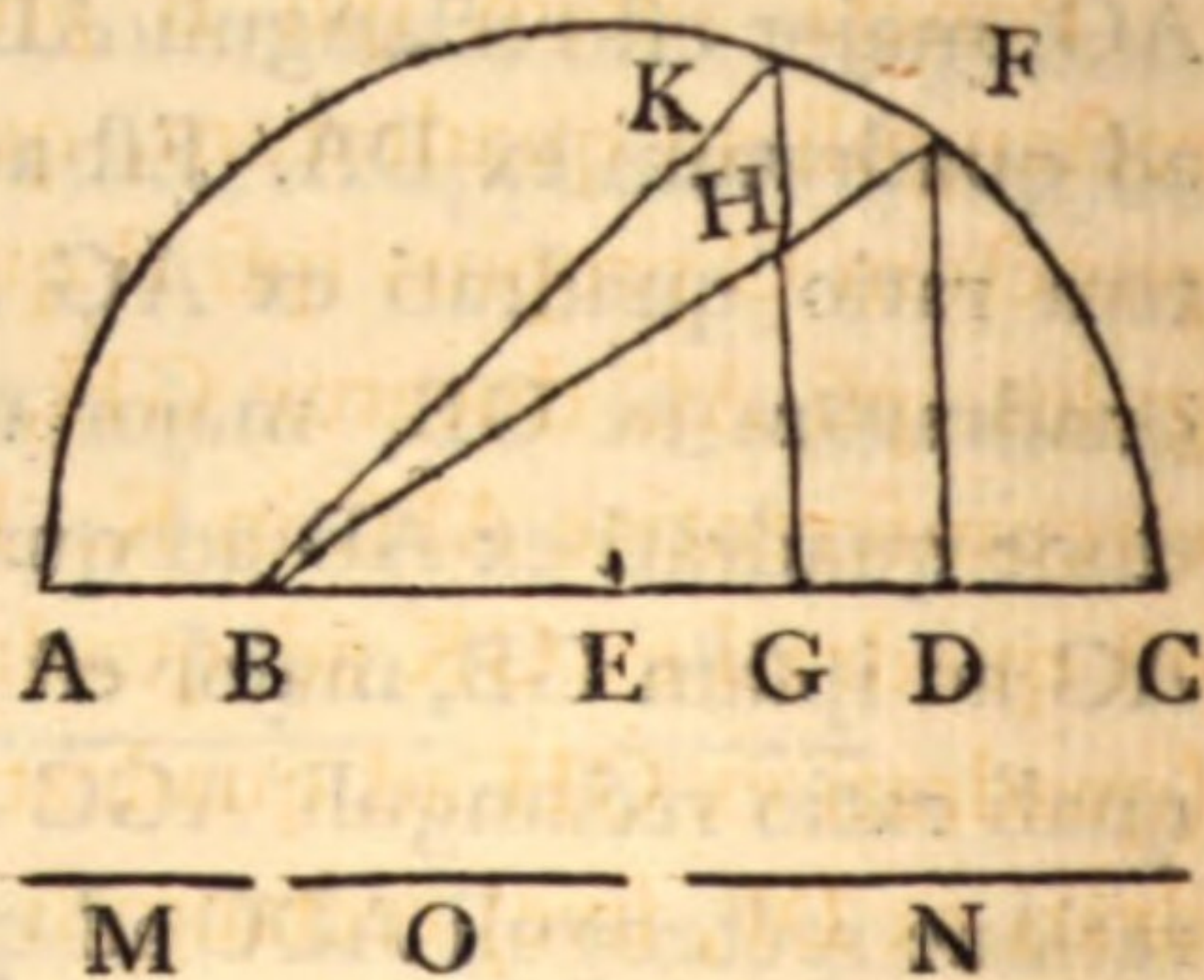
^c 32. Dat. igitur BF positione data^c est;

^d 28. Dat. et positione data est circumferentia AFC, datum^d igitur est punctum F, et propterea recta FD positione data^c est; et data

^e 33. Dat. est AC positione, datum^c igitur est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB ea quam habet data recta M ad datam N, et inter M et N media proportionalis inveniatur O. Sumatur autem quodvis punctum G inter B et C, et fiat ut recta O ad



M, ita BG ad quartam GH, quae ponatur ad rectos angulos ipsi AC, et juncta BH occurrat circumferentiae super diametrum AC descriptae in F, ad eas scilicet partes rectae AC ad quas est H; ad AC vero ducatur perpendicularis FD, erit D punctum inveniendum. Patet enim D esse inter puncta B, C; et quia aequiangula sunt triangula BDF, BGH, est quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex HG ad quadratum ex GB, hoc est ut quadratum ex recta M ad quadratum ex recta O, hoc est ^f ut recta ^f2.cor. 20. 6. M ad ipsam N, hoc est in ratione data.

Hanc constructionem dedit Alexander Anderfonus in Cas. 1. Prob. 9. pag. 22. supplementi Apollonii redivivi.

Puncta autem ipsi B propiora majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora. Sit enim punctum G propius ipsi B quam punctum D, et ad rectos angulos ipsi AC ducatur GH, occurratque rectae BF in H, et circumferentiae AFC in K. Ratio igitur rectanguli AGC, hoc est quadrati ex GK ad quadratum ex GB, major est ratione (quadrati ex GH ad quadratum ex GB, hoc est ratione quadrati ex DF, sive) rectanguli ADC ad quadratum ex DB.

PROP. LIII. PROB. V. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “ invenire inter punctum medium A et utrumlibet ex extre-
 “ mis C, quod faciet rectangulum ADC a segmentis inter D
 “ et puncta A, C ad quadratum ex segmento DB inter D et
 “ reliquum extremum B, in ratione data.”

CAS. I. Quando ratio data est aequalis ad aequale.

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC aequale quadrato ex BD, et ipsi BD aequalis fiat DE. Quoniam igitur est CD ad DB, hoc est ad DE, ut BD ad DA, erit, dividendo, CE ad ED, ut BA ad AD; permutandoque, CE ad AB, ut ED ad DA; quare et CE ad AB, ut ED

^a 12. 5. bis, hoc est BE ad AD bis; et ^a CE B A D E C
ad AB, ut BC ad AD una cum BD, —————

hoc est ad AE. Rectangulum igitur AEC aequale est dato rectangulo CBA. Et data est recta AC, et est punctum E inter A, C quia CD major est DB, hoc

^b 86. Dat. est ipsa DE, est enim BD major DA. Datum igitur ^b est punctum E, et propterea punctum D.

Ut vero constructio fieri possit, necesse est rectangulum

^c 5. 2. CBA non majus ^c fit quadrato ex dimidio ipsius AC. Si vero spatia haec inter se aequalia fuerint, bifariam secetur AC in E, et rursus bifariam secetur BE in D, punctumque D efficiet

^d 6. 2. Problema. Est ^d enim quadratum ex BE aequale rectangulo CBA una cum quadrato ex AE, hoc est, ex hypothese, quadrato ex AE bis. Dimidium igitur quadrati ex BE, hoc est quadratum ex BD bis, aequale est quadrato ex AE, quorum quadratum ex BD aequale est quadrato ex DE; reliquum igitur quadratum ex BD aequale est reliquo, rectangulo scilicet ADC.

Si vero rectangulum CBA minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius AC, applicetur ^e ad rectam AC rectangulum aequale ipsi CBA, deficiens quadrato, fitque E punctum applicationis utrumlibet, et bifariam secetur BE in D; erit D punc-

tum inveniendum. Quoniam enim, ex constructione, rectangulum AEC aequale est rectangulo CBA, erit BC ad CE, ut EA ad AB; est autem BC major CE, quare EA major est AB, et propterea EA major est dimidio ipsius EB, hoc est ipsâ ED; cadit igitur punctum D inter puncta A, C. Et quoniam est CE ad AB, ut CB ad EA, hoc est ad BD una cum DA, erit^f CE ad AB, ut (BE ad AD^f cor. 19. 5. bis, hoc est ut) ED ad DA; et permutando, componendoque, est CD ad DE, ut BD ad DA. Rectangulum igitur ADC est aequale ipsi BDE, hoc est quadrato ex DB.

B A D E C

CAS. 2. Quando, bifariam sectâ AC in E, ratio data eadem est rationi quadrati ex AE ad quadratum ex EB.

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex AE ad quadratum ex EB. Erit igitur invertendo, ut quadratum ex BE ad quadratum ex EA, ita quadratum ex DB ad rectangulum ADC; quare^a erit reliquum, excessus scilicet quadrati ex BE supra quadratum ex DB, ad reliquum^b quadratum ex DE, ut totum, quadratum^b 5. 2. scilicet ex BE ad totum quadratum ex AE; igitur componendo, ut excessus quadratorum ex BE, ED supra quadratum ex DB, hoc est^c ut duplum rectangulum BE, ED ad quadratum ex DE, hoc est ut recta BE bis ad rectam DE, ita quadrata BE, EA ad quadratum ex AE. Horum autem ratio data est, quia data sunt B, A, E puncta; data igitur est ratio rectae BE bis ad rectam ED; et data est BE, igitur data est ED, et datum erit punctum D.

Componetur ita,

Fiat ut quadrata ex BE, EA simul ad quadratum ex AE, ita recta BE bis ad quartam ED quae ponatur a puncto E versus A; erit D punctum inveniendum. Primò autem ostendendum est ED minorem esse EA, hoc est punctum D esse inter E, A puncta. Ex proportione praecedente, et dividendo, est quadratum ex BE ad quadratum ex EA, ita (recta BD bis una cum DE ad ipsam DE, et ita) est duplum rectangulum BDE una cum quadrato ex DE ad quadratum ex DE. Quadratum autem ex BE majus^d est duplo rectangulo BDE una cum quadrato ex DE, ergo^c quadratum ex AE majus est quadrato ex ED. Et recta AE major ipsa ED; cadit igitur punctum D inter A et C. Et quoniam, ex constructione, ut quadrata ex BE, AE simul ad quadratum ex AE, ita (recta BE bis ad ipsam ED, hoc est ita duplum rectangulum BED ad quadratum ex ED, hoc est^c ita) excessus quadratorum ex BE, ED supra quadratum ex BD ad quadratum ex DE, dividendo, erit quadratum ex BE ad quadratum ex EA, ut excessus quadrati ex BE supra quadratum ex BD ad quadratum ex DE; quare^a ut reliquum, quadratum scilicet ex BD ad reliquum rectangulum ADC, ita est quadratum ex BE ad quadratum ex EA; et invertendo, ut rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ita est quadratum ex AE ad quadratum ex EB.

B A D E C
 —————

CAS. 3. Quando ratio data est quaevis alia quam in duobus praecedentibus casibus.

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Rectangulo ADC aequale fit rectangulum BDE, positâ DE versus partes puncti C. Quoniam igitur data est ratio rectanguli ADC, hoc est ipsius BDE, ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipsam DB. Est autem, per Prop. 8. BD ad DE, ut rectangulum CBA ad ipsum AEC, horum igitur ratio data est; et datum est rectangulum CBA, quare et AEC datum est. Et quoniam rectangulum BDE aequale est ipsi ADC, est autem BD major AD, erit CD major DE. Punctum igitur E cadit inter A, C puncta. Et quoniam datum est rectangulum AEC, et data est recta AC, datum^a erit punctum E, quare data est recta BE. Et data^a 86. Dat. ostensa est ratio BD ad DE, datum^b igitur est punctum D. ^b 8. Dat.

Quoniam vero ad compositionem, qua inveniendum est punctum E, requiritur ut ad datam rectam AC applicetur rectangulum AEC dato rectangulo aequale, ei scilicet ad quod rectangulum CBA datam habet rationem BD ad DE, deficiens quadrato, Problema non semper construi potest, quoties scilicet rectangulum datum, cui aequale applicandum est rectae AC, majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius AC^c. Fiet^c 27. 6. autem modo singulari, si rectangulum hoc aequale fuerit quadrato ex dimidio rectae AC, hoc est si punctum applicationis E inciderit in medium rectae AC.

Ita autem invenietur punctum D, et ratio rectanguli ADC ad quadratum ex DB in hoc casu. Bifariam secetur AC in E, et puta D esse punctum inveniendum quod scilicet facit rectangulum BDE aequale ipsi ADC; addito igitur communi

^d 3, et 5. 2. quadrato ex DE, erit rectangulum BED aequale ^d dato quadrato ex AE, datum propterea est rectangulum EDB, et data est recta BE; data igitur est ED, datumque erit punctum D.

Componetur hoc ita,

Bifariam fecetur AC in E, et ipsis BE, EA tertia proportionalis inveniatur ED, quae ponatur a puncto E versus B. Et quoniam BE major est AE, erit AE major ED, et cadet punctum D inter A, C puncta. Est autem rectangulum BED aequale quadrato ex AE, et ablato communi quadrato ex DE, reliquum rectangulum BDE aequale est reliquo rectangulo ADC. Et quoniam proportionales

^e 2. cor. 20. 6. sunt BE, EA, ED, erit ^e BE ad ED,

B A D E C

ut quadratum ex BE ad quadratum ex EA, et dividendo, ut BD ad DE, ita est rectangulum CBA ad quadratum ex AE, invertendoque, erit ut ED ad DB, hoc est ut rectangulum BDE, five ADC ad quadratum ex DB, ita quadratum ex AE five rectangulum AEC ad rectangulum CBA. Data igitur est ratio rectanguli ADC ad quadratum ex DB, eadem scilicet rationi quadrati ex dimidio ipsius AC ad rectangulum CBA, hoc est eadem rationi quadrati ex AC ad quadruplum rectanguli CBA.

Inquirendum autem est an punctum D majorem facit rationem an minorem rectanguli ad quadratum, quovis alio puncto in ipsa AC. Manentibus igitur jam descriptis, fumatur inter A et C aliud quodvis punctum G, et rectangulo AGC aequale fiat BGH; est igitur BG ad AG, ut GC ad GH; major autem est BG ipsâ AG, quare GC major est GH; cadit igitur punctum H inter puncta G, C. Non autem incidet H in punctum E, quod patet si fuerit G inter E et C, neque

cadet in E si G fuerit inter A et E, etenim esset rectangulum BGE, hoc est ipsum BGH aequale rectangulo AGC, et, addito communi quadrato ex GE, esset rectangulum BEG aequale quadrato ex AE, hoc est rectangulo BED, et punctum G coincideret puncto D, contra hypothefin. Quoniam vero aequales sunt AE, EC, rect-

angulum AEC majus^f est B A D E G H C^f 5. 2.

ipso AHC, igitur ratio

rectanguli AEC ad ipsum

CBA major est ratione

rectanguli AHC ad idem

CBA. Ostensum autem

fuit esse ED ad DB, ut

rectangulum AEC ad ipsum CBA; et similiter quoniam rect-

angulum AGC aequale est ipsi HGB, erit, per Prop. 8. ut HG †

ad GB, ita rectangulum AHC ad ipsum CBA; quare ratio

rectae ED ad rectam DB, major est ratione rectae HG ad ip-

sam GB, et propterea ratio rectanguli BDE, hoc est rectan-

guli ADC ad quadratum ex DB, major est ratione rectanguli

BGH, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB. Punctum

igitur D facit maximam rationem rectanguli ad quadratum.

Ostendendum restat puncta ipsi D propiora majores facere rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti D.

Manentibus jam descriptis, sit in recta AC punctum K remotius a puncto D quam est punctum G, sint autem puncta K, G ad easdem partes ipsius D. Rectangulo AKC aequale fiat rectangulum BKL. Erit igitur punctum L inter puncta K, C, quod eodem modo ostendetur quo punctum H osten-

sum fuit esse inter puncta G, C. Et primò, sit punctum G inter punctum D, quod facit maximam rationem, et punctum C; et in hoc casu erit punctum H inter punctum E quod bifariam secat rectam AC, et punctum C; quod quidem manifestum est si fuerit G in E, vel inter E, C puncta, quia rectangulum AGC aequale est ipsi BGH. At si G fuerit inter puncta D, E, quoniam rectangulum BDE aequale est ipsi ADC, erit, per partem 1. Prop. 27. rectangulum BGE minus ipso AGC, hoc est rectangulo BGH, quare recta GE minor est ipsâ GH, et punctum H erit inter E et C. Si igitur punctum K incidere in ipsum H, vel fuerit inter H et C, patet punctum L quod est inter K et C remotius esse a puncto E quam punctum H. Si vero punctum K fuerit inter puncta G, H, quoniam rectangulum BGH aequale est ipsi AGC, erit, per partem primam Prop. 27. rectangulum BKH minus ipso AKC, hoc est rectangulo BKL; quare recta KH minor est ipsâ KL, et punctum L remotius erit a puncto E quam punctum H. Secundo, sit punctum G inter punctum D et ipsum A; et quoniam rectangulum BDE aequale est ipsi ADC, erit, per partem 2. Prop. 27. rectangulum BGE majus ipso AGC, hoc est rectangulo BGH, quare recta GE major est rectâ GH, et punctum H erit inter puncta G, E. Et quoniam punctum K est inter A, G puncta, est enim remotius a

$$\begin{array}{ccccccc} B & & A & D & E & G & K & H & L & C \\ \hline & & | & | & | & | & | & | & | & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} B & & A & D & G & K & E & H & L & C \\ \hline & & | & | & | & | & | & | & | & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} B & & A & K & G & D & L & H & E & C \\ \hline & & | & | & | & | & | & | & | & \end{array}$$

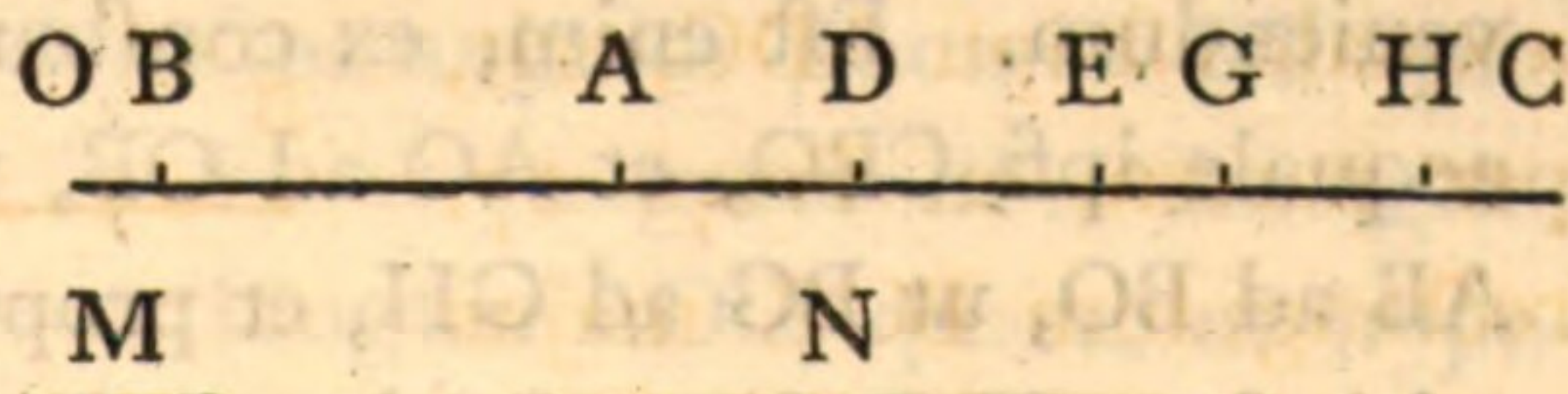
puncto D quam ipsum G, et ad easdem partes ipsius D, et quoniam rectangulum BGH aequale est ipsi AGC, erit, per partem 2. Prop. 27. rectangulum BKH majus ipso AKC, hoc est rectangulo BKL; recta igitur KH major est ipsâ KL, et punctum L remotius erit a puncto E quam punctum H; quod etiam in casu primo ostensum fuit. In utroque igitur casu rectangulum AHC majus^e est ipso ALC. Ergo ratio rectanguli AHC ad ipsum CBA, major est ratione rectanguli ALC ad idem CBA. Ostensum autem fuit † rectangulum AHC esse ad ipsum CBA, ut recta HG ad ipsam GB; et quoniam rectangulum AKC aequale est ipsi BKL, similiter prorsus ostendetur rectangulum ALC esse ad ipsum CBA, ut recta LK ad ipsam KB. Est igitur ratio rectae HG ad rectam GB, major ratione rectae LK ad ipsam KB; quare et ratio rectanguli BGH, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB, major est ratione rectanguli BKL, hoc est rectanguli AKC ad quadratum ex KB. Puncta igitur propiora ipsi D ad utraque ipsius partes faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora ad easdem partes.

^e 5. 2.

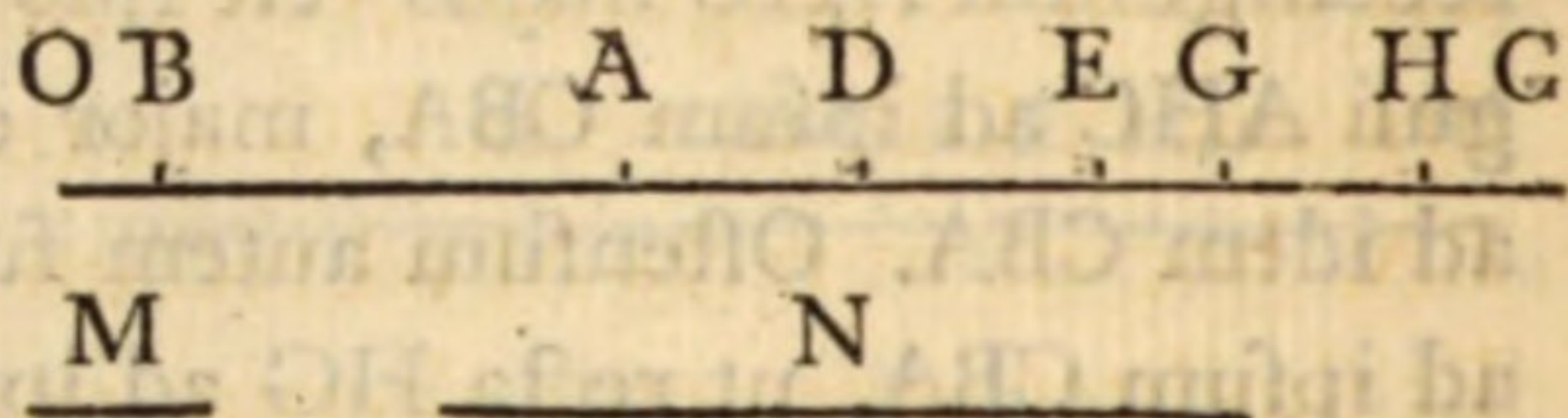
† Vide hanc notam in pag. 109.

Componetur vero Problema ita,

Sint B, A, C tria puncta data in recta linea, sitque ratio quam habere debet rectangulum a segmentis inter punctum inveniendum et puncta A, C ad quadratum ex segmento inter ipsum et reliquum punctum B, ea quam habet recta M ad rectam N. Et inve-



niatur, ut in praemissis ostensum, punctum D quod facit maximam rationem rectanguli ad quadratum, hoc est rationem eandem quam habet quadratum ex AE dimidio ipsius AC ad rectangulum CBA. Si igitur ratio M ad N eadem fuerit huic rationi, punctum D, idque solum, efficiet Problema, quia punctum aliud quodvis inter A et C facit minorem rationem rectanguli ad quadratum.



Si vero ratio M ad N major fuerit ratione hac

maxima, Problema construere non potest. Quod si proponatur ratio M ad N minor ratione quadrati ex AE ad rectangulum CBA, fiat ut N ad M, ita rectangulum CBA ad aliud, quod inveniatur faciendo ut N ad M, ita AB ad rectam BO, nam ita erit rectangulum CBA ad ipsum CBO. Et quoniam, ex hypothese, ratio M ad N, hoc est ratio rectanguli CBO ad ipsam CBA minor est ratione quadrati ex AE ad idem rectangulum CBA, erit rectangulum CBO minus quadrato ex AE.

- *28. 6. Igitur ad rectam AC applicari potest ^g rectangulum aequale ipsi CBO deficiens quadrato; applicetur, et sit H utrumlibet ex applicationum punctis. Fiat autem ut AO ad OB, ita BH ad HG, sumpto G inter puncta B et H; erit G punctum inveniendum. Est enim, ex constructione, rectangulum AHC aequale ipsi CBO, et AO ad OB, ut BH ad HG; quare est AB ad BO, ut BG ad GH, et propterea rectangulum CBA est ad ipsum CBO, hoc est ad rectangulum AHC, ut BG ad GH. Est autem BC major HC, quare rectangulum AH, BC majus est ipso AHC; ratio igitur rectanguli CBA ad ipsum AHC,

hoc est ratio rectae BG ad rectam GH, major est ratione (eiusdem CBA ad ipsum AH, BC, hoc est ratione) BA ad AH; igitur BG major est BA, et punctum G cadit propterea inter A, C puncta. Quoniam vero rectangulum CBA est ad ipsum AHC, ut BG ad GH, ut prius ostensum; erit, per conversam Prop. 8. rectangulum BGH aequale rectangulo AGC. Est autem rectangulum AGC, hoc est ipsum BGH ad quadratum ex GB, ut recta HG ad rectam GB, hoc est ut OB ad BA, hoc est ut recta M ad rectam N, hoc est in ratione data. Et similiter invenietur alterum punctum quod solvet Problema, ope reliqui puncti applicationis.

PROB. V. EPITAGMA 3. ALITER.

“DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “invenire inter punctum medium A et utrumlibet ex extre-
 “mis C, quod faciet rectangulum ADC ad quadratum ex DB,
 “in ratione data.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, centroque E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur DF quae circumferentiae occurrat in F, et jungatur BF. Est igitur quadratum ex DF aequale rectangulo ADC, quare, ex hypothesis, data est ratio quadrati ex DF ad quadratum ex DB, quare data^a est ratio rectae DF ad ipsam DB; et datus est^a 59. Dat.

^b 44. Dat. angulus BDF, igitur ^b triangulum BDF specie datum est, da-

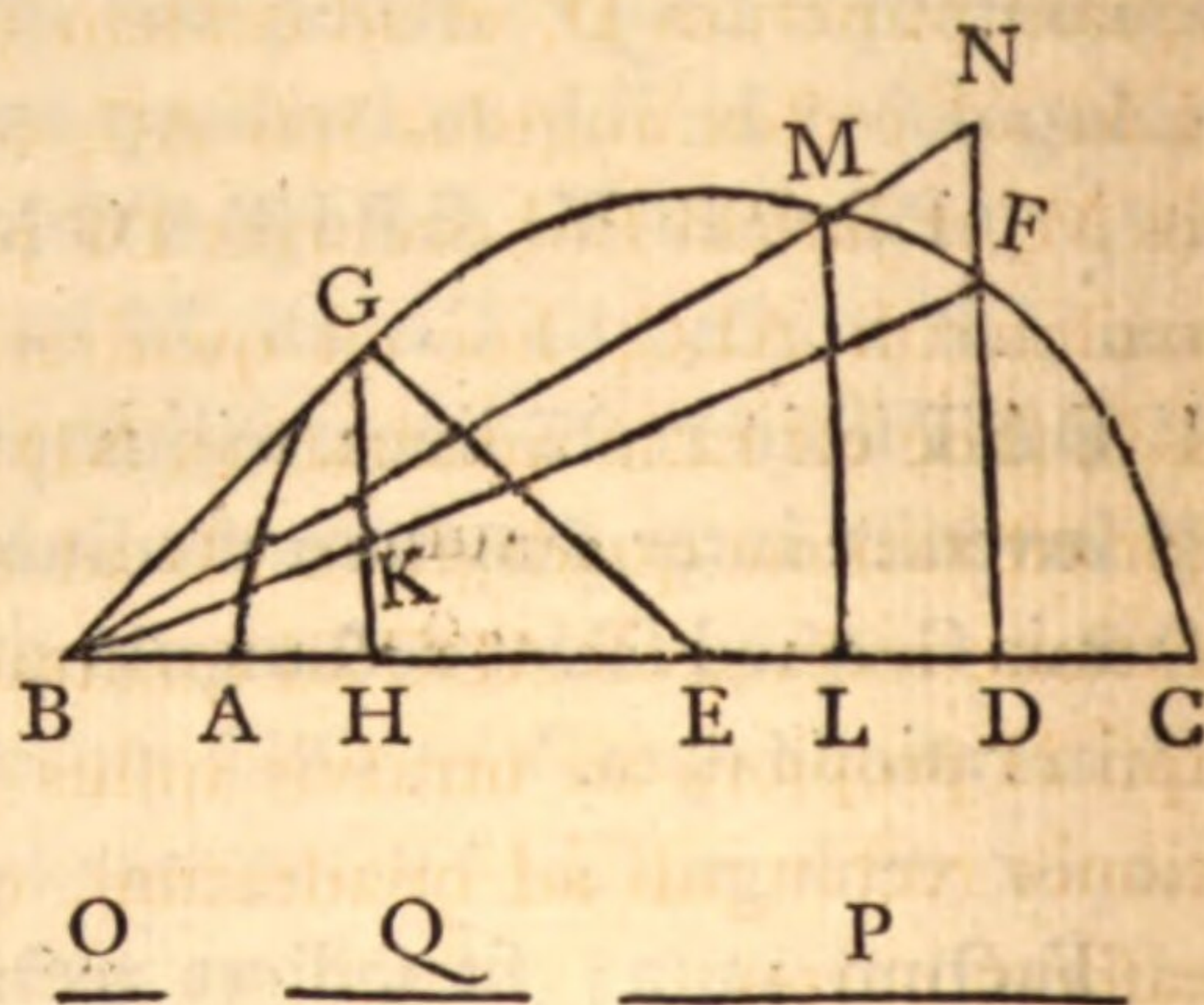
* 32. Dat. tuncque erit angulus DBF; et datum est punctum B, quare ^c recta BF positione data est; et positione data est circumferen-

^d 28. Dat. tia AFC, datum igitur^d est punctum F, et recta FD positione^e;

^e 33. Dat. et propterea datum ^d est punctum D.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut recta BF, quae positione data ostensa est, occurrat circumferentiae positione datae AFC, quod non semper fieri potest, ideo Problema in omni casu non construi potest. Fiet autem modo singulari si recta ea circumferentiam AFC contigerit. Punctum vero,

et ratio rectanguli ad quadratum in hoc casu invenientur ducendo rectam BG circum in G contingentem, et a puncto G ducendo ad AC perpendicularem GH; erit enim H punctum inveniendum, et, junctâ EG, ratio rectanguli AHC, hoc est quadrati ex GH ad quadratum ex HB,



¹ 8, et 22. 6. eadem erit ^f rationi quadrati ex EG ad quadratum ex GB,

hoc est rationi quadrati ex EA dimidio ipsius AC ad rectan-

36. 3. gulum g CBA.

Inquirendum autem est an punctum H facit majorem vel minorem rationem rectanguli ad quadratum quovis alio puncto in recta AC. Manentibus igitur descriptis, fumatur

inter A et C aliud quodvis punctum D, et ducatur DF ad rectos angulos ipsi AC, occurratque circumferentiae in F, jungatur BF quae occurrat ipsi GH in K. Ratio igitur quadrati ex GH, hoc est rectanguli AHC, ad quadratum ex HB, maior est ratione (quadrati ex KH ad idem ex HB quadratum, hoc est ratione quadrati ex FD, hoc est) rectanguli ADC ad quadratum ex DB. Quare punctum H facit maximam rationem rectanguli ad quadratum.

Puncta autem ipsi H propiora faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti H. Sit enim punctum L propius puncto H quam punctum D, et ad easdem partes ipsius H, et ducatur LM ad rectos angulos ipsi AC, occurratque circumferentiae in M, et juncta BM occurrat DF productae in N. Igitur ratio rectanguli ALC, hoc est quadrati ex ML ad quadratum ex LB, (hoc est ratio quadrati ex ND ad quadratum ex DB,) maior est ratione quadrati ex FD ad quadratum ex DB, hoc est ratione rectanguli ADC ad quadratum ex DB. Puncta igitur ipsi H propiora ad utrasvis ipsius partes faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora ad easdem partes.

Componetur ita,

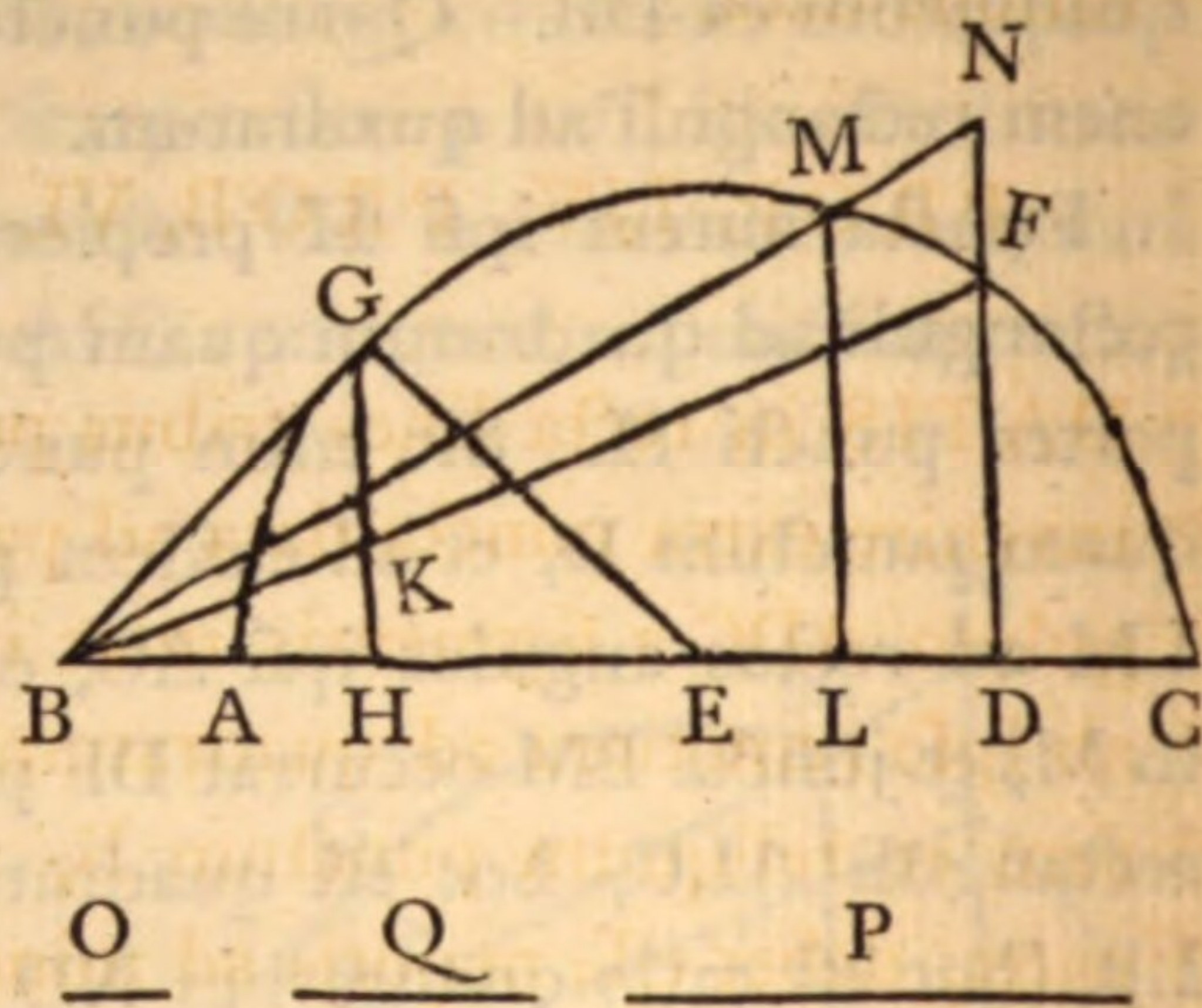
Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum ea quam habet recta O ad rectam P, et inter O et P media proportionalis inveniatur Q. Bifariam secetur AC in E, et centro E, intervallo EC describatur semicirculus, quem contingat recta ducta a puncto B in G, et ad AC ducatur perpendicularis GH. Si igitur ratio data O ad P, hoc est ^bra-^b2.cor. 20.6. tio quadrati ex O ad quadratum ex Q eadem fuerit rationi

quadrati ex EC ad rectangulum CBA, punctum H, idque solum, efficiet Problema, quia punctum quodvis aliud in recta AC minorem facit rationem rectanguli ad quadratum. Si autem ratio data O ad P non fuerit eadem rationi maximae, quadrati scilicet ex EC ad rectangulum CBA, erit hâc ratione minor. Sit igitur ratio O

ad P minor ratione quadrati ex EC, hoc est ex EG ad rectangulum CBA, hoc est ad quadratum ex GB; erit igitur ratio quadrati ex O ad quadratum ex Q, minor ratione quadrati ex GH ad quadratum ex HB, et propterea ratio rectae O ad rectam Q, minor erit ratione GH

ad HB. Fiat ut O ad Q, ita KH ad HB, et KH minor erit GH; quare juncta BK necessario circumferentiae occurret in duobus punctis. Sit F eorum utrumlibet, et ad AC ducatur perpendicularis FD; erit D punctum inveniendum. Est enim quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex KH ad quadratum ex HB, hoc est ut quadratum ex recta O ad quadratum ex recta Q, hoc est ut recta O ad rectam P, hoc est in ratione data.

Constructionem hanc dedit Hugo de Omerique in pag. 260. *Analyseos suae Geometricae*



P R O B. VI.

“ DATIS in recta linea tribus punctis quantum invenire ex-
 “ tra ipsa ad utraquevis partes quod faciet rectangulum a seg-
 “ mentis inter ipsum et duo ex punctis datis ad quadratum
 “ ex segmento inter ipsum et reliquum punctum datum, in
 “ ratione data.”

PROP. LIV. PROB. VI. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quantum D
 “ invenire extra puncta data ad partes B quod faciet rectan-
 “ gulum ADC a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C
 “ ab ipso remotiora ad quadratum ex DB segmento inter ip-
 “ sum et reliquum punctum B, in ratione data, quae, ut
 “ patet, debet esse majoris ad minorem.”

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC ad quadratum
 ex DB in ratione data. Rectangulo ADC aequale fit rectan-
 gulum BDE, positâ DE ad easdem partes ad quas est DB; e-
 rit autem punctum E in BA
 producta ad partes ipsius A. F E H A C B DG
 Et quoniam data est ratio $\frac{F E H}{M}$
 rectanguli ADC, hoc est ip-
 sius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipsam DB. Est autem per
 Prop. 14. ED ad DB, ut rectangulum CEA ad ipsum ABC;
 horum igitur ratio data est, et datum est rectangulum ABC,
 quare et CEA; dataque est recta AC, et est punctum E in CA

^a 85. Dat. producta, igitur ^a datum est punctum E, et data erit recta

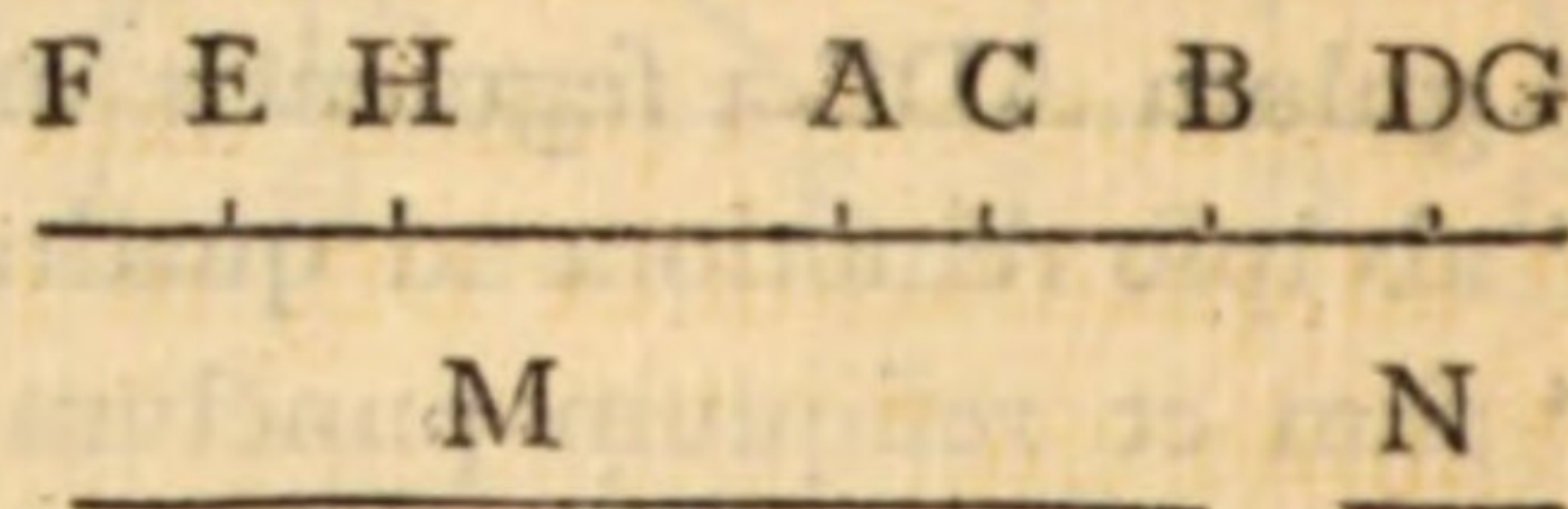
^b 6. Dat. EB. Data autem est ratio ED ad DB, datum igitur ^b est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ea quam habet recta M ad rectam N, et fiat ut recta N ad ipsam M, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita CB ad BF, nam ita erit rectangulum ABC ad ipsum ABF. Ad rectam vero AC

^c 85. Dat. applicetur ^c, versus partes puncti A, rectangulum aequale ipso ABF excedens quadrato, sitque E punctum applicationis; et ut FC ad CB, ita fiet EB ad

BD; erit D punctum inven-
endum. Erit enim FB ad BC,
ut ED ad DB; igitur rectan-
gulum ABF, hoc est ipsum



CEA est ad rectangulum ABC, ut ED ad DB; et per conver-
sam Prop. 14. erit rectangulum ADC aequale ipso EDB. Rect-
angulum autem ADC, hoc est EDB est ad quadratum ex DB,
ut recta ED ad ipsam DB, hoc est ut FB ad BC, hoc est ut
recta M ad rectam N, hoc est in ratione data.

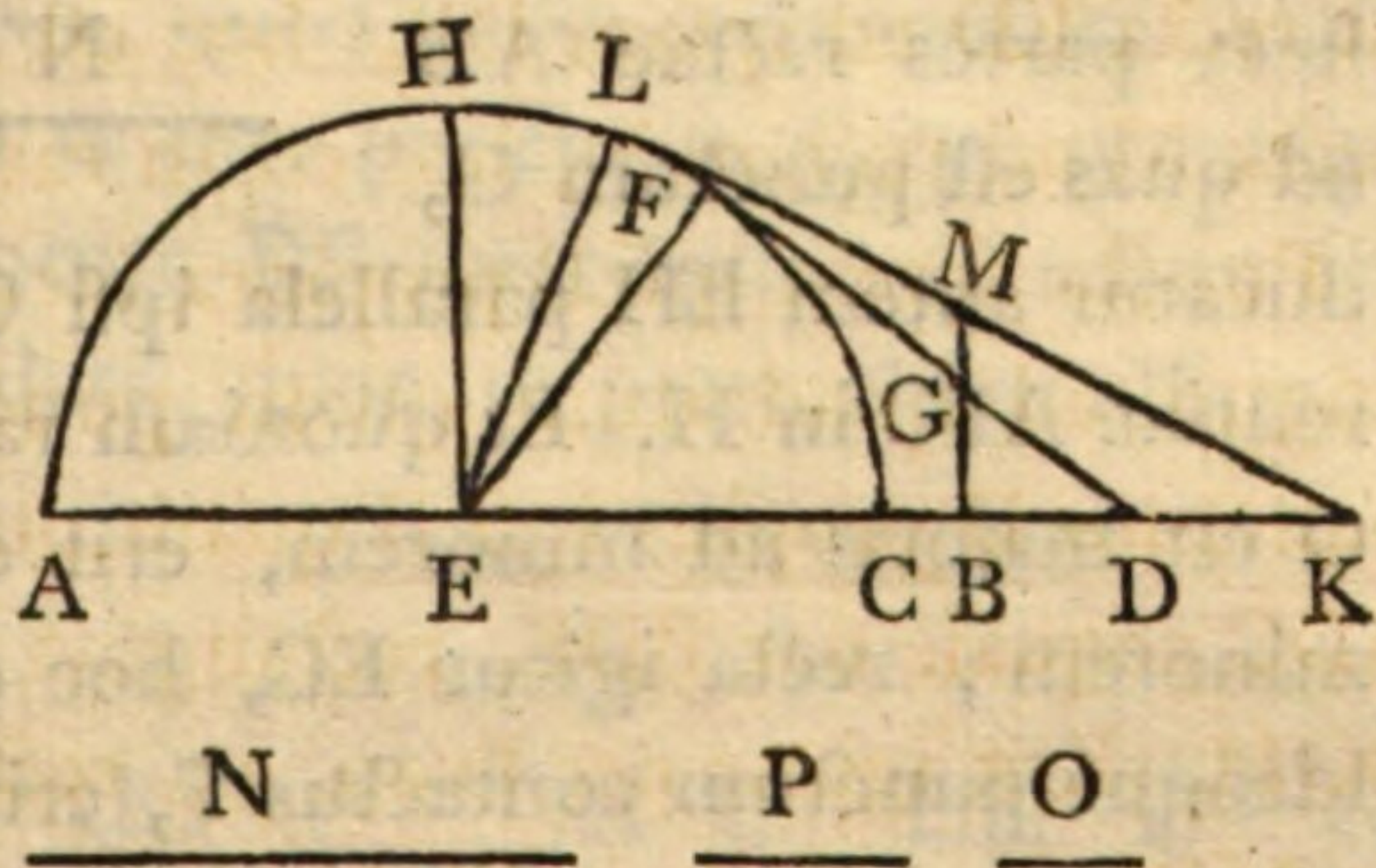
Puncta autem ipsi B propiora faciunt majores rationes rect-
anguli ad quadratum quam puncta remotiora. Sit enim
punctum D propius ipsi B quam punctum G; et rectangulo
ADC aequale fiat BDE, rectangulo autem AGC rectangulum
BGH. Erit igitur per Prop. 33. rectangulum EGB majus ip-
so AGC, hoc est ipso BGH; quare recta EG major est ipsa
GH, et punctum H erit inter puncta E, A. Rectangulum
igitur CEA majus est ipso CHA, et propterea CEA majorem

habet rationem ad rectangulum ABC quam habet rectangulum CHA ad idem ABC. Ut autem ED ad DB, ita, per Prop. 14. est rectangulum CEA ad ipsum ABC; et, per eandem, ut HG ad GB, ita est rectangulum CHA ad ipsum ABC. Igitur ratio ED ad DB, major est ratione HG ad GB, quare ratio rectanguli EDB, hoc est ipsius ADC ad quadratum ex DB, major est ratione rectanguli HGB, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB.

PROB. VI. EPITAGMA I. ALITER.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum D
 “ invenire extra puncta data quod faciet rectangulum ADC
 “ ad quadratum ex DB, in ratione data, majoris scilicet ad
 “ minorem.”

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, et centro E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ducatur recta DF ipsum contingens in F, occurratque DF in puncto G rectae BG quae ad angulos rectos ducta est ipsi AB. Est igitur qua-



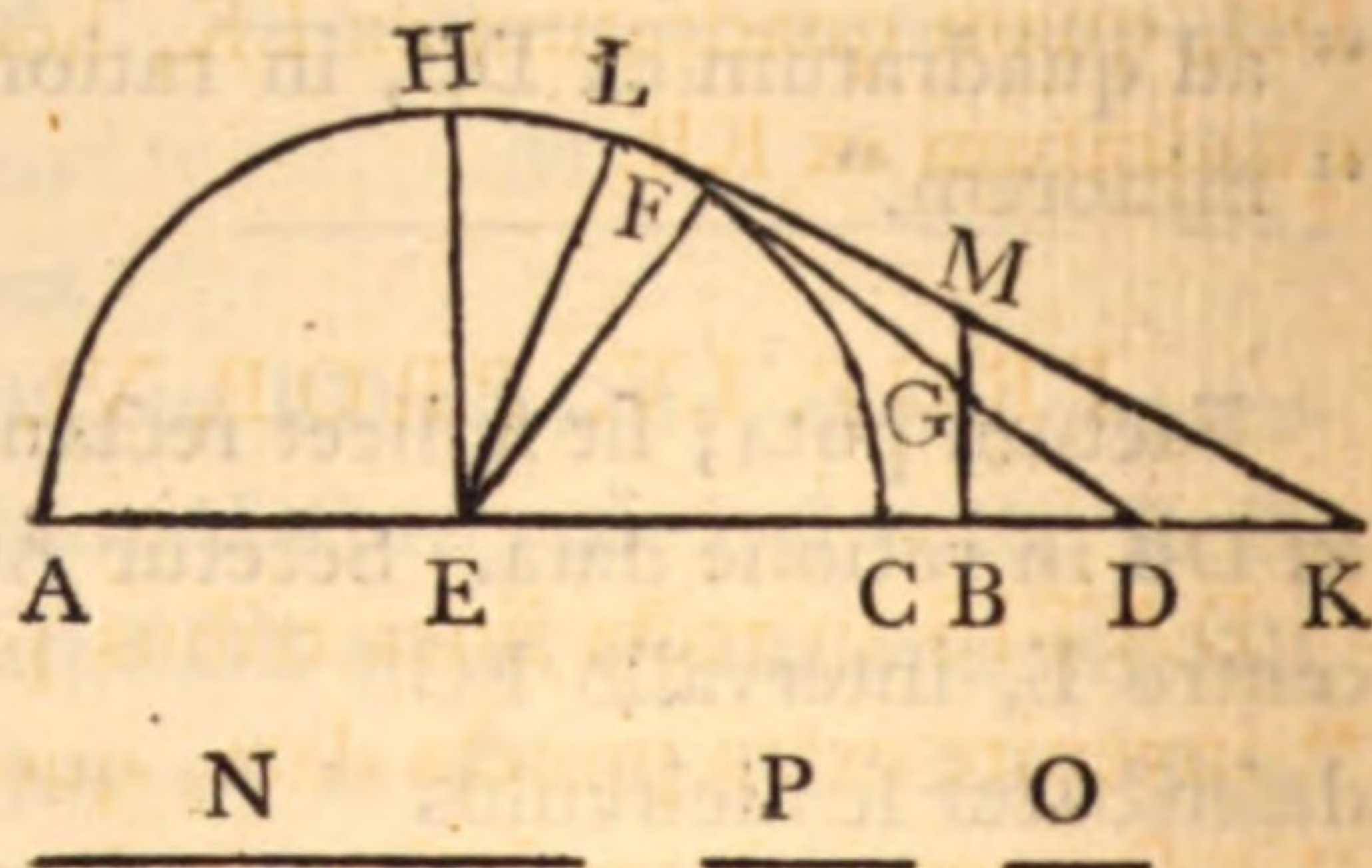
dratum ex FD aequale^a rectangulo ADC, quare data est ratio^a 36. 3. quadrati ex FD ad quadratum ex DB, et propterea^b data est^b 59. Dat.

ratio rectae FD ad ipsam DB. Junctâ autem EF rectus erit
 angulus EFD, quare aequiangula sunt triangula EFD, GBD;
 ut igitur FD ad DB, ita est EF ad BG, quare data est ratio
 EF ad BG, et data est EF, ideoque et BG magnitudine; sed et
 positione, datumque est punctum B, datum igitur est punc-
 tum G; quare ^c recta GF positione data est, sed et AB data
 est positione; datum propterea est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad
 quadratum ex DB ea quam habet recta N ad ipsam O, et in-
 ter N et O media proportionalis inveniatur P; bifariamque
 sectâ AC in E, fiat ut N ad P, ita EC ad quartam BG quae
 ponatur a puncto B ad
 rectos angulos ipsi AB.

A puncto vero G ducatur recta GF contingens
 circulum super diame-
 trum AC descriptum in
 puncto F ad easdem sci-
 licet partes rectae AB
 ad quas est punctum G,



ducatur autem EH parallela ipsi GB, occurratque circumfe-
 rentiae AFC in H. Et quoniam ratio data, hoc est ratio N ad
 O est majoris ad minorem, erit et ratio N ad P majoris ad
 minorem; recta igitur EC, hoc est EH major est ipsâ GB,
 ideoque punctum contactus F, erit inter H et C, et recta FG
 occurret ipsi AB productae versus partes B; occurrat ei in D,
 erit D punctum inveniendum. Jungatur enim EF, et quoni-
 am aequiangula sunt triangula EFD, GBD, erit quadratum

ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, hoc est ex EC ad quadratum ex BG, hoc est ut quadratum ex recta N ad quadratum ex ipsâ P, hoc est^d ut recta N ad rectam O, hoc est in ratione data.

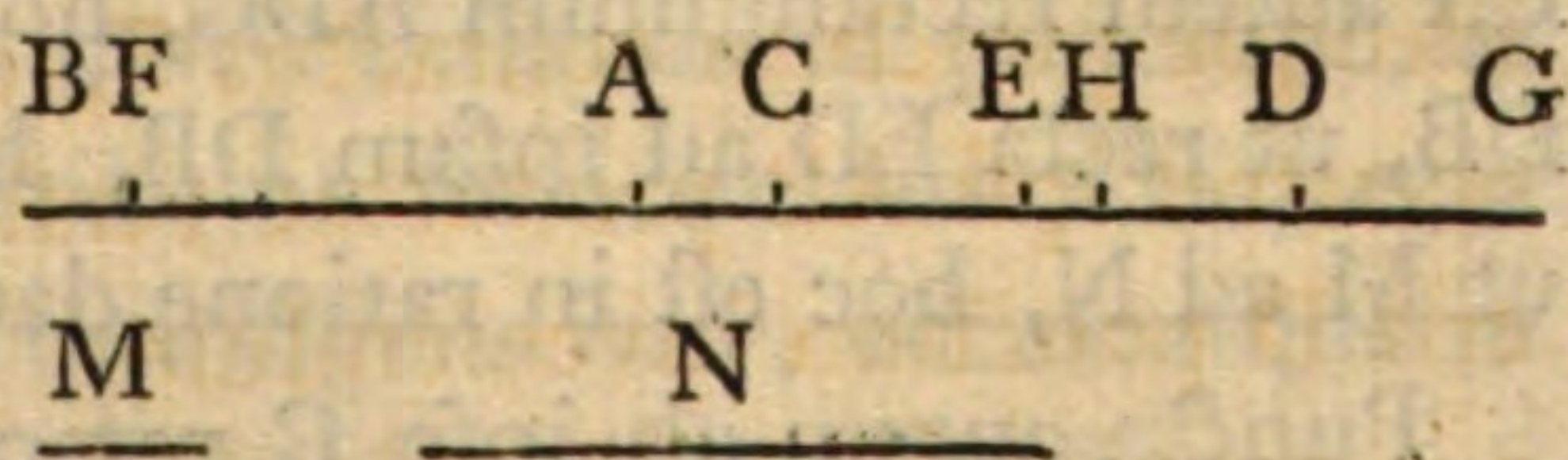
^d2.cor. 20. 6.

Puncta autem ipsi B propiora majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora. Sit enim D propius ipsi B quam punctum K, et ducatur KL contingens semicirculum AHC in L, et ipsi KL occurrat BG in M, et jungatur EL. Patet punctum L cadere inter ipsa F, H, quare BG minor erit BM. Habet igitur quadratum ex EF majorem rationem ad quadratum ex BG, quam quadratum ex EL ad quadratum ex BM, quare et quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC majorem habet rationem ad quadratum ex DB, quam quadratum ex LK, hoc est rectangulum AKC ad quadratum ex KB.

PROP. LV. PROB. VI. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “ invenire extra puncta data, quod faciet rectangulum ADC
 “ a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C ipsi propiora
 “ ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum
 “ punctum B, in ratione data, quae, ut patet, debet esse mi-
 “ noris ad majorem.”

Factum puta; et rectangulo ADC aequale fit rectangulum BDE, positâ DE ad easdem partes ad



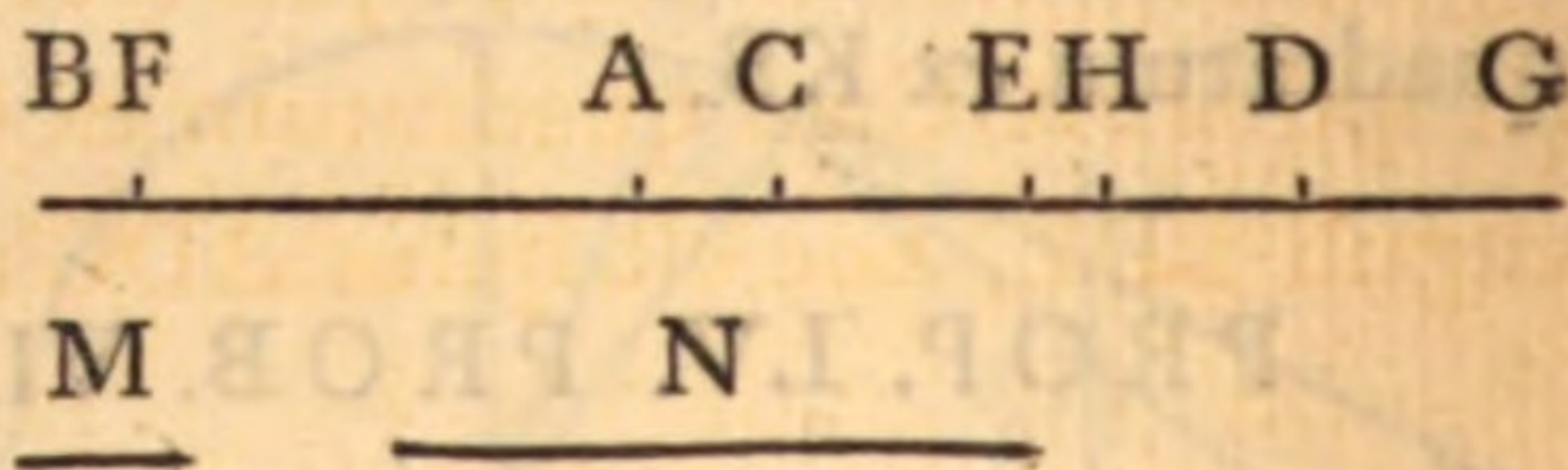
Q

quas est DC; erit igitur punctum E inter puncta C, D. Et quoniam data est ratio rectanguli ADC, hoc est ipsius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipsam DB. Est autem, per Prop. 14. BD ad DE, ut rectangulum CBA ad ipsum AEC; horum igitur ratio data est; et datum est rectangulum CBA, quare datum est AEC. Data autem est recta AC, et est punctum E in AC producta; datum igitur^a est punctum E, et data erit recta BE. Et data est ratio BD ad DE, et propterea datum est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ea quam habet recta M ad rectam N; et fiat ut N ad M, ita rectangulum CBA ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad

M, ita recta AB ad ipsam BF, nam ita erit rectangulum CBA ad ipsum CBF. Ad rectam vero AC



^b 29. 6. applicetur^b rectangulum aequale ipsi CBF excedens quadrato, fitque E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C; et ut AF ad FB, ita fiat BE ad ED; erit D punctum invenendum. Erit enim AB ad BF, ut BD ad DE, quare et rectangulum CBA erit ad ipsum CBF, hoc est ad rectangulum AEC, ut recta BD ad rectam DE. Igitur per conversam Prop. 14. erit rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Est autem rectangulum ADC, hoc est BDE ad quadratum ex DB, ut recta ED ad ipsam DB, hoc est ut FB ad BA, hoc est ut M ad N, hoc est in ratione data.

Puncta autem ab ipso C remotiora faciunt majores ratio-

nes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora. Sit enim punctum G remotius a puncto C quam est punctum D. Et rectangulo ADC aequale fiat ipsum BDE, rectangulo autem AGC aequale fiat BGH, igitur per Prop. 33. rectangulum BGE majus est ipso AGC, hoc est ipso BGH; quare recta GE major est ipsa GH, et punctum H erit in CE producta; et propterea rectangulum AHC majus est ipso AEC, ideoque habet AHC majorem rationem ad rectangulum CBA, quam rectangulum AEC ad idem CBA. Quoniam vero rectangulum AGC aequale est ipso BGH, erit, per Prop. 14. HG ad GB, ut rectangulum AHC ad ipsum CBA; et similiter, quoniam ADC aequale est ipso BDE rectangulo, erit ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipsum CBA. Ratio igitur HG ad GB, major est ratione ED ad DB; quare et ratio rectanguli BGH, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB, major est ratione rectanguli BDE, hoc est ipsius ADC ad quadratum ex DB.

PROB. VI. EPITAGMA 2. ALITER.

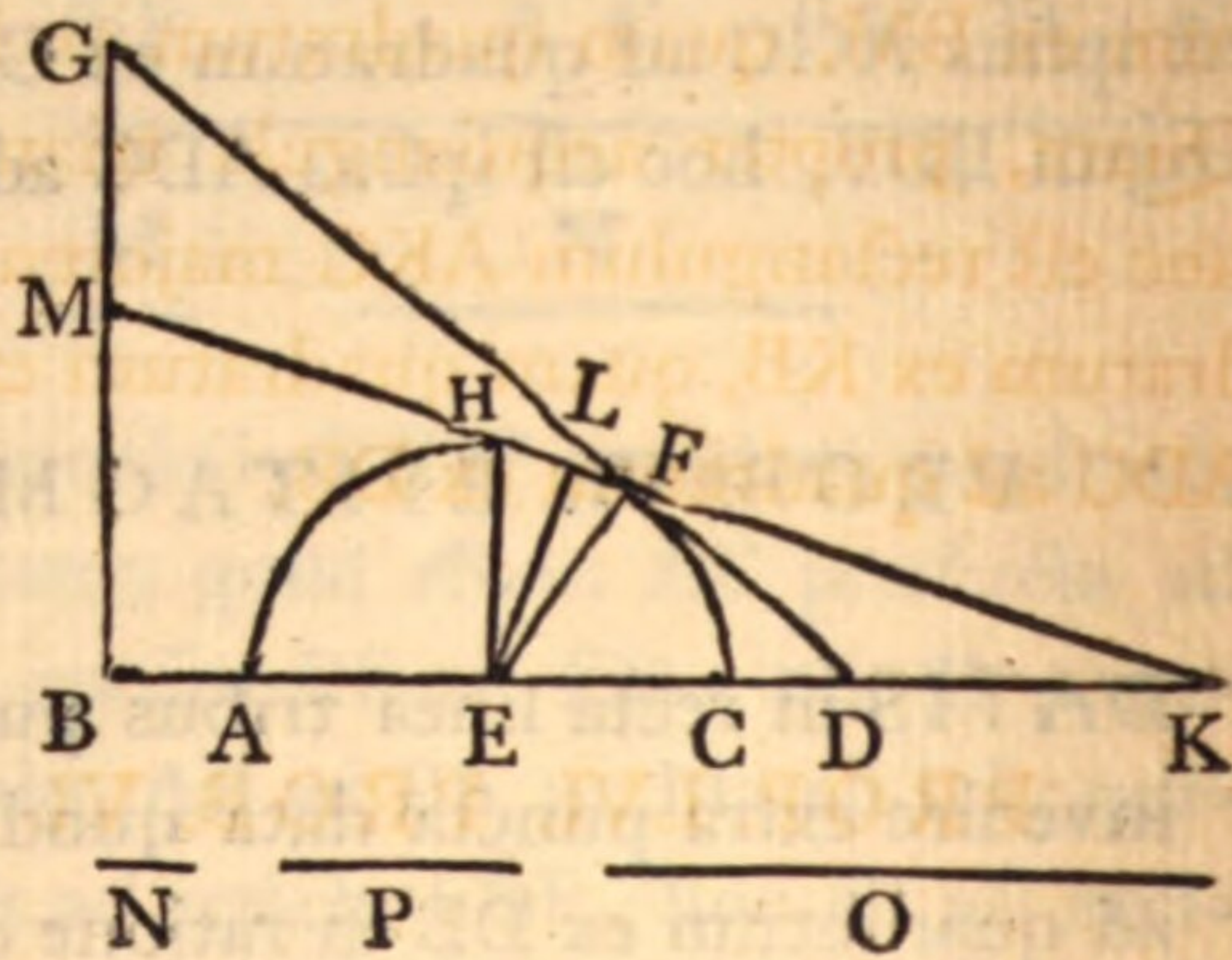
“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “ invenire extra puncta data quod faciet rectangulum ADC
 “ ad quadratum ex DB in ratione data minoris ad majorem.”

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, et centro E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ducatur DF ipsum contingens in F, occurratque in puncto G rectae BG quae ad rectos angulos ducta est ipsi

- ^a 36. 3. AB. Quoniam igitur data est ratio rectanguli ADC, hoc est^a
^b 59. Dat. quadrati ex FD ad quadratum ex DB, data erit^b ratio rectae
 FD ad ipsam DB. Junctâ autem EF aequiangula erunt tri-
 angula EFD, GBD; ut igitur FD ad DB, ita est EF ad BG; et
 datae sunt FD, DB, quare data est ratio EF ad BG; et data
 est EF, ideoque et BG magnitudine, sed et positione, datum-
^c 94. Dat. GF positione data^c erit, sed et recta AB positione; igitur da-
 tum est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad qua-
 dratum ea quam habet recta N ad rectam O, et inter N et O
 media proportionalis inveniatur P; bifariam secetur AC in E,
 et fiat ut N ad P, ita
 EC ad quartam BG,
 quae ponatur ad rectos
 angulos ipsi AB. Du-
 catur vero a puncto G
 recta GF contingens
 circulum super diame-
 trum AC descriptum in
 puncto F ad easdem sci-
 licet partes rectae AC
 ad quas est G; ducatur



etiam recta EH parallela ipsi GB, occurratque circumfe-
 rentiae AFC in H. Et quoniam data ratio N ad O est mi-
 noris ad majorem, erit et ratio N ad P minoris ad mayo-
 rem; quare recta EC, hoc est EH minor est ipsâ GB; cadet
 igitur punctum contactus F inter H et C, et recta GF occur-

ret ipsi BC productae ad partes C; occurrat ei in D, erit D punctum inveniendum. Jungatur enim EF, et quoniam aequiangula sunt triangula EFD, GBD, erit quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, five EC ad quadratum ex BG, hoc est ut quadratum ex recta N ad quadratum ex recta P, hoc est^d ut recta^d 2.cor. 20. 6. N ad ipsam O, hoc est in ratione data.

Puncta autem ab ipso C remotiora faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora. Sit enim punctum K remotius a puncto C quam est punctum D, et ducatur recta KL contingens semicirculum AHC in L, et ipsi BG occurrat KL in M, et jungatur EL. Patet punctum L cadere inter puncta F, H, quare cadet M inter B, G. Habet igitur quadratum ex EL majorem rationem ad quadratum ex BM, quam quadratum ex EF ad quadratum ex BG. Quare, propter aequiangula triangula, quadratum ex LK, hoc est rectangulum AKC majorem habet rationem ad quadratum ex KB, quam quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB.

PROP. LVI. PROB. VI. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
 “ invenire extra ipsa quod faciet rectangulum ADC a seg-
 “ mentis inter ipsum et puncta extrema A, C ad quadratum
 “ ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B, in
 “ ratione data.”

CAS. I.

* 19. 5.

Componetur ita,

Sit i

Punc

^b cor. 19. 5.

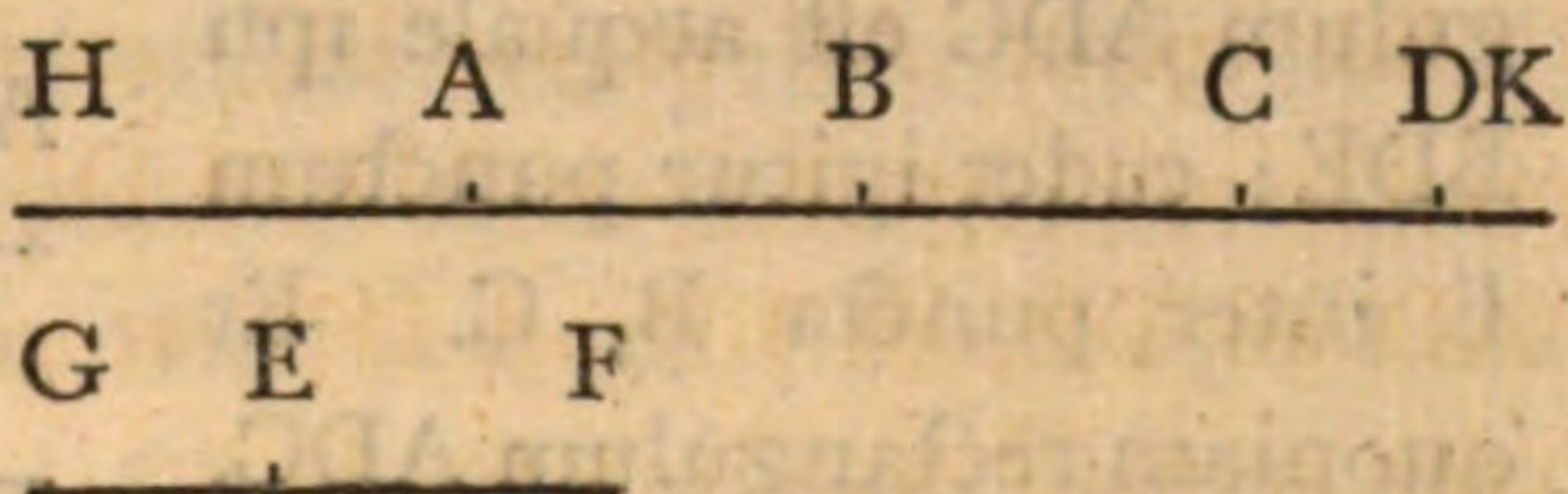
CAS. 2.

26. 2.

habet rationem ad rectangulum ADC, convertendo, quadratum ex DB datam habebit rationem ad quadratum ex BC. Datum igitur est quadratum ex DB, et ipsa DB data erit, ideoque datum est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae EF ad rectam FG, quae, ut patet, debet esse minoris ad maiorem. Et fiat ut GE ad GF, ita CB ad BH, inveniatur autem inter CB, BH media proportionalis BD quae ponatur a puncto B versus partes puncti C; punctum D solvet Problema.

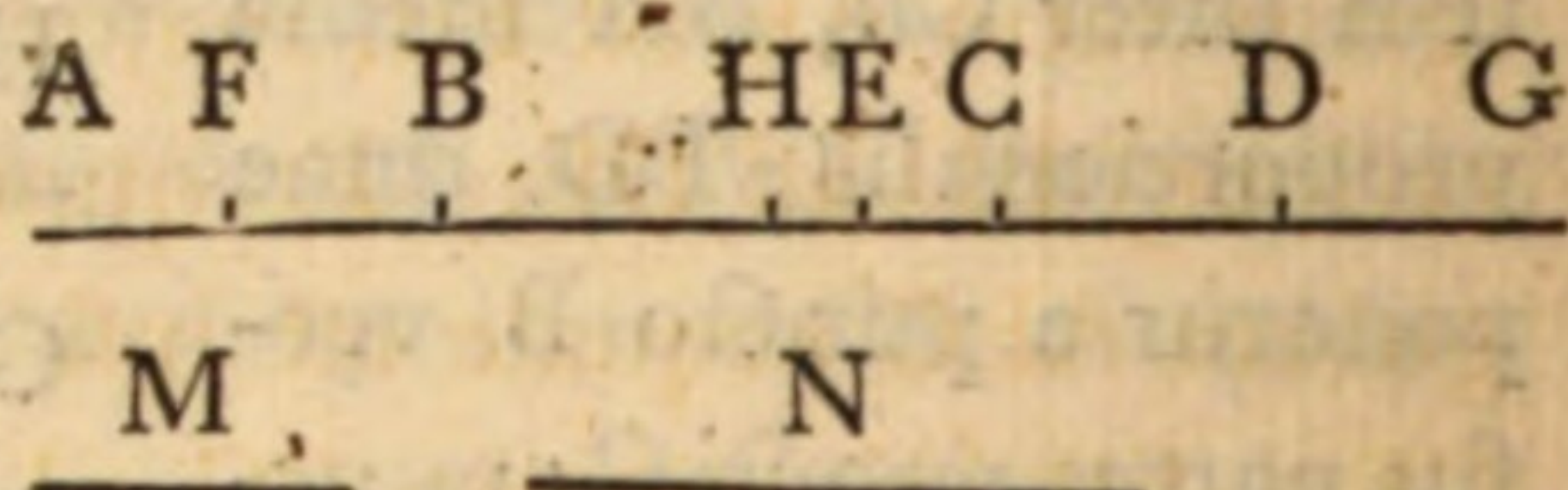


Est enim quadratum ex BD, hoc est rectangulum HBC ad quadratum ex BC, ut recta HB ad ipsam BC, hoc est ut FG ad GE; igitur, convertendo, est quadratum ex BD ad rectangulum ADC, ut recta GF ad ipsam FE, et invertendo, rectangulum ADC est ad quadratum ex DB, ut EF ad FG, hoc est in ratione data.

Puncta autem remotiora a puncto C majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum quam puncta ipsi propiora. Sit enim punctum K remotius a C quam est punctum D, igitur quadratum ex BC ad rectangulum AKC minorem habet rationem quam ad rectangulum ADC; et componendo, quadratum ex BK minorem habet rationem ad rectangulum AKC quam quadratum ex BD ad rectangulum ADC. Igitur invertendo, rectangulum AKC ad quadratum ex KB majorem habet rationem quam rectangulum ADC ad quadratum ex DB.

CAS. 3. Quando inaequales sunt AB, BC, et ratio data est minoris ad maiorem.

Factum puta; fit scilicet in AC producta punctum D quod facit rectangulum ADC ad quadratum ex DB in data ratione minoris ad maiorem; et rectangulo ADC aequale fit ipsum BDE. Quoniam igitur rectangulum ADC, hoc est BDE minus est quadrato ex DB, erit ED minor DB; eadem vero ED major est DC, quia rectangulum ADC est aequale ipsi BDE; cadet igitur punctum E inter puncta B, C. Et quoniam rectangulum ADC, hoc est ipsum BDE datam



habet rationem ad quadratum ex DB, habebit ED ad DB eandem datam rationem. Est autem, per Prop. 15. ED ad DB, ut rectangulum ABC ad ipsum AEC; horum igitur ratio data est. Et datum est rectangulum ABC, igitur datum est rectangulum AEC; et data est recta AC, quare datum erit^a punctum E, et propterea data est recta BE, et data est ratio ED ad DB, datum igitur est punctum D.

Componetur ita,

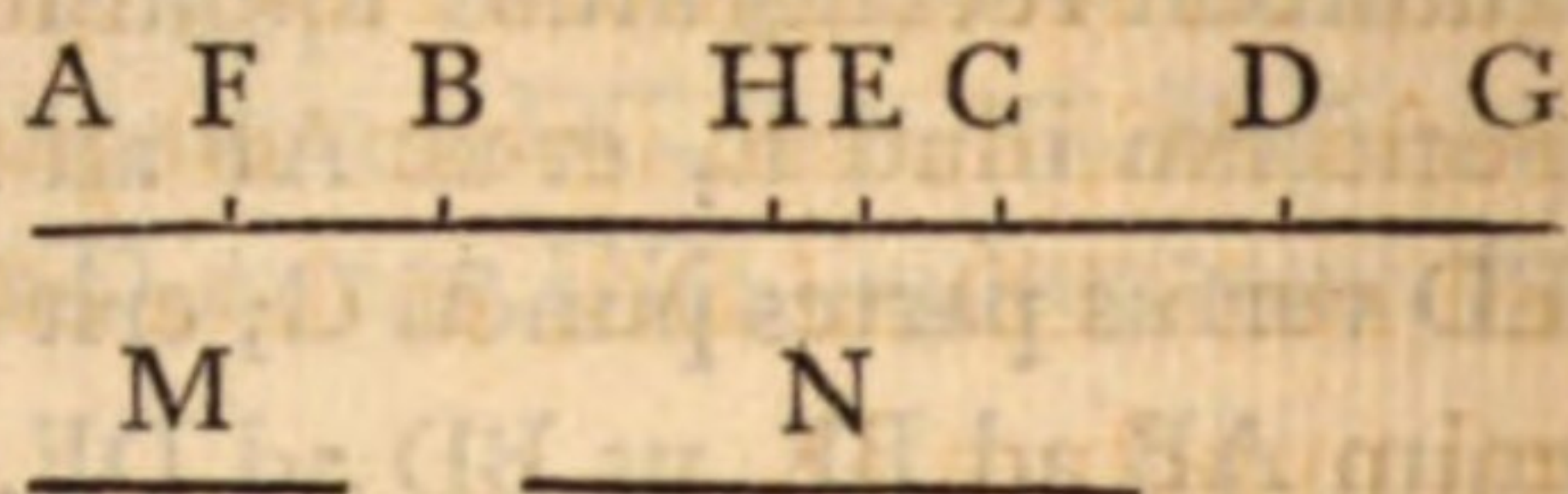
Sint puncta data A, B, C in recta linea, sitque ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae M ad rectam N. Et ut N ad M, ita fiat rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita AB ad BF, erit enim in eadem ratione rectangulum ABC ad ipsum FBC. Quoniam vero ratio M ad N est minoris ad maiorem, erit rectangulum FBC minus ipso ABC, et propterea

rectangulum FBC minus est quadrato ex dimidio rectae AC; igitur, in hoc casu, in quo scilicet ratio data est minoris ad maiorem, semper applicari potest^b ad rectam AC rectangulum aequale dato FBC deficiens quadrato. Alterum autem ex applicationum punctis necessario cadet inter B et C, quoniam rectangulum applicatum minus est ipso ABC. Sit punctum illud E, et ut AF ad FB, ita fiat BE ad ED, posita ED versus partes puncti C; erit D punctum inveniendum. Erit enim AB ad BF, ut BD ad DE, major autem est AE ipsa AB, igitur ratio AE ad FB, major est ratione (AB ad BF, hoc est ratione) BD ad DE. Et quoniam, ex constructione, rectangulum AEC aequale est ipsi FBC, erit AE ad FB, ut BC ad CE. Est igitur ratio BC ad CE, major ratione BD ad DE, et propterea punctum D cadit in EC producta. Quoniam autem est AB ad BF, ut BD ad DE, erit rectangulum ABC ad (ipsum FBC, hoc est ad) rectangulum AEC, ut BD ad DE. Igitur per conversam Prop. 15. rectangulum ADC aequale est ipsi BDE; rectangulum autem ADC, hoc est BDE est ad quadratum ex DB, ut recta ED ad ipsam DB, hoc est ut FB ad BA, hoc est ut recta M ad ipsam N, hoc est in ratione data.

Puncta autem remotiora a puncto C, propiora vero ipsi quam punctum quod facit rectangulum aequale quadrato, faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta ipsi C propiora. Sit enim punctum G remotius a puncto C quam est D. Facto igitur rectangulo BDE aequale ipsi ADC, cadet punctum E inter B, C puncta, ut prius ostensum. Similiter, si fiat rectangulum BGH aequale ipsi AGC, cadet H inter puncta B, C. Et quoniam rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE, et punctum G est in AD producta, erit,

per Prop. 33. rectangulum AGC, hoc est ipsum BGH majus rectangulo BGE; igitur recta GH major est ipsâ GE, et cadet punctum H inter puncta B, E. Quoniam vero rectangulum AGC aequale est ipsi BGH, erit, per Prop. 15. BG ad GH, ut rectangulum ABC

* ad ipsum AHC; et, quia BG major est GH, rectangulum ABC majus est ipso AHC, et propterea cadet punctum B propius medio



puncto rectae AC quam punctum H, quare et H cadet propius eidem puncto medio quam punctum E. Igitur rectangulum AHC majus est ipso AEC, et habebit AHC ad ABC rectangulum majorem rationem quam rectangulum AEC ad idem ABC. Quare, ex praemissis †, HG ad GB, majorem habet rationem quam ED ad DB; et propterea rectangulum BGH, hoc est AGC majorem habet rationem ad quadratum ex GB, quam rectangulum BDE, hoc est ADC ad quadratum ex DB.

† Vide notas †, *.

CAS. 4. Quando ratio data est majoris ad minorem.

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data majoris ad minorem. Quoniam igitur rectangulum ADC majus est quadrato ex DB, ablato communi rectangulo BDC, erit reliquum rectangulum AB, CD majus reliquo CBD; quare ratio AB ad BC, major est ratione BD ad DC; est autem BD major DC, multo igitur AB major est BC. Unde ut Problema construi possit, necesse est ut inaequales sint AB, BC, et ut punctum D sit in recta AC producta ad partes minoris segmenti BC. Fiat rectangu-

* -

lum BDE aequale ipsi ADC, positâ DE versus A. Et quoniam data est, ex hypothese, ratio rectanguli ADC, hoc est ipsius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad rectam DB. Est autem, per Prop. 15. BD ad DE, ut rectangulum ABC ad ipsum AEC; horum igitur ratio data est; et datum est rectangulum ABC, quare datum est AEC; et data est recta AC, datum igitur^a est punctum E. Data autem ostensa^a 86. Data est ratio ED ad DB, et data est recta EB, et propterea datum est punctum D.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ad datam rectam AC applicetur rectangulum AEC dato rectangulo aequale, ei scilicet ad quod rectangulum ABC datam habet rationem BD ad

DE, deficiens
quadrato, Problema non sem-

F	A	L H E	B C	D	G	K
—————						
M			N			
—————			—————			

per construi potest, quoties scilicet rectangulum datum majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius AC. Fiat autem modo singulari, si rectangulum datum aequale fuerit quadrato huic.

Invenietur autem punctum D, et ratio rectanguli ADC ad quadratum ex DB, in hoc casu, si inveniatur punctum D tale ut, facto rectangulo BDE aequali ipsi ADC, cadat punctum E in medio ipsius AC. Factum puta, et quoniam rectangulum BDE aequale est ipsi ADC, ablati hisce ex communi quadrato ex ED, erit^b reliquum rectangulum BED aequale^b 2, et 6. 2. reliquo, dato scilicet quadrato ex EC; datum igitur est rectangulum BED, et data est recta EB, datum propterea est punctum D.

Componetur hoc ita,

Bifariam fecetur AC in E, et ipsis BE, EC tertia proportionalis inveniatur ED; et quoniam EB minor est ipsa EC, erit EC minor ED, et cadet punctum D in AC producta. Quoniam vero rectangulum BED aequale est quadrato ex EC, ablati hisce ex communi quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum EDB aequale reliquo rectangulo ADC. Rectangulum igitur ADC, hoc est EDB est ad quadratum ex DB, ut recta ED ad ipsam DB. Quoniam vero proportionales sunt DE, EC, EB, erit ^c DE ad EB, ut quadratum ex EC ad quadratum ex EB; et

convertendo, est

F	A	L H E	B C	D	G	K
—————						
		M		N		
		—————		—————		

† ED ad DB, ut quadratum ex EC, five rectan-

gulum AEC ad rectangulum ABC; quare et rectangulum ADC est ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EC dimidio scilicet ipsius AC ad rectangulum ABC, hoc est ut quadratum ex AC ad rectangulum ABC quater.

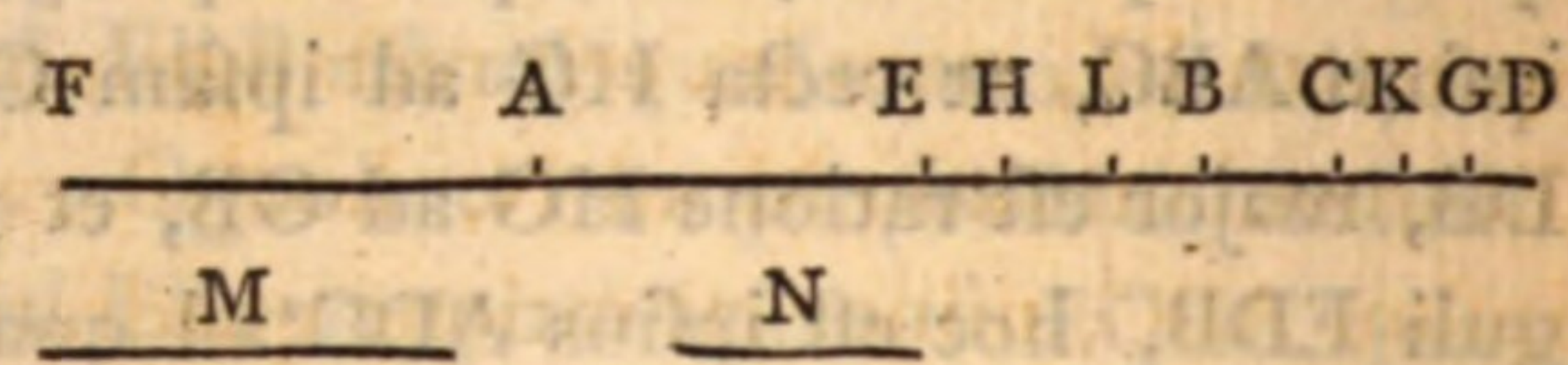
Inquirendum autem est an punctum D facit rationem rectanguli ADC ad quadratum ex DB majorem vel minorem ratione quam facit aliud quodvis punctum in AC producta. Manentibus igitur jam descriptis, fit in AC producta aliud quodvis punctum G, et rectangulo AGC aequale fiat BGH. Quoniam igitur quadratum ex EC, hoc est rectangulum DEB majus aut minus est rectangulo GEB, ablati hisce ex communi quadrato quod fit a recta EG, erit reliquum rectangulum AGC, hoc est BGH minus aut majus reliquo rectangulo BGE; quare recta HG minor aut major est recta EG, igitur

non cadet punctum H in E ; punctum autem E bifariam secat rectam AC , igitur rectangulum AEC majus est ipso AHC , et propterea rectangulum AEC majorem habet rationem ad ipsum ABC , quam AHC rectangulum ad idem ABC . Osten- Vide †.
sum autem fuit rectangulum AEC esse ad ipsum ABC , ut recta ED ad rectam DB ; et quoniam rectangulum AGC aequale est ipsi BGH , erit, per Prop. 15. rectangulum AHC ad ipsum ABC , ut recta HG ad ipsam GB . Igitur ratio ED ad DB , major est ratione HG ad GB , et propterea ratio rectanguli EDB , hoc est ipsius ADC ad quadratum ex DB , major est ratione rectanguli HGB , hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB . Punctum igitur D facit maximam rationem rectanguli ad quadratum.

Ostendendum restat puncta ipsi D propiora facere majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti D .

Manentibus jam descriptis, sit punctum K remotius a puncto D quam punctum G ; sint autem K, G ad easdem partes puncti D , et rectangulo AKC aequale fiat rectangulum BKL . Si igitur puncta G, K sint in CD producta, quoniam rectangulum ADC aequale est ipsi BDE , erit, per Prop. 33. rectangulum AGC , hoc est BGH majus ipso BGE ; quare et recta GH major est ipsâ GE . Et similiter, quoniam rectangulum AGC aequale est ipsi HGB , et est K in AG producta, erit rectangulum AKC , hoc est ipsum BKL majus rectangulo BKH , per eandem Prop. 33. quare et recta LK major est ipsâ KH . Eadem ratione in casu in quo puncta G, K sunt inter C, D puncta ostendetur, per Prop. 32. HG minor GE , et LK minor KH . In utroque igitur casu punctum L remotius est a

puncto E quod bifariam secat rectam AC, quam punctum H. Itaque rectangulum AHC majus est ipso ALC, et propterea rectangulum AHC majorem habet rationem ad ipsum ABC, quam rectangulum ALC ad rectangulum ABC. Ostensum autem fuit rectangulum AHC esse ad ABC, ut recta HG ad ipsam GB; et similiter ostendetur rectangulum ALC ad ipsum ABC, ut recta

LK ad rectam KB. 

Igitur ratio rectae
HG ad rectam GB, M N

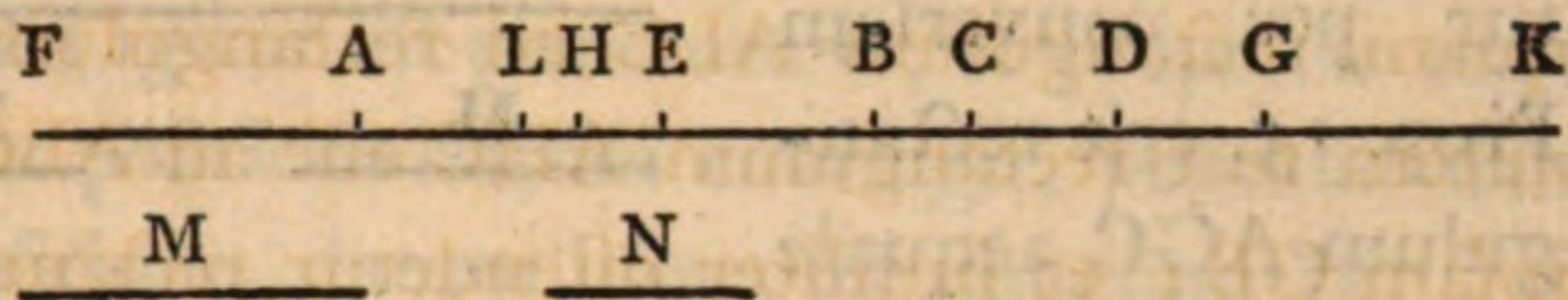
major est ratione LK ad KB, et propterea ratio rectanguli HGB, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB, major est ratione rectanguli LKB, hoc est ipsius AKC ad quadratum ex KB. Puncta igitur ipsi D propiora ad utrasvis partes, faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes.

Componetur vero Problema ita,

Sint A, B, C data puncta in recta linea, sitque ratio data quam habere debet rectangulum a segmentis inter punctum inveniendum et puncta A, C ad quadratum ex segmento inter idem punctum et reliquum punctum B, eadem rationi quam habet recta M ad minorem rectam N. Et inveniatur, ut in praemissis ostensum fuit, punctum D quod facit maximam rationem rectanguli ad quadratum, hoc est rationem eandem ei quam habet quadratum ex AE dimidio ipsius AC, ad rectangulum ABC. Et si ratio M ad N eadem fuerit huic rationi, punctum D, idque solum, efficiet Problema. Si vero ratio M ad N major fuerit ratione hac maxima, Problema non

poterit construi. Quod si proponatur ratio M ad N minor ratione maxima, fiat ut N ad M, ita rectangulum ABC ad aliud rectangulum,

quod quidem invenietur faciendo ut N ad M, ita recta AB ad



quartam BF, nam ita erit rectangulum ABC ad ipsum FBC. Et quoniam ratio M ad N, hoc est ratio rectanguli FBC ad ipsum ABC, minor est ratione quadrati ex AE ad idem ABC; erit rectangulum FBC minus quadrato ex AE. Applicari igitur^d potest rectangulum aequale ipsi FBC ad rectam A defi-^d 28. 6.

ciens quadrato. Applicetur, et sit H utrumlibet ex applicationum punctis, ut vero FA ad AB, ita fiat HB ad BG, sumatur autem punctum G in HB productâ; erit G punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum AHC aequale est, ex constructione, ipsi FBC quod majus est rectangulo ABC, quia ratio data M ad N est majoris ad minorem, erit AHC majus rectangulo ABC, et propterea punctum H cadit propius puncto E quod bifariam secat rectam AC, quam punctum B; cadit autem punctum B inter E et C quoniam ostensa^{*} est AB major BC, ideoque est AH minor AB. Quoniam^{*} vero est FA ad AB, ita est HB ad BG, componendo, erit FB ad BA, ut HG ad GB. Est autem AH minor AB, igitur ratio FB ad AH, major est ratione (FB ad BA, hoc est ratione) HG ad GB. Ut vero FB ad AH, ita HC ad CB, quia rectangulum FBC aequale est ipsi AHC; igitur ratio HC ad CB major est ratione HG ad GB, et propterea cadit punctum G in recta BC producta. Quoniam vero ut FB ad BA, ita est

^{*}Vide hanc notam.

HG ad GB, erit rectangulum FBC, hoc est ipsum AHC ad rectangulum ABC,

ut HG ad GB. Igi-

tur per converfam

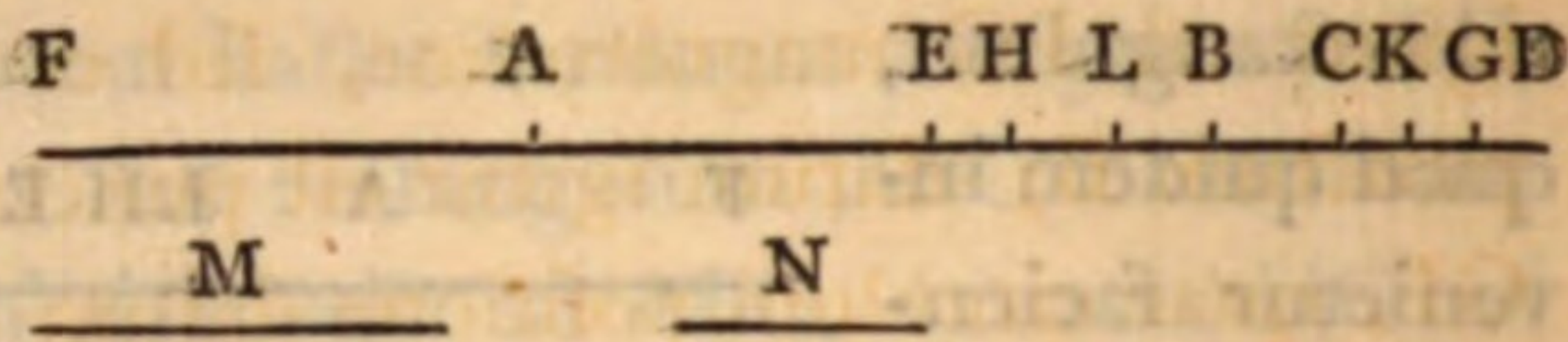
Prop. 15. erit rectan-

gulum AGC aequale

ipfi HGB. Est autem rectangulum AGC, hoc est HGB ad

quadratum ex GB, ut recta HG ad ipsam GB, hoc est ut FB

ad BA, hoc est ut M ad N, hoc est in ratione data.



PROB. VI. EPITAGMA 3. ALITER.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C invenire ex-
 “ tra ipsa quartum D quod faciet rectangulum ADC ad qua-
 “ dratum ex DB in ratione data.”

CAS. 1. Quando ratio data non est majoris ad minorem.

Factum puta; fit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data aequalis ad aequalem, vel minoris ad majorem. Secetur AC bifariam in

E, et centro E intervallo EC de-

scribatur circulus AFC, et a punc-

to D ducatur DF ipsum contin-

gens in F, occurratque in puncto

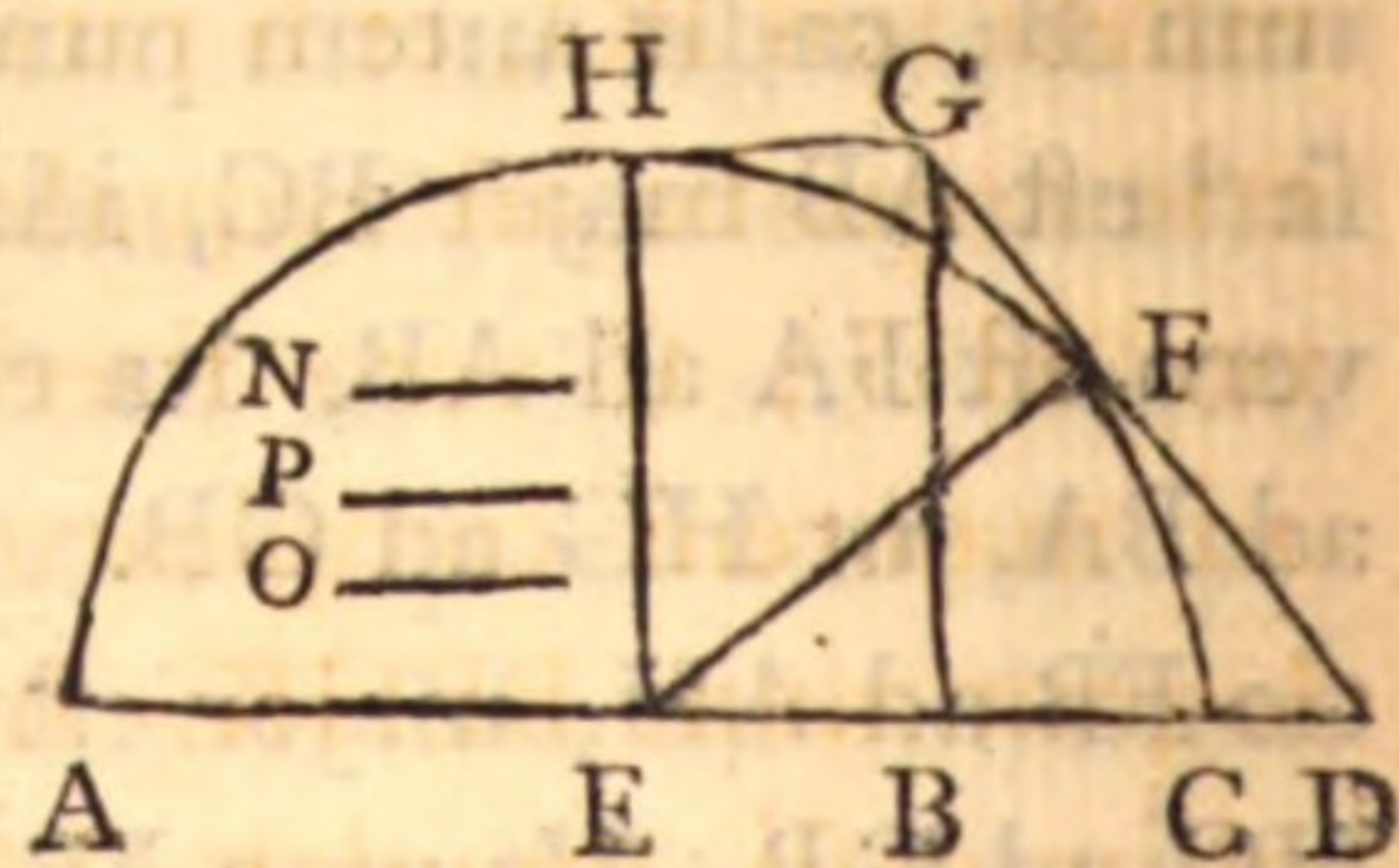
G rectae BG quae ad angulos rec-

tos ducta est ipfi AB. Quoniam

igitur data est ratio rectanguli

ADC, hoc est quadrati ex FD ad quadratum ex DB, data erit

ratio rectae FD ad ipsam DB. Junctâ autem EF aequiangula

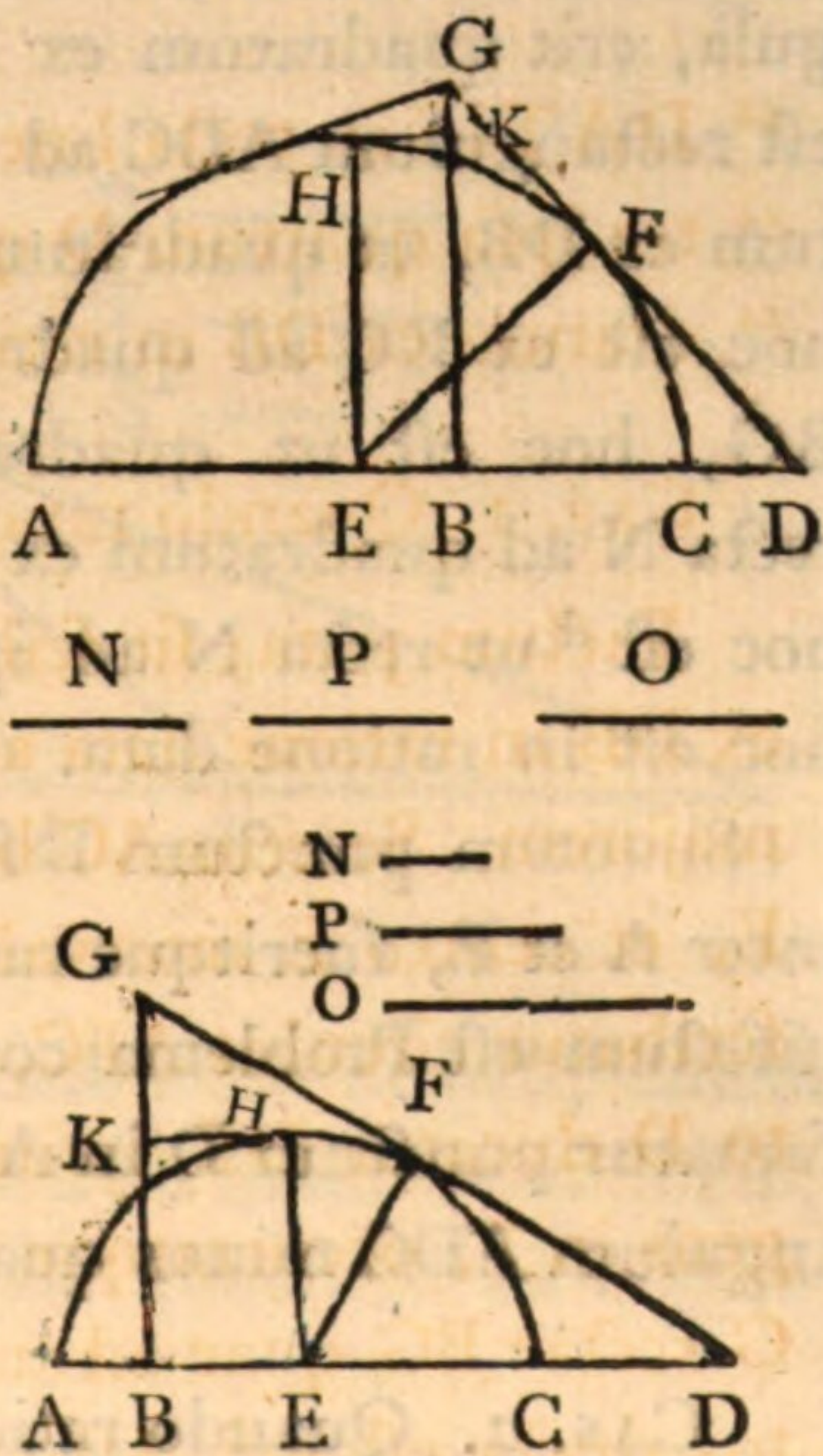


sunt triangula EFD, GBD; ut igitur FD ad DB, ita est EF ad BG, quare data est ratio FE ad BG, et data est EF, data igitur est BG magnitudine, sed et positione, datumque est punctum B; datum igitur est punctum G, et propterea recta GF, quae circulum positione datum contingit, positione data est^a; sed et AB positione, datum igitur est punctum D.

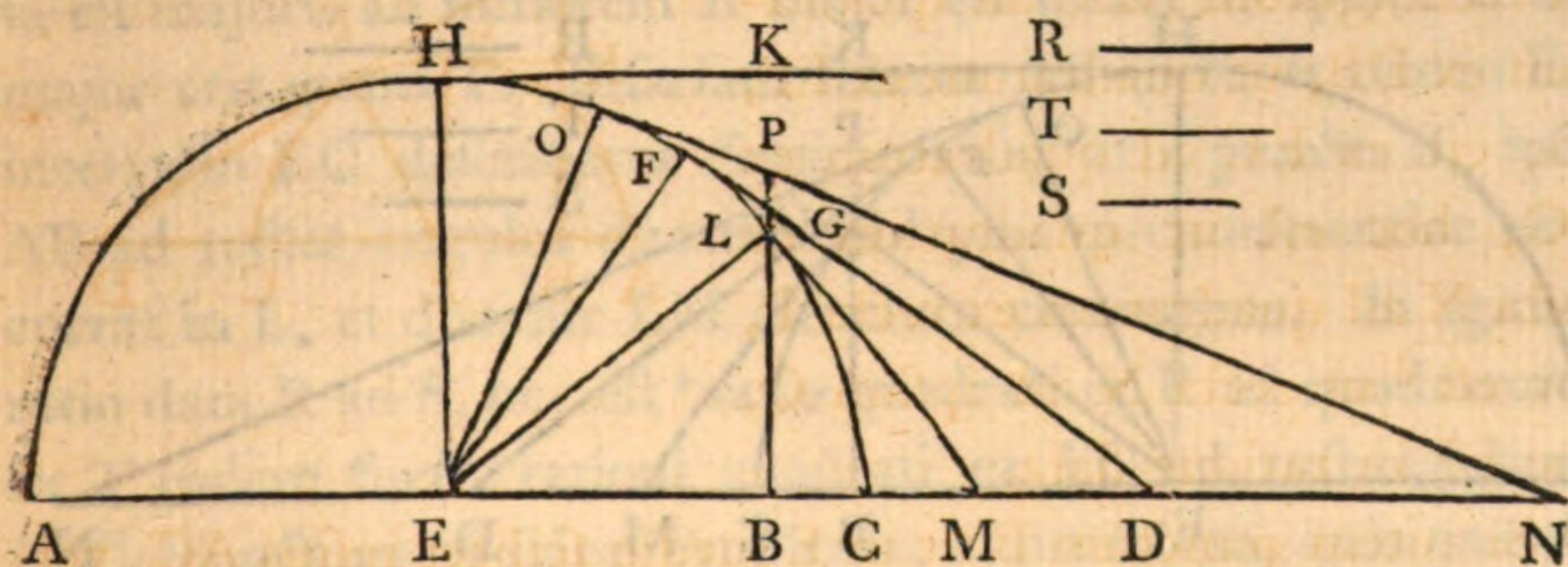
^a 94. Dat.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum ea quam habet recta N ad ipsam O, et inter N et O media proportionalis inveniatur P. Quoniam igitur, ex hypothesis, N vel aequalis est ipsi O vel eadem minor, erit et N vel aequalis ipsi P vel eadem minor. Bifariam secetur AC in E, et fiat ut N ad P, ita EC ad quartam BG, quae ponatur ad rectos angulos ipsi AB; centroque E intervallo EC describatur semicirculus AFC ad partes ipsius AC ad quas est punctum G, et ducatur EH parallela ipsi BG, et si ratio data fuerit aequalis ad aequalem jungatur HG; si vero fuerit minoris ad maiorem compleatur parallelogrammum BEHK. In primo igitur casu, quoniam EC, hoc est EH aequalis est ipsi BG, suntque EH, BG inter se parallelae, recta GH parallela erit^b ipsi EB, ^b 33. 1. et circulum continget^c. In altero vero casu, erit EC, hoc est^c 16. 3.



rationem majoris ad minorem, erit BG minor ipsâ EC , et quoniam praeterea requiritur ut a puncto G ducatur recta quae circumulum super diametrum AC descriptum contingat; ideo Problema non semper construi potest; quoties scilicet punctum G fuerit intra circumulum. Fiet autem modo singulari, si punctum G fuerit in ipsa circumferentia. Invenietur autem punctum in AC producta, et ratio rectanguli ad quadratum, in hoc casu, ut sequitur. A puncto B ad rectos angulos ipsi AB ducatur ad circumferentiam super diametrum AC recta BL , et recta circumulum in L contingens occurrat ipsi AC in M . Erit M punctum inveniendum, et ratio rectanguli



AMC , hoc est quadrati ex LM ad quadratum ex MB , eadem erit, junctâ EL , rationi quadrati ex EL ad quadratum ex LB , hoc est rationi quadrati ex EC dimidio ipsius AC ad rectangulum ABC .

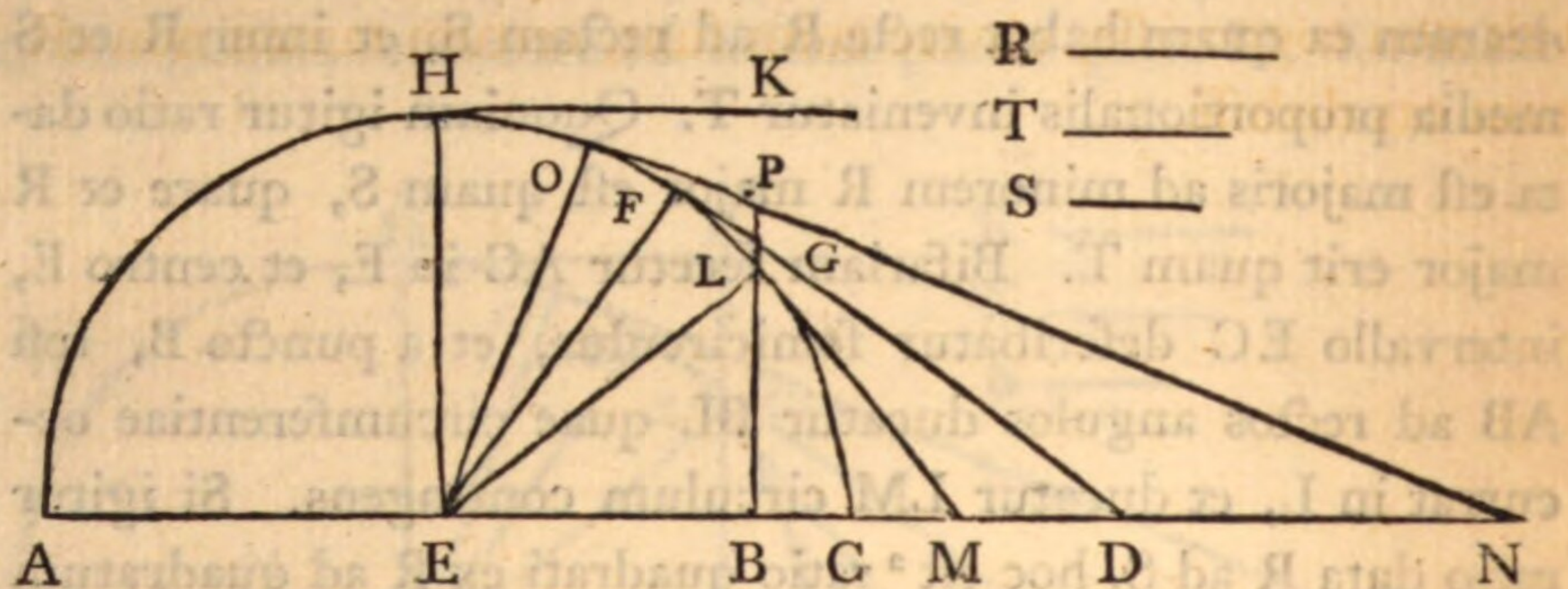
Inquirendum autem est an ratio rectanguli AMC ad quadratum ex MB major aut minor sit ratione quam facit aliud quodvis punctum in AC producta. Sit aliud quodvis punctum D , et ducatur recta DF circumulum contingens in F , oc-

ex EO ad quadratum ex BP; quare propter aequiangula triangula, ratio quadrati ex FD, hoc est rectanguli ADC ad quadratum ex DB, major est ratione quadrati ex ON, hoc est rectanguli ANC ad quadratum ex NB. Puncta igitur propiora ipsi M ad utraque ejus partes faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti M.

Componetur vero Problema in 2do Casu ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum ea quam habet recta R ad rectam S, et inter R et S media proportionalis inveniatur T. Quoniam igitur ratio data est majoris ad minorem R major est quam S, quare et R major erit quam T. Bifariam secetur AC in E, et centro E, intervallo EC describatur semicirculus, et a puncto B, ipsi AB ad rectos angulos ducatur BL quae circumferentiae occurrat in L, et ducatur LM circumulum contingens. Si igitur ratio data R ad S, hoc est ^a ratio quadrati ex R ad quadratum ^a2.cor. 20.6. ex T eadem fuerit rationi quadrati ex EC ad rectangulum ABC, punctum M solvet Problema, idque solum, quia punctum quodvis aliud facit minorem rationem rectanguli ad quadratum quam punctum M, ut ostensum fuit. Si autem ratio data major fuerit maxima, Problema construi non potest. Quod si proponatur ratio R ad S quae minor sit maxima, hoc est ratione quadrati ex EC ad rectangulum ABC, siue quadratum ex BL, fiat ut R ad T, ita EC ad quartam BG quae ponatur in recta BL, et ipsi BG parallela ducatur EH, et ducatur HK parallela ipsi AC, quae propterea continget circumulum in H. Quoniam igitur R major est quam T, erit

²2. cor. 20. 6. EC, hoc est EH major BG; et quoniam ratio R ad S, hoc est^a ratio quadrati ex R ad illud ex T, hoc est ratio quadrati ex EC, five EH ad quadratum ex BG minor est ratione quadrati ex EC ad quadratum ex BL, erit BG major BL, eadem autem BG minor ostensa est ipsâ EH; igitur punctum G cadit inter punctum L et contingentem HK, et propterea utraque contingentium quae a puncto G ducuntur occurrent circumferentiae inter puncta H, C, quare et rectae AC occurrent productae ad partes C. Sit GD earum utralibet, contingatque circulum in F,



et jungatur EF; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim aequiangula sunt triangula EFD, GBD, erit quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, hoc est ex EC ad quadratum ex BG, hoc est, ex constructione, ut quadratum ex recta R ad quadratum ex T, hoc est ut recta R ad rectam S, hoc est in ratione data. Similiter ope reliquae contingentis invenietur aliud punctum in recta AC producta quod efficiet Problema.

Semicirculi autem hi quorum ope Demonstrationes secundae Epitagmatum Prob. 5. et 6. factae sunt, non sunt ii de quibus loquitur Pappus in praefatione sua ad librum ejus septimum. Dicit enim Pappus “ Apollonium rursus demonstrasse Propositiones suas” hoc est quasdam ex iis “ ingeniose per semicirculos” et quidem Demonstrationes Lemmatum Apollonii ope semicirculorum quas Pappus servavit, ingeniose admodum sunt factae; Demonstrationes vero Epitagmatum Prob. 5. et 6. per semicirculos hinc traditae, parum aut nihil ingenii requirunt. Quamvis igitur has Apollonius non potuit non cognovisse, obviae enim sunt, certum tamen non est eum eas dedisse.



APOLLONII PERGAEI

D E

SECTIONE

DETERMINATA

LIBER SECUNDUS.

PROBLEMA I.

“**D**ATIS in recta linea quatuor punctis, quantum inve-
“ nire in segmento medio quod faciet rectangulum a seg-
“ mentis inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis ad rect-
“ angulum a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta in
“ ratione data.”

PROP. LVII. PROB. I. EPITAGMA I.

“**D**ATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
“ tum invenire in segmento medio CE quod faciet rectan-
“ gulum a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C ad eaf-
“ dem ipsius partes ad rectangulum a segmentis inter ipsum
“ et puncta E, B ad alteras ejus partes, in ratione data.”

T

CAS. 1. Quando ratio data est aequalis ad aequalem.

Factum puta; fit scilicet D punctum quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Erit igitur AD ad DE, ut BD^a 12. 5. ad DC, et^a AB ad CE, ut AD ad DE; quare, componendo, AB una cum CE, hoc est AE una cum CB est ad CE, ut AE ad ED. Datae autem sunt AE, CB, CE; data igitur est ED, et punctum D datum erit. Hic autem casus idem est cum parte quarta Prop. 20.

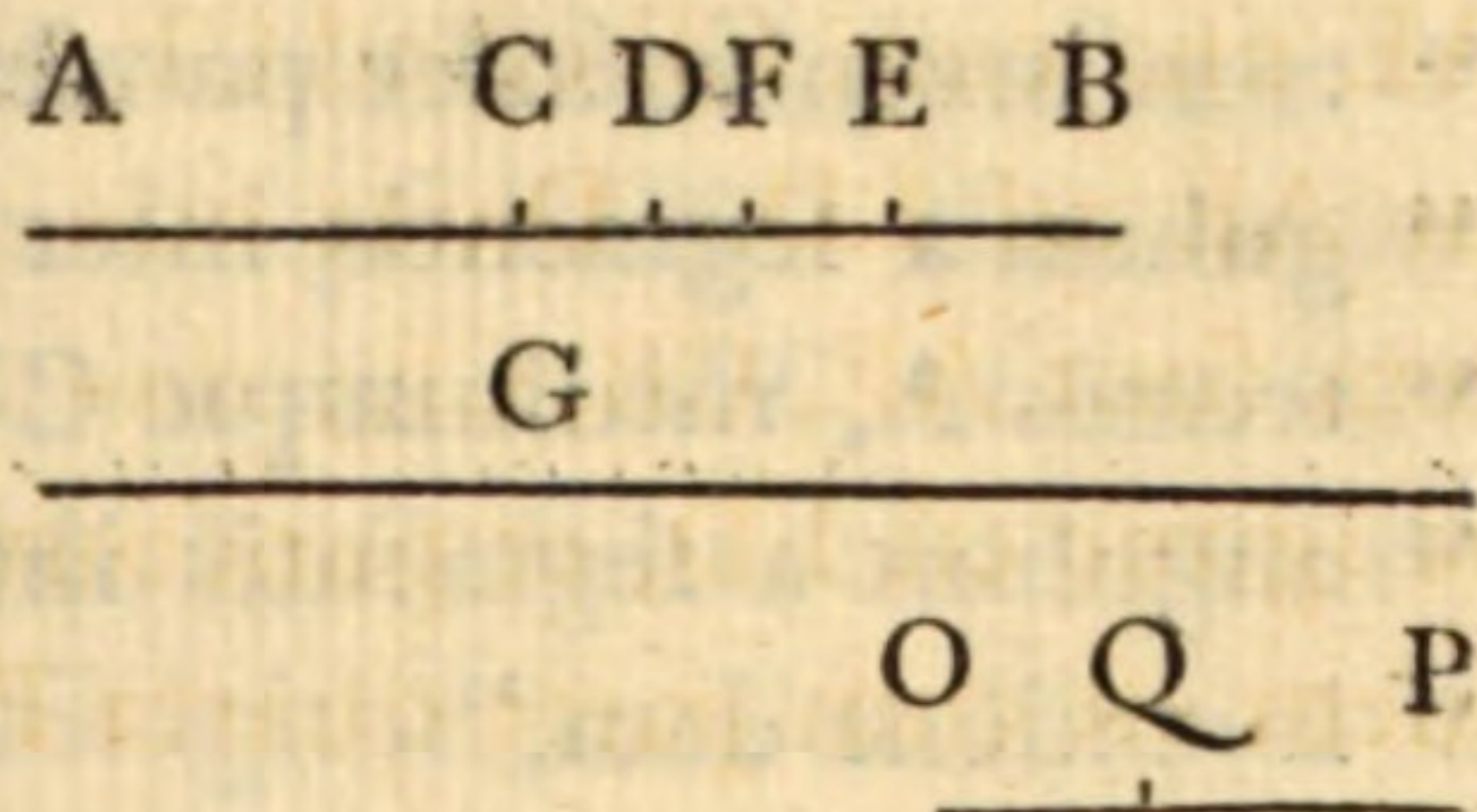
Componetur ita,

Producatur BA ad F ita ut FA aequalis sit ipsi CB, et ut FE ad EC, ita fiat AE ad ED quae ponatur a puncto E versus A; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim FE major est AE, erit EC major ED, et cadet punctum D inter C, E puncta. Est autem FE ad EC, ut AE ad ED, et dividendo, ut FC, hoc est AB ad EC, ita AD ad DE; igitur^b BD est ad DC, ut AD ad DE, et propterea rectangulum ADC est aequale rectangulo BDE.

CAS. 2. Quando ratio data non est aequalis ad aequalem.

Factum puta; fit scilicet F punctum inveniendum, inter C et E, quod facit rectangulum AFC ad rectangulum BFE in ratione data. Et ope Casus praecedentis inveniatur inter C et E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE. Sit autem rectangulum AFC majus ipso BFE; (nam si AFC minus fuerit ipso BFE, scriptis notis A, C, E, B in schemate ordine inverso, eadem erit solutio) erit igitur

punctum F inter D et E puncta; et propterea si ponatur recta G aequalis rectis AE, CB simul, erit, per Prop. 24. rectangulum AFC aequale rectangulis BFE, G, DF simul. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum BFE, quare, dividendo, data est ratio rectanguli G, DF ad rectangulum BFE. Et data sunt D, E, B puncta, dataque est recta G. Igitur deductum est Problema ad Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1. hoc est ad Prop. 45. hujus. Datis scilicet tribus punctis D, E, B in recta linea, invenire inter puncta D, E quartum F quod facit rectangulum a data recta G et ipsa DF ad rectangulum BFE in ratione data. Datum igitur est punctum F.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum BFE, eadem ei quam habet recta OP ad rectam PQ. Et ope Cas. 1. inveniatur inter C et E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Dein per Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1. inveniatur inter D et E punctum F quod facit rectangulum G, DF ad rectangulum BFE in ratione data quam habet recta OQ ad ipsam QP, posita scilicet recta G aequali ipsis AE, CB simul; erit F punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum G, DF est ad ipsum BFE, ut recta OQ ad ipsam QP, erit, componendo, BFE una cum rectangulo G, DF, hoc est, per Prop. 24. erit rectangulum AFC ad ipsum BFE, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data.

ta. Patet autem puncta ipsi C propiora minores facere rationes quam remotiora.

PROP. LVIII. PROB. I. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
 “ tum invenire inter puncta media E, C quod faciet rectan-
 “ gulum a segmentis inter ipsum et alterum ex punctis ex-
 “ tremis A, mediumque C ab extremo A remotius, ad rect-
 “ angulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B,
 “ in ratione data.”

CAS. I. Quando ratio data est aequalis ad aequalem.

Factum puta; sit scilicet D punctum inter E et C, quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB, erit igitur AD ad

^acor. 19. 5. DB, ut ED ad DC, quare^a ut

AE ad CB, ita ED ad DC, et,

componendo, ut AE una cum

CB ad CB, ita EC ad CD. Da-

tae autem sunt AE, CB, EC; data igitur est CD, punctum-
 que D datum. Hic autem Casus idem est cum 2da parte
 Prop. 21.

Componetur ita,

Fiat EF aequalis ipsi CB, sumpto F inter E et B, et ut AF
 ad FE, ita fiat EC ad CD quae ponatur a puncto C versus A;
 erit D punctum inveniendum. Quoniam enim AF major est
 FE, erit EC major CD, et cadet punctum D inter puncta E,
 C. Et quoniam est AF ad FE, ita EC ad CD, dividendo, erit

AE ad EF, hoc est CB, ut ED ad DC; et^b ut AD ad DB, ita^b 12. 5. ED ad DC. Est igitur rectangulum ADC aequale ipfi EDB.

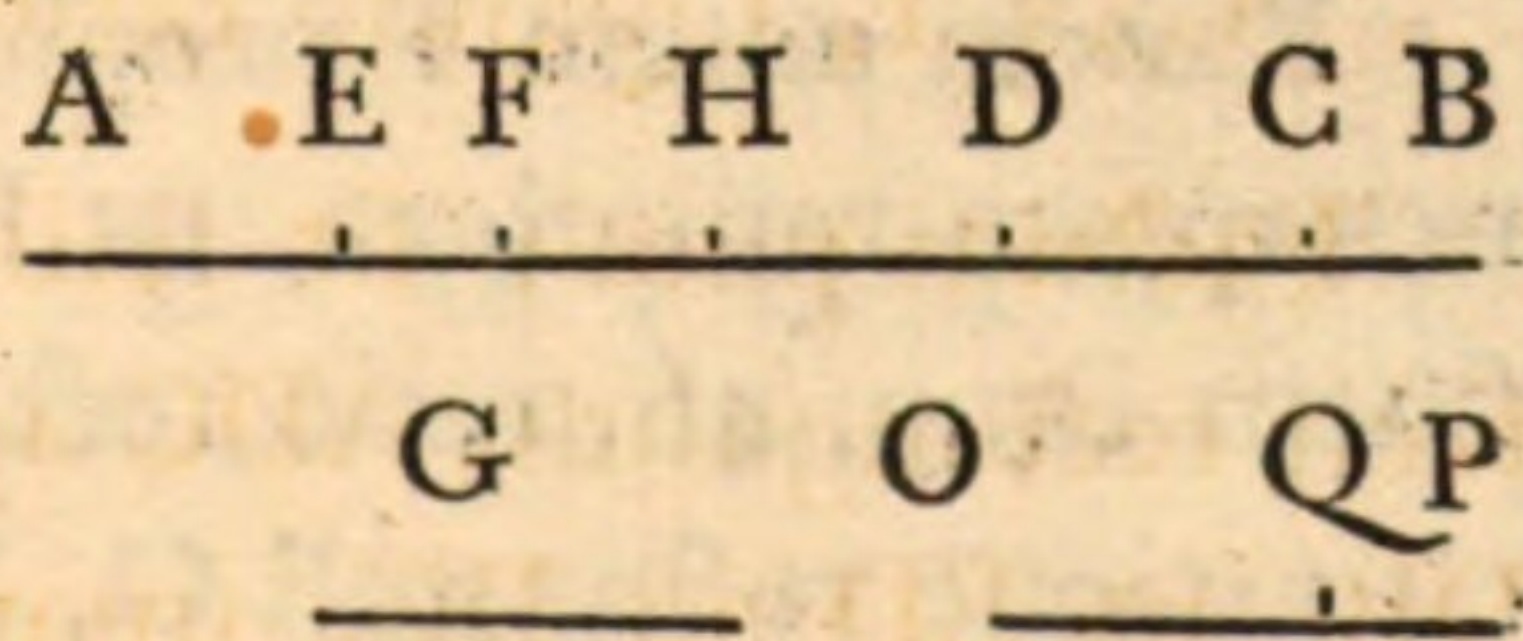
CAS. 2. Quando ratio data non est aequalis ad aequalem.

Factum puta; sit scilicet F punctum inveniendum inter E et C quod facit rectangulum AFC ad rectangulum EFB in ratione data. Et ope Cas. 1. inveniatur inter C et E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipfi EDB. Sit autem rectangulum AFC majus ipso EFB; (nam si AFC minus fuerit rectangulo EFB, scriptis notis A, E, C, B in schemate ordine inverso, eadem erit solutio) erit igitur per Cor. Prop. 27. punctum F inter E et D puncta.

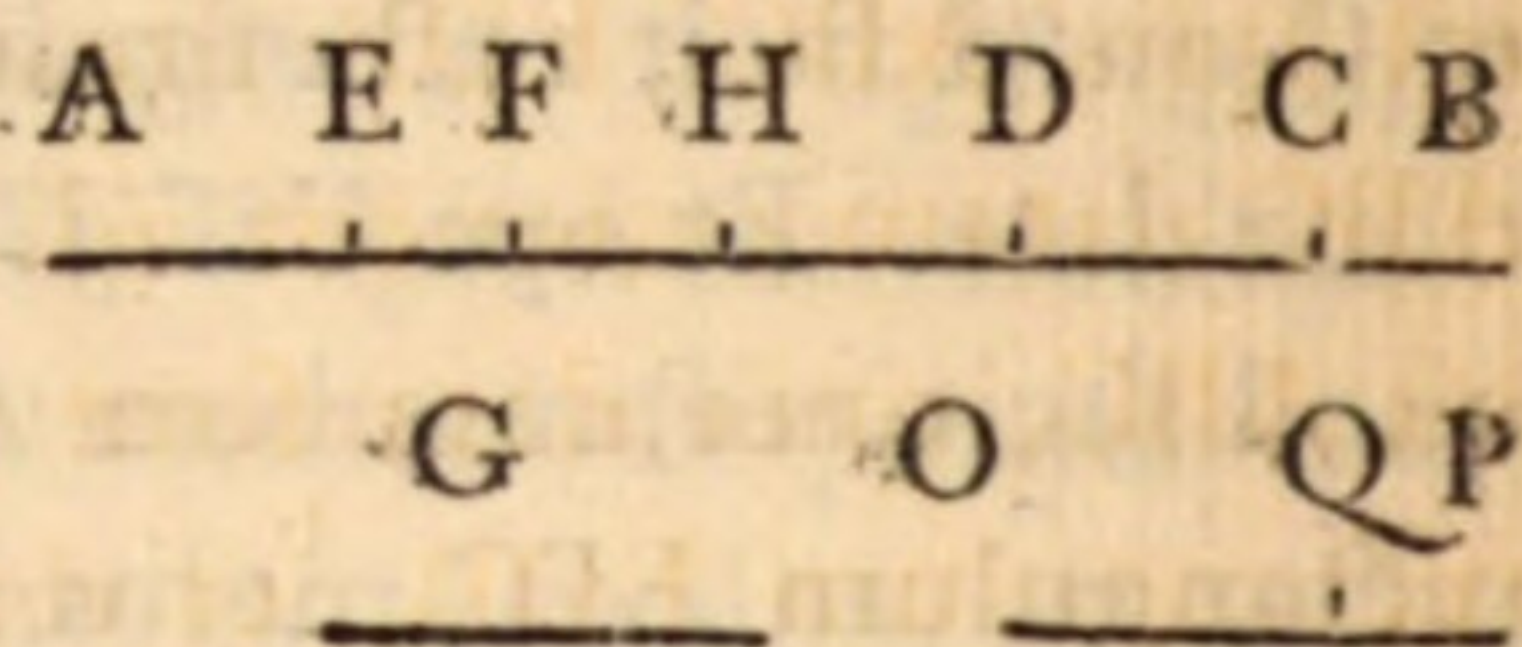
Quare si ponatur recta G aequalis
 27. rectangulum AFC aequale
 rectangulo EFB una cum ipso G,
 FD. Data autem est ratio rectan-
 guli AFC ad ipsum EFB, quare, dividendo, data est ratio ip-
 sius G, FD ad rectangulum EFB. Et data sunt E, D, B punc-
 ta, dataque est recta G; igitur Problema deductum est ad
 Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1. hoc est ad Prop. 46. hujus, datis
 scilicet in recta linea tribus punctis E, D, B, invenire inter
 puncta E, D quartum F quod facit rectangulum a data recta
 G et ipsa DF ad rectangulum EFB in ratione data. Datum
 igitur est punctum F.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ip-
 sum EFB, eadem ei quam habet recta OP ad ipsam PQ. Et
 inveniatur inter E, C punctum D quod facit rectangulum



ADC aequale ipfi EDB. Dein per Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1. hoc est per Prop. 46. inveniatur inter E et D punctum F quod facit rectangulum G, FD ad ipsum EFB in ratione data quam habet OQ ad QP, positâ scilicet rectâ G aequali ipsis AE, CB simul; erit F punctum invenien-
 dum. Quoniam enim rectangu-
 lum G, FD est ad ipsum EFB, ut
 recta OQ ad ipsam QP, compo-
 nendo, erit rectangulum EFB una
 cum ipso G, FD, hoc est, per
 Prop. 27. rectangulum AFC ad ipsum EFB, ut OP ad PQ,
 hoc est in ratione data.



Puncta autem F propiora puncta E majores faciunt ratio-
 nes quam remotiora, ut H. Nam per ea quae ostensa sunt ad
 finem Prop. 46. ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB major
 est ratione rectanguli G, HD ad rectangulum EHB; igitur,
 componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipso G, FD, hoc
 est rectanguli AFC ad ipsum EFB, major est ratione rectan-
 guli EHB una cum ipso G, HD, hoc est, per Prop 27. rect-
 anguli AHC ad ipsum EHB.

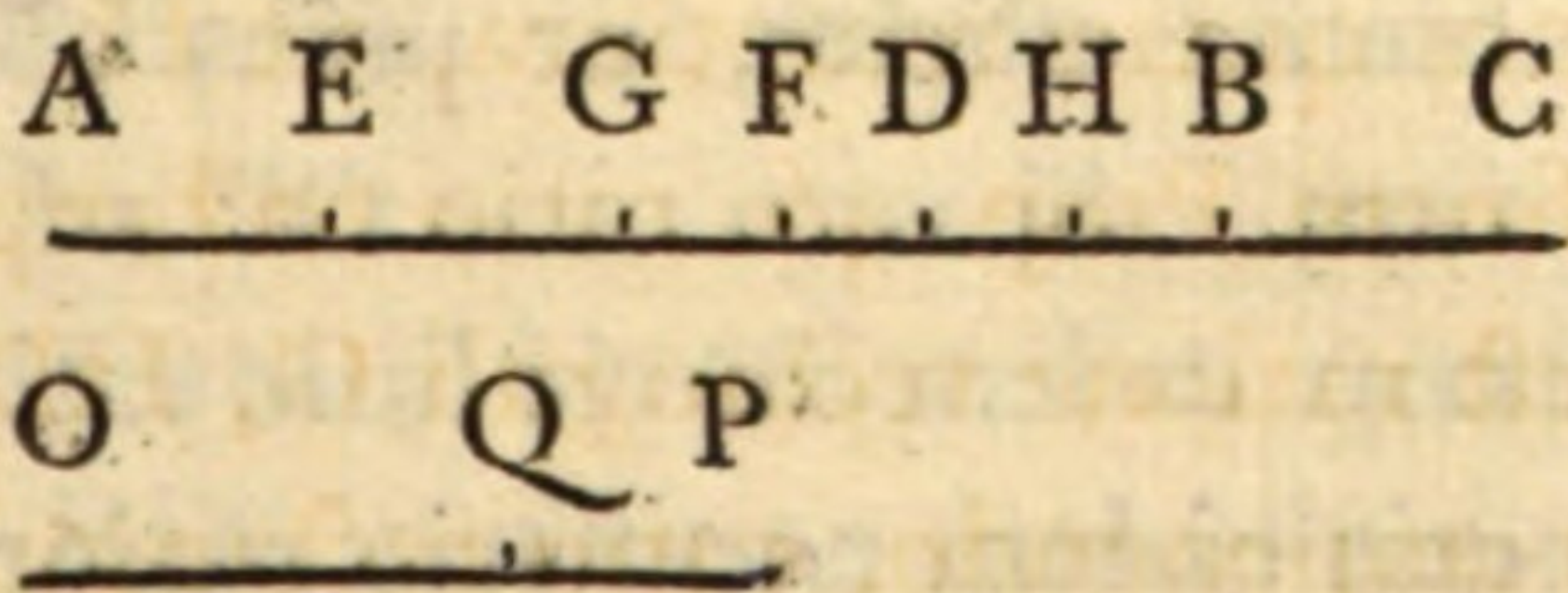
PROP. LIX. PROB. I. EPITAGMA 3.

“DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin-
 “tum invenire inter puncta media E, B quod faciet rectan-
 “gulum a segmentis inter ipsum et puncta extrema A, C ad
 “rectangulum a segmentis inter ipsum et puncta media E, B
 “in ratione data, quae, ut patet, debet esse majoris ad mi-
 “norem.”

CAS. 1. Quando aequales sunt rectae AE, BC inter se.

Factum puta; sit scilicet D punctum inveniendum inter E et B quod facit rectangulum ADC ad ipsum EDB in ratione data. Et quoniam, per Prop. 36. rectangulum ADC aequale est ipsis ABC, EDB simul, dividendo, habebit rectangulum ABC datam rationem ad rectangulum EDB. Datum autem est ABC, quia data sunt puncta A, B, C. datum igitur est rectangulum EDB, et data est recta EB, datum igitur^a est^a 86. Dat. punctum D.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ad datam rectam EB applicetur rectangulum dato rectangulo ABC aequale, deficiens quadrato, quod non semper fieri potest, quoties scilicet rectangulum ABC majus est quadrato ex dimidio ipsius EB, ideo Problema non semper potest construi. Fiet autem modo singulari si punctum applicationis inciderit in punctum F quod bifariam secat rectam EB, hoc est si rectangulum ABC aequale fuerit quadrato ex EF; et in hoc casu quoniam aequales sunt AE, BC, punctum F bifariam etiam secabit rectam AC, et propterea ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB eadem erit rationi quadrati ex AF ad quadratum ex EF, hoc est rationi quadrati ex AC ad quadratum ex EB; haec autem ratio minor est ratione quam facit aliud quodvis punctum D in recta EB. Quoniam enim quadratum ex EF majus^b est rectangulo EDB, habebit rectangulum ABC ad ipsum EFB, hoc est ad quadratum ex EF minorem rationem

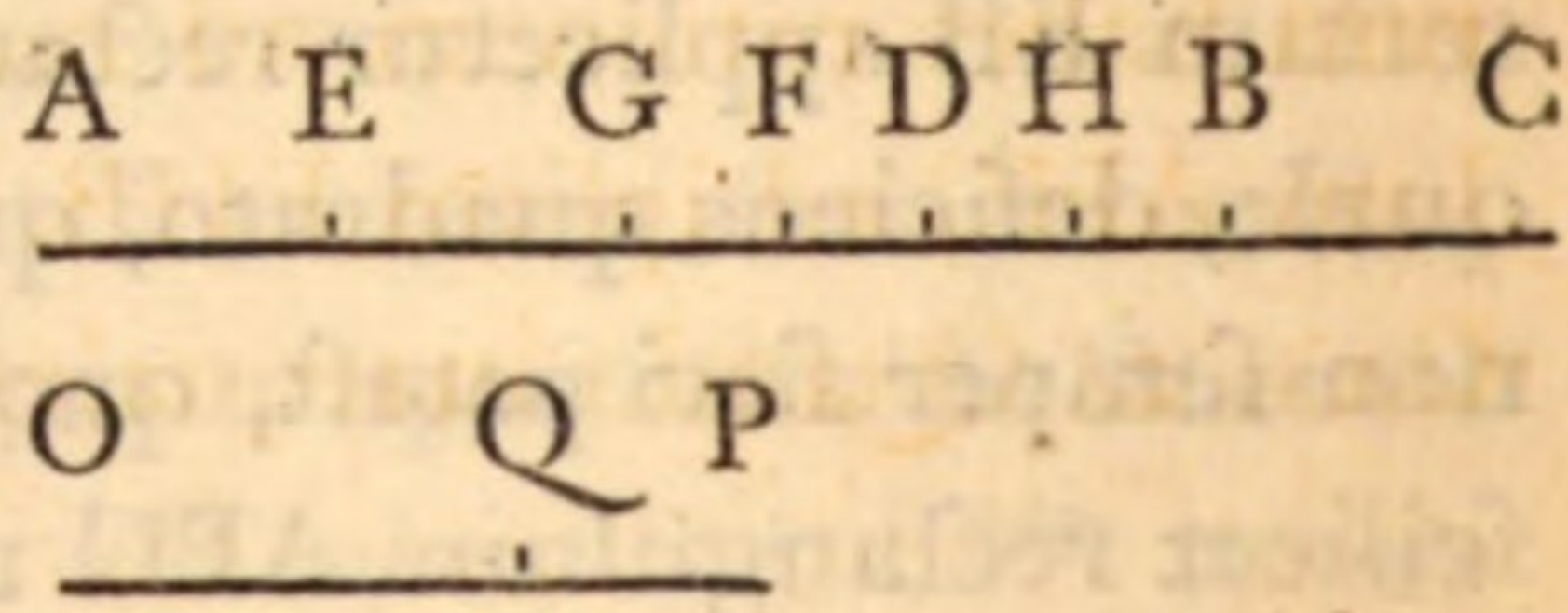


quam idem ABC habet ad rectangulum EDB, et, componendo, habebit quadratum ex AF ad quadratum ex EF minorem rationem quam rectangulum ABC una cum ipso EDB, hoc est, per Prop 36. quam rectangulum ADC habet ad ipsum EDB. Punctum igitur F facit minimam rationem.

Componetur autem Problema ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad ipsum EDB eadem rationi rectae OP ad ipsam PQ, et bifariam secta EB in F, si ratio OP ad PQ eadem fuerit rationi quadrati ex AC ad quadratum ex EB, hoc est rationi quadrati ex AF ad illud ex EF, five rationi

rectanguli AFC ad ipsum EFB, punctum F, idque solum, Problema efficiet, ut prius ostensum. Si vero ratio OP ad PQ



non eadem fuerit huic rationi,

erit eadem necessario major. Et quoniam requiritur ut ADC rectangulum sit ad ipsum EDB, ut OP ad PQ, dividendo, debet rectangulum ABC esse ad EDB, ut OQ ad QP. Fiat igitur ut OQ ad QP, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut OQ ad QP, ita AB ad BG, nam ita erit rectangulum ABC ad ipsum GBC. Quoniam vero ratio OP ad PQ major est, ex hypothesi, ratione quadrati ex AF ad quadratum ex FB, dividendo, ratio OQ ad QP, hoc est ratio rectanguli ABC ad ipsum GBC, major erit ratione ejusdem ABC ad quadratum ex FB. Igitur rectangulum GBC minus est quadrato ex FB. Quare ad rectam EB applicari potest rectangulum aequale ipsi GBC deficiens quadrato. Applicetur, sitque D utrumlibet ex applicationum punctis; erit D punctum inveni-

^c 10. 5. dratum ex FB. Igitur rectangulum GBC minus est quadrato

^d 28. 6. ex FB. Quare ad rectam EB applicari potest rectangulum aequale ipsi GBC deficiens quadrato. Applicetur, sitque D utrumlibet ex applicationum punctis; erit D punctum inveni-

endum. Quoniam enim, ex constructione, rectangulum EDB est aequale ipsi GBC, erit rectangulum ABC ad ipsum EDB, hoc est ad GBC rectangulum, ut (recta AB ad ipsum BG, hoc est ut) recta OQ ad QP, et, componendo, erit rectangulum ADC ad ipsum EDB, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data.

Puncta autem ipsi F propiora ad utrasvis partes, ut D, minores faciunt rationes quam puncta remotiora ad easdem partes, ut H. Rectangulum enim EDB majus est ipso EHB, quare rectangulum ABC minorem habet rationem ad EDB quam ad ipsum EHB; et componendo, rectangulum ADC minorem habet rationem ad rectangulum EDB, quam rectangulum AHC ad ipsum EHB.

CAS. 2. Quando inaequales sunt AE, BC. Sit autem AE major BC.

Factum puta; sit scilicet punctum F inveniendum quod facit rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data. Primo autem in AC producta inveniatur punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Sit et hoc factum; si igitur excessui ipsarum AE,

BC aequalis ponatur recta G, erit, per partem secundam Prop. 22. rectangulum G, CD aequale ipsi BCE; datum autem est rectangulum BCE, et data est recta G, igitur data est recta CD, datumque punctum D. Quoniam vero punctum F, ex hypothese, est inter E, B puncta, erit, per Prop. 30. rectangulum AFC aequale rectangulis EFB, G, FD simul. Et data est, ex hypothese, ratio rectanguli AFC

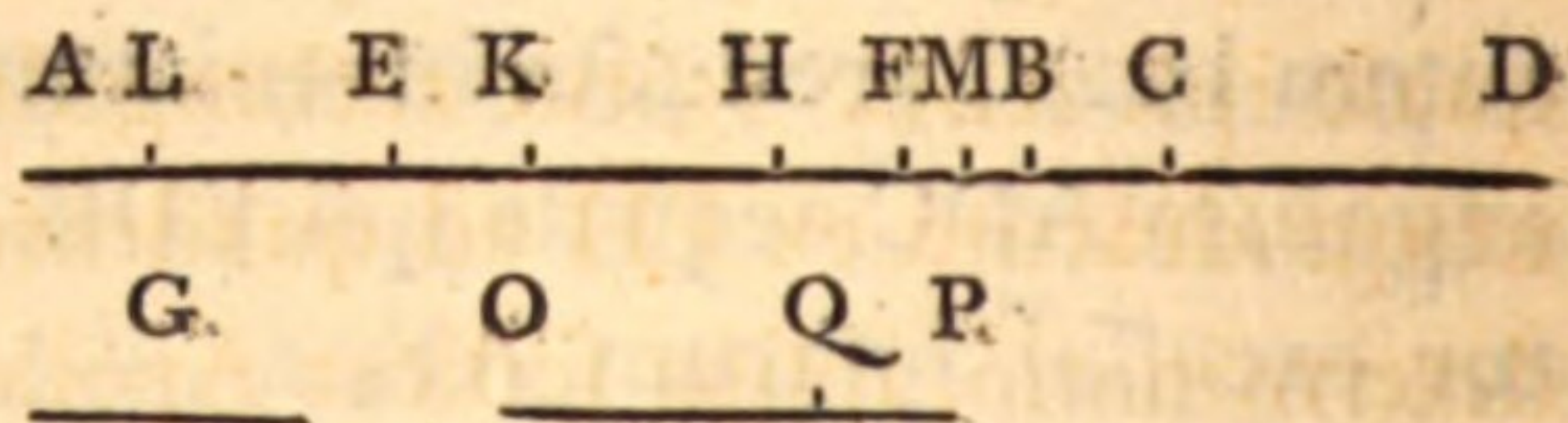
U

ad ipsum EFB, igitur, dividendo, data est ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB. Et data sunt puncta E, B, D, dataque est recta G. Deductum igitur est Problema ad Epitagma 3. Prob. 3. Lib. 1. hoc est ad Prop. 47. cuius ope punctum F invenietur.

Primo autem inveniendum est punctum D, quod fiet si ponatur recta G aequalis excessui ipsarum AE, BC, et ut G ad EC, ita fiat BC ad CD. Erit enim rectangulum G, CD aequale ipsi ECB; igitur per conversam partis 2dae Prop. 22. erit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Vel inveniri potest punctum D ut in Cas. 1. Prop. 65.

Quoniam vero Problema ad quod deductum est hoc, determinationem habet, et non semper construi potest, ideo neque hoc semper potest construi, sed determinationem habebit. Ostensum autem est in Prop. 47. datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, si inter ED, DB fumatur media proportionalis DH,

punctum H facere minimam rationem rectanguli G, HD ad ipsum EHB, hoc est si fumatur aliud



quodvis punctum F inter E, B puncta, fore rationem rectanguli G, HD ad ipsum EHB minorem ratione rectanguli G, FD ad ipsum EFB. Igitur, componendo, ratio rectanguli EHB una cum ipso G, HD ad rectangulum EHB minor est ratione rectanguli EFB una cum ipso G, FD ad rectangulum EFB. Est autem, per Prop. 30. rectangulum AHC aequale ipsis EHB, G, HD simul, et rectangulum AFC aequale ipsis EFB, G, FD simul; igitur ratio rectanguli AHC ad ipsum

EHB minor est ratione rectanguli AFC ad ipsum EFB; et propterea punctum H facit minimam rationem. Et quoniam in determinatione Problematis in Prop. 47. ostensum est, si fiat KH aequalis HB, fore rationem G ad EK eandem minimae rationi quam scilicet habet rectangulum G, HD ad ipsum EHB; igitur si fiat LE aequalis ipsi G, erit, componendo, ratio LK ad KE eadem rationi minimae, hoc est rationi rectanguli AHC ad ipsum EHB.

Punctum autem H quod facit minimam rationem ita determinabitur. Quoniam proportionales sunt ED, HD, BD erit ^b ED ad DB, ut (quadratum ex ED ad quadratum ex DH, ^{b2.cor. 20.6.} hoc est ut) quadratum ex EH ad illud ex HB. Igitur rectangulum G, ED est ad ipsum G, DB, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Quoniam vero rectangulum ADC aequale est ipsi EDB, et est recta G excessus ipsarum AE, BC, rectangulum G, ED aequale est ipsi AEC per 4tam partem Prop. 22. et per 3tiam partem ejusdem, rectangulum G, DB est aequale ipsi ABC. Igitur rectangulum AEC est ad ipsum ABC, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Atque haec est determinatio, ipsius scilicet Apollonii, quam Pappus memorat in Prop. 61. Lib. 7.

Componetur hoc ita,

*

Secetur EB in H ita ut rectangulum AEC sit ad ipsum ABC, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB; punctum H erit id quod facit minimam rationem. Nam ex hac proportionem et parte 4ta et 3tia Prop. 22. erit rectangulum G, ED ad ipsum G, DB, hoc est, erit recta ED ad ipsam DB, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Igitur, per Prop. 16. rectangulum EDB aequale est quadrato ex DH; quare, ut

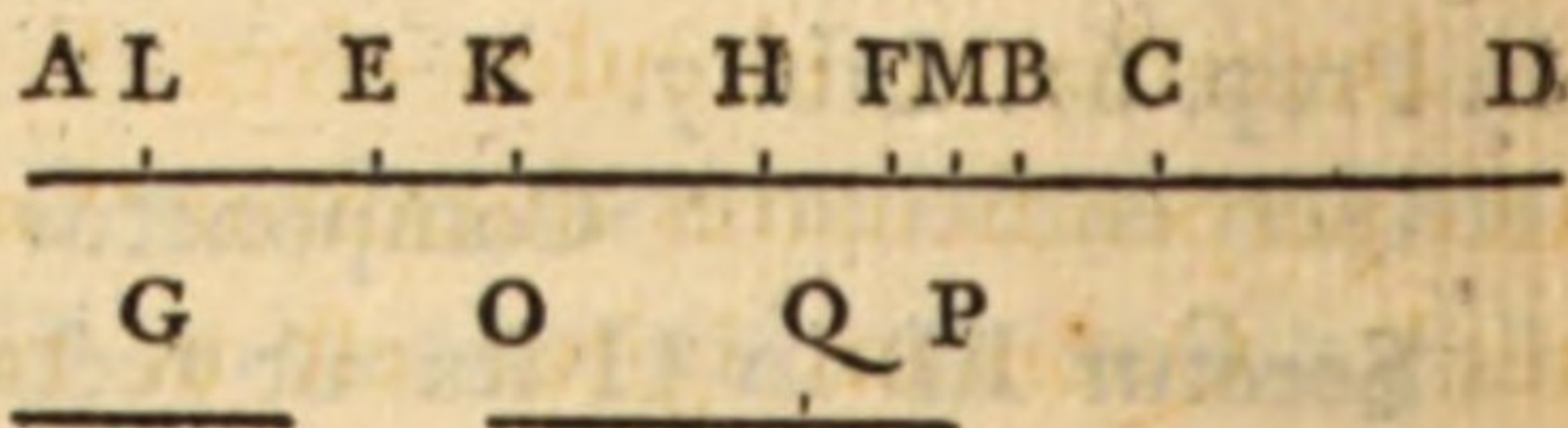
prius ostensum, punctum H facit minimam rationem. Potest etiam punctum H inveniri si fiat ut rectangulum BAE ad ipsum ECB, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC, ut constat ex Prop. 19.

Et puncta ipsi H propiora minores faciunt rationes quam puncta remotiora ad easdem partes puncti H. Sit enim punctum F propius ipsi H quam punctum M ad easdem partes ipsius H. Igitur, per ea quae ostensa sunt in determinatione Problematis in Prop. 47. erit ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB minor ratione rectanguli G, MD ad ipsum EMB; quare, componendo, et per Prop. 30. erit ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, minor ratione rectanguli AMC ad ipsum EMB.

Componetur vero Problema ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum a segmentis inter punctum inveniendum et puncta A, C ad rectangulum a segmentis inter ipsum et puncta E, B ea quam habet recta OP ad ipsam PQ. Et

inveniantur puncta D, H, K, L et recta G, ut in praemissis ostensum fuit. Et si ratio OP ad PQ eadem sit



rationi minimae, hoc est rationi quam habet recta LK ad ipsam KE, five rationi rectanguli AHC ad ipsum EHB, punctum H efficiet Problema, nullumque aliud, ut in praemissis ostensum. Si vero ratio data OP ad PQ, minor sit ratione minima, Problema non poterit construi. Quod si ratio OP ad

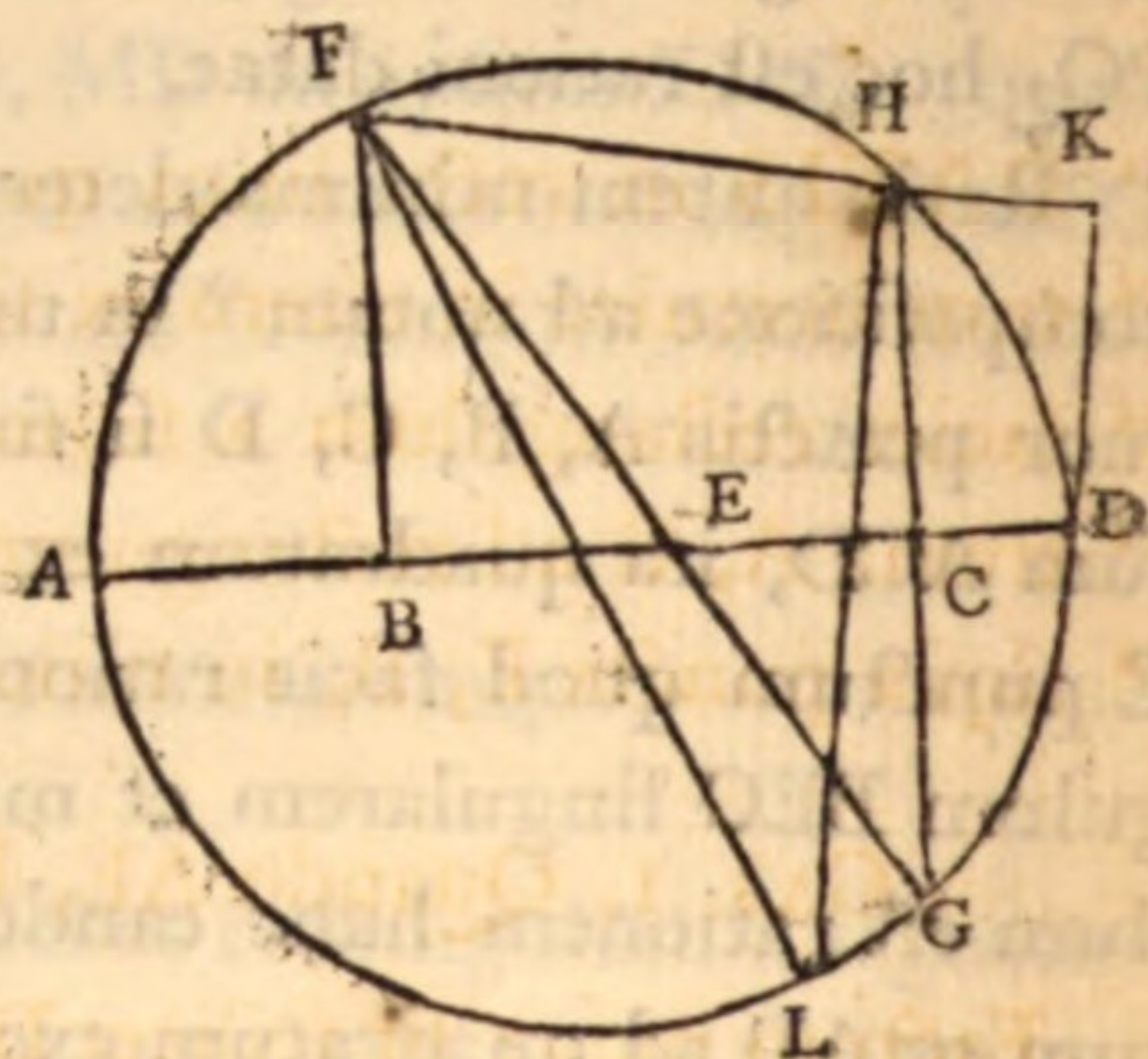
PQ major fit ratione minima LK ad KE, dividendo, ratio OQ ad QP major erit ratione LE, hoc est ipsius G ad EK. Igitur, per compositionem Problematis in Prop. 47. Datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, possunt inter E et B inveniri duo puncta quorum utrumlibet, quod sit F, faciet rectangulum G, FD ad ipsum EFB in data ratione quam habet recta OQ ad ipsam QP, et propterea componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipso G, FD, hoc est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, eadem erit rationi OP ad PQ, hoc est rationi datae.

Ratio autem minima determinatur ita. Ostensum fuit in compositione ad notam * in margine, datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D si fiat ut rectangulum ABD ad ipsum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex EC, fore E punctum quod facit rationem rectanguli AED ad rectangulum BEC singularem et minimam. Nunc vero ostendendum est rationem hanc eandem esse ei quam habet quadratum ex AD ad quadratum excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC, BD excedit eam quae potest rectangulum AB, CD.

Describatur circulus circa "diametrum" AD, et BF, CG perpendiculares ducantur "ad oppositas ipsius AD partes." Quoniam igitur est ut rectangulum ABD ad ipsum ACD, hoc est quadratum ex BF ad quadratum ex CG, ita quadratum ex BE ad quadratum ex EC, erit et longitudine ut BF ad CG, ita BE ad EC; ergo recta linea est quae per puncta F, E, G transit. Sit FEG, et GC ad H producat; juncta vero FH producat ad K, atque ad ipsam perpendi-

cularis ducatur DK. Ergo per Prop. 39. rectangulum AC, BD est aequale quadrato ex FK; rectangulum vero AB, CD quadrato ex HK aequale. Reliqua igitur FH est excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC, BD excedit eam quae potest rectangulum AB, CD. Ducatur per centrum FL, et HL jungatur. Itaque quoniam rectus angulus FHL est aequalis recto ECG, et angulus FLH aequalis ei qui ad G, aequiangula erunt triangula “LFH, GEC,” et ideo ut LF ad FH, hoc est

ut AD ad FH, ita GE ad EC; ergo ut quadratum ex AD ad quadratum ex FH, ita quadratum ex GE ad quadratum ex EC, et ^crectangulum GEF, hoc est AED ad rectangulum BEC. Est autem rectanguli quidem AED ad rectangulum BEC singularis et minima ratio.



FH vero est excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC, BD hoc est quadratum ex FK excedit eam quae potest rectangulum AB, CD hoc est quadratum ex HK. Ergo singularis et minima ratio eadem est quae quadrati ex AD ad quadratum excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC, BD excedit eam quae potest rectangulum AB, CD. Atque haec est ipsius Apollonii determinatio et demonstratio quas servavit Pappus in Prop. 61. Lib. 7. Mathematicarum Collectionum.

PROB. II.

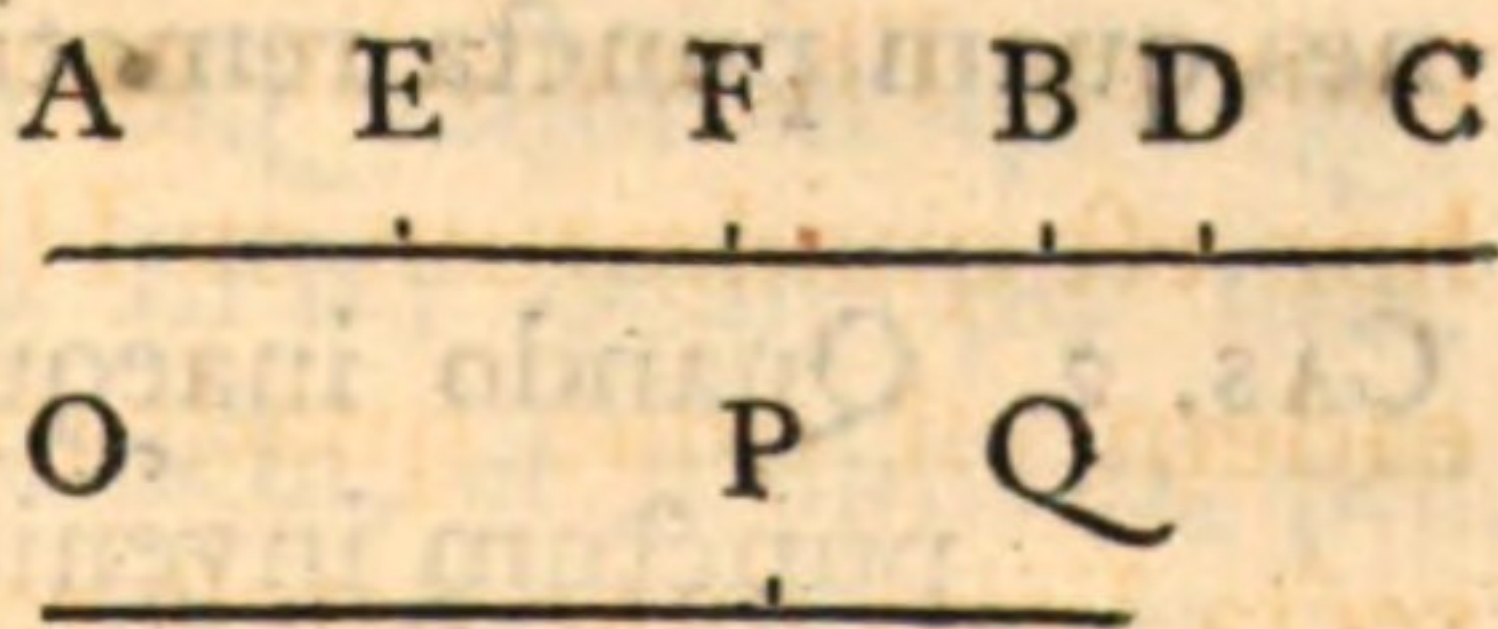
“ DATIS in recta linea quatuor punctis, quantum invenire
 “ in altero ex segmentis extremis, quod faciet rectangulum
 “ a segmentis inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis ad
 “ rectangulum inter ipsum et duo reliqua puncta, in ratione
 “ data.”

PROP. LX. PROB. II. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin-
 “ tum invenire in altero ex segmentis extremis AE, BC, quod
 “ faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et puncta ex-
 “ trema A, C ad rectangulum a segmentis inter ipsum et re-
 “ liqua puncta E, B, in ratione data.”

CAS. I. Quando AE, BC sunt inter se aequales.

Factum puta; sit scilicet D punctum in segmento BC quod
 facit rectangulum ADC ad ipsum EDB in ratione data. Et
 quoniam data est ratio rectanguli
 ADC ad ipsum EDB, componen-
 do, data erit ratio rectanguli ADC
 una cum ipso EDB ad rectangu-
 lum EDB, hoc^a est ratio rectan-
 guli ABC ad ipsum EDB. Et da-
 tum est ABC, igitur datum est rectangulum EDB. Data au-
 tem est recta EB, et est punctum D in EB producta, et prop-
 terea^b datum est punctum D.



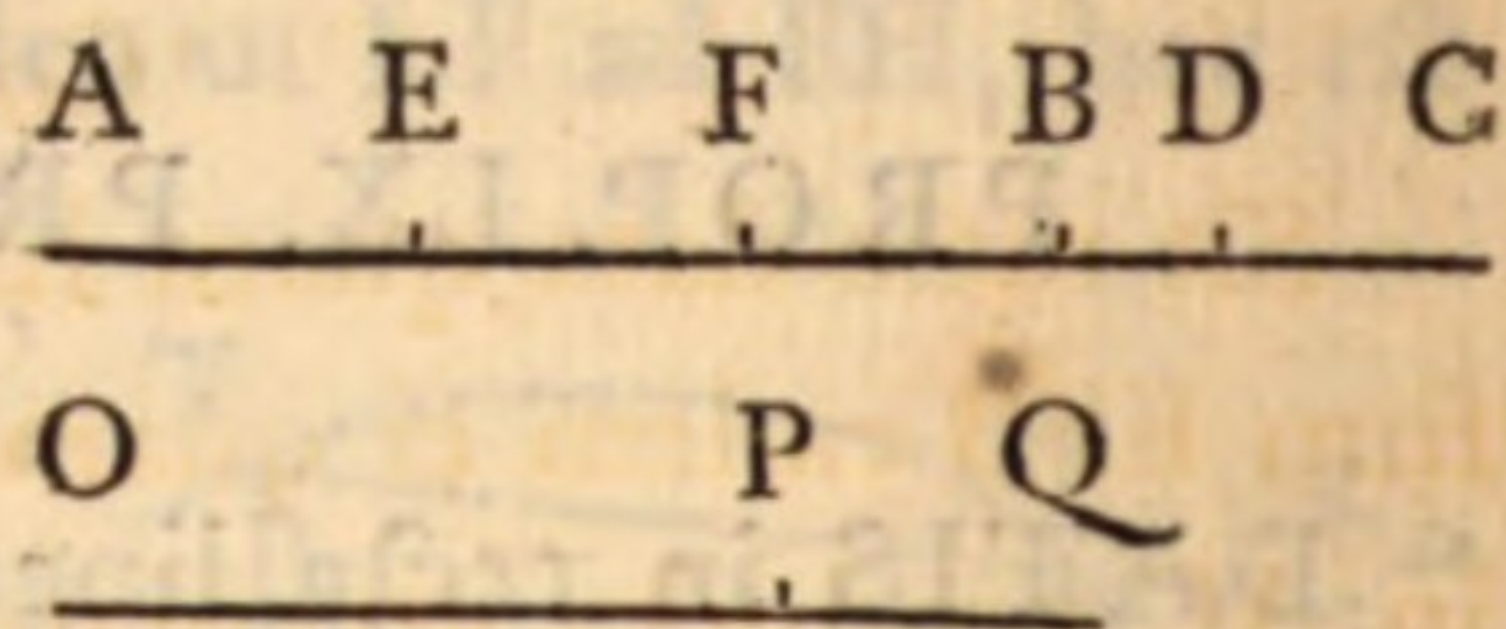
^a Prop. 37.

^b 85. Dat.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad ipsum EDB eadem rationi rectae OP ad ipsam PQ; et fiat ut OQ ad QP, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur si fiat ut OQ ad QP, ita AB ad BF, nam ita erit rectangulum ABC ad ipsum FBC. Ad rectam vero EB applicetur^c rectangulum aequale ipsi FBC

excedens quadrato, sitque D punctum applicationis quod est in EB producta ad partes C; erit D punctum inveniendum.



Quoniam enim, ex constructione, rectangulum EDB est aequale ipsi FBC, et est rectangulum ABC majus ipso FBC, recta enim OQ major est ipsa QP; erit ABC, hoc est ECB rectangulum majus ipso EDB; igitur punctum D cadit inter B, C puncta. Et quoniam rectangulum ABC est ad ipsum FBC, hoc est ad rectangulum EDB, ut OQ ad QP, dividendo, erit rectangulum^a ADC ad rectangulum EDB, ut OP ad PQ, hoc est in ratione data. Manifestum autem est puncta ipsi C propiora minores facere rationes quam puncta remotiora.

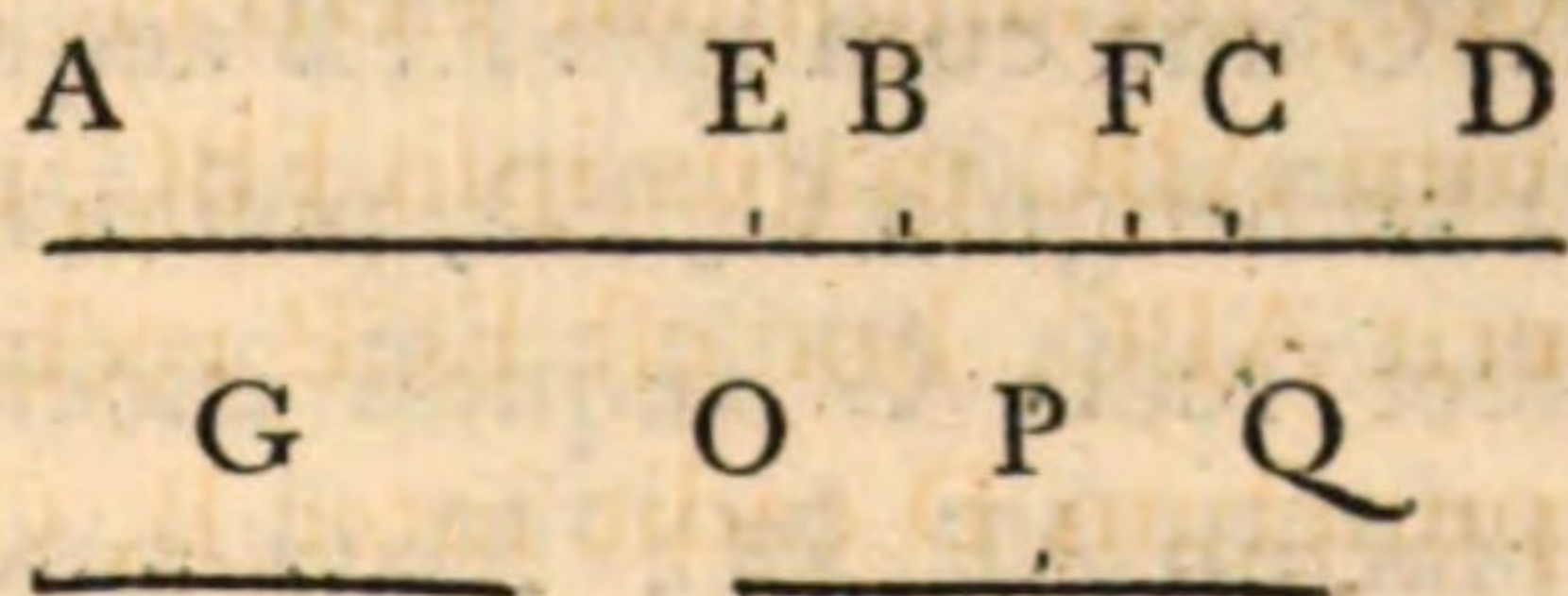
Cas. 2. Quando inaequales sunt AE, BC et requiritur ut punctum inveniatur in minore segmento BC.

Factum puta; sit scilicet punctum F inveniendum inter B et C quod facit rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data. Et in AC producta sit punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB; datum igitur est punctum D, ut ostensum fuit in analysi Cas. 2. Prop. 59. Et si ponatur

recta G aequalis excessui ipfarum AE, BC, quoniam punctum F est inter B et C, erit, per Prop. 31. rectangulum AFC una cum ipso EFB aequale rectangulo G, FD. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, quare, componendo, data est ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB; et data sunt puncta E, B, D, dataque est recta G; igitur deductum est ad Problema in Prop. 45. cujus ope punctum F invenietur.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB eadem ei quam habet recta OP ad ipsam PQ. Et in AC producta inveniat, ut ostensum fuit in compositione Cas. 2. Prop. 59. punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipso EDB; et excessui rectarum AE, BC ponatur recta G aequalis. Dein per compositionem Problematis in Prop.



45. datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, inveniat inter puncta B, D punctum F quod facit rectangulum G, FD ad ipsum EFB in data ratione quam habet recta OQ ad ipsam QP. Et quoniam OQ major est ipsâ QP, erit rectangulum G, FD majus ipso EFB; quare per Cor. Prop. 32. punctum F est inter B, C puncta, et propterea, per Prop. 31. rectangulum G, FD aequale est rectangulo AFC una cum ipso EFB. Et quoniam ut rectangulum G, FD ad ipsum EFB, ita est recta OQ ad ipsam QP. Igitur, dividendo, excessus rectanguli G, FD supra ipsum EFB, hoc est rectangulum AFC est ad ipsum EFB, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data.

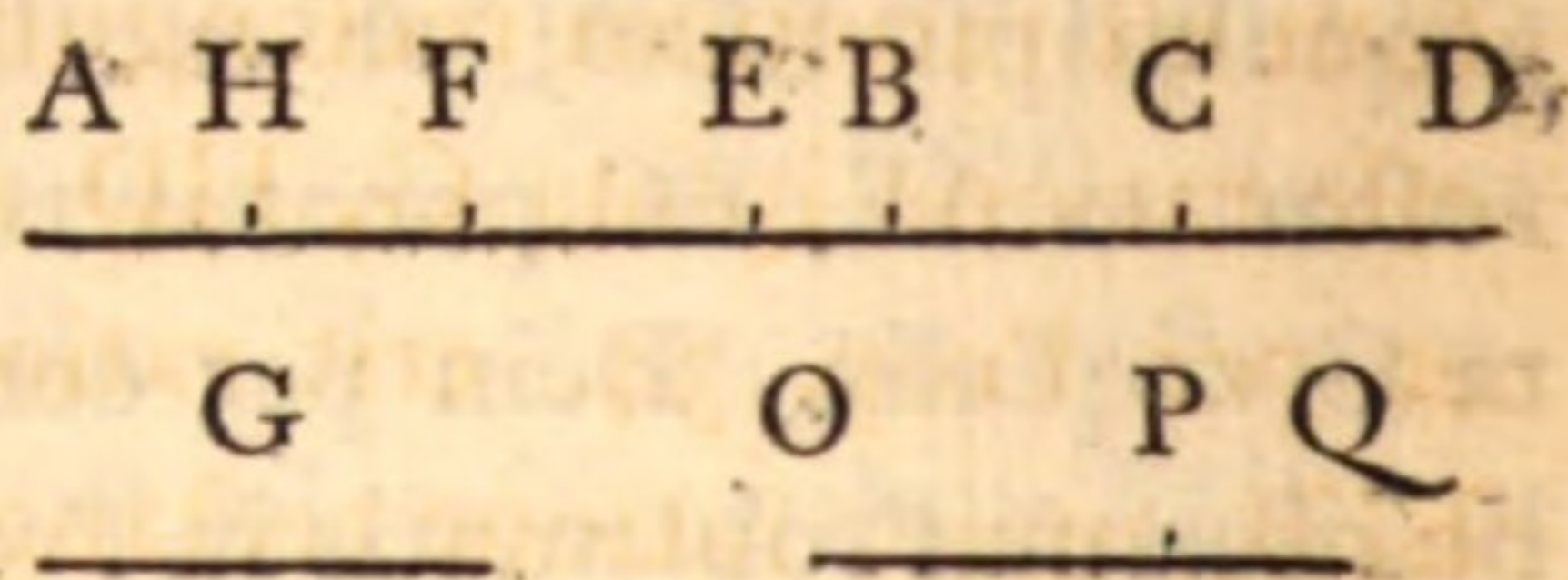
Quoniam vero recta BC, ex hypothesi, minor est ipsâ AE, punctum bifariam secans rectam AC cadet in segmento AB; unde manifestum est puncta ipsi C propiora minores facere rationes quam remotiora.

CAS. 3. Quando requiritur ut punctum F inveniatur in majore segmento AE.

Factum puta; fit scilicet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data. Et in AC producta fit punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Datum igitur est punctum D, ut prius ostensum. Quoniam vero punctum F, ex hypothesi, est inter A et E, erit per Prop. 34. rectangulum AFC una cum ipso EFB aequale rectangulo G, FD, positâ scilicet rectâ G aequali excessui ipsarum AE, BC. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, quare, componendo, data est ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB. Et data sunt puncta D, B, E, et data est recta G; igitur, quoniam F est extra data puncta, deductum est Problema ad Epitagma 1. Prob. 4. Lib. 1. hoc est ad Prop. 48. cujus ope inveniatur punctum F.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta OP ad ipsam PQ. Et invento puncto D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB, ut in Casu praecedente, fiat recta G aequalis excessui ipsarum AE, BC; datisque punctis D, B, E inveniatur extra ipsa ad



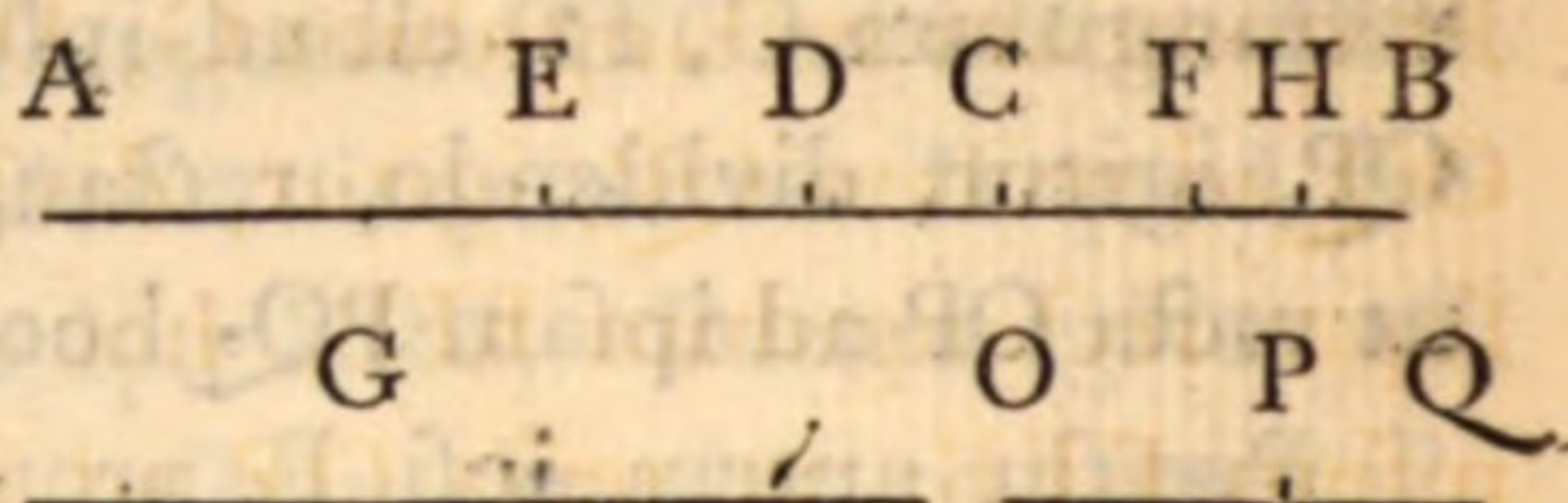
partes puncti E, per compositionem Problematis in Prop. 48. punctum F quod facit rectangulum G, FD ad ipsum EFB in data ratione quam habet recta OQ ad ipsam QP. Et quoniam OQ major est QP, erit rectangulum G, FD majus ipso EFB, quare, per Cor. Prop. 35. erit punctum F inter A, E puncta, et propterea, per Prop. 34. rectangulum G, FD aequale est rectangulo AFC una cum ipso EFB. Et quoniam rectangulum G, FD est ad ipsum EFB, ut recta OQ ad ipsam QP, igitur, dividendo, rectangulum AFC est ad ipsum EFB, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data.

Puncta autem ipsi E propiora majores faciunt rationes quam puncta remotiora. Sit enim punctum F propius ipsi E quam est punctum H; et quoniam ad finem Prop. 48. ostensum est rationem rectanguli G, FD ad ipsum EFB, majorem esse ratione ipsius G, HD ad rectangulum EHB, dividendo, et per Prop. 34. erit ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, major ratione rectanguli AHC ad ipsum EHB.

PROP. LXI. PROB. II. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quintum F invenire in altero ex segmentis extremis, puta inter C
 “ et B puncta quod faciet rectangulum AFC a segmentis inter ipsum et punctum extremum A quod ad easdem est
 “ partes ipsius F ad quas sunt puncta media, et punctum medium C ipsi F propius, ad rectangulum EFB a segmentis
 “ inter ipsum et reliqua puncta E, B, in ratione data.”

Factum puta; fit scilicet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data. Inter E, C puncta fit punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB; igitur si ponatur recta G aequalis ipsis AE, CB simul, erit per partem 2dam Prop. 21. rectangulum G, DC aequale rectangulo ECB. Datum autem est rectangulum ECB, et data est recta G, igitur data est DC, et punctum D datum. Quoniam vero punctum F est, ex hypothese, inter C, B puncta, erit, per Prop. 28. rectangulum AFC una cum ipso EFB aequale rectangulo G, DF. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, igitur, componendo, data erit ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB. Quoniam igitur data sunt puncta E, D, B, et data est recta G, deductum est ad Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1. hoc est ad Prop. 46. cujus ope invenietur punctum F inter D, B puncta.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta OP ad ipsam PQ, et inveniantur inter E et C punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB, quod fiet si ponatur recta G aequalis ipsis AE, CB simul, et ut G ad EC, ita fiat BC ad CD, erit enim rectangulum G, DC aequale rectangulo ECB; quare, per conversam partis 2dae Prop. 21. erit rectangulum ADC aequale ipsi EDB*. Dein per compositionem Problematis in Prop. 46.

* Vel ita invenietur punctum D; quoniam est AD ad DE, ut BD ad DC, ^b 12. 5. dividendo, ut AE ad ED, ita est BC ad CD, et ut ^b AE una cum CB ad EC,

dati in recta linea tribus punctis E, D, B, et data recta G, inveniatur inter puncta D, B punctum F quod faciet rectangulum G, DF ad ipsum EFB in data ratione quam habet OQ ad QP. Est autem recta OQ major ipsâ QP, et propterea rectangulum G, DF majus est ipso EFB; igitur, per Cor. Prop. 28. erit punctum F inter puncta C, B, quare, per Prop. 28. rectangulum G, DF est aequale rectangulo AFC una cum ipso EFB. Et quoniam rectangulum G, DF est ad ipsum EFB, ut recta OQ ad rectam QP, igitur, dividendo, excessus ipsius G, DF supra rectangulum EFB, hoc est ^a rectangulum AFC est ad ^a Prop. 28. ipsum EFB, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut H, propiora ipsi B majores faciunt rationes quam puncta remotiora ut F. Quoniam enim ostensum est in Prop. 46. rationem rectanguli G, DH ad ipsum EHB, majorem esse ratione rectanguli G, DF ad ipsum EFB; erit, dividendo, et per Prop. 28. ratio rectanguli AHC ad ipsum EHB, major ratione ipsius AFC ad rectangulum EFB.

Si autem requiratur ut punctum F inveniatur in segmento AE, scriptis notis alphabeticis in schemate ordine inverso, fiet tum analysis tum compositio iisdem verbis cum praecedentibus in hac Propositione.

ita BC ad CD. Datae autem sunt AE, CB, EC, data igitur est CD, datumque erit punctum D. Fiat igitur ut AE una cum CB ad EC, ita BC ad CD, et ^e ut ^e 19. 5. AE ad ED, ita erit BC ad CD; quare, componendo, ut AD ad DE, ita BD ad DC; igitur rectangulum ADC aequale est rectangulo EDB.

PROP. LXII. PROB. II. EPITAGMA 3.

“DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
 “tum F invenire in altero ex segmentis extremis EB quod
 “faciet rectangulum AFC a segmentis inter ipsum et punc-
 “tum extremum A quod est ad easdem ejus partes ad quas
 “sunt puncta media, punctumque medium C ab ipso remo-
 “tius ad rectangulum EFB a segmentis inter ipsum et reli-
 “qua puncta, in ratione data.”

Factum puta; fit scilicet punctum F inveniendum inter E
 et B quod faciet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione
 data. Inveniatur ope Cas. 1. Prop. 57. punctum D inter C et
 E quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Si igitur
 ponatur recta G ae-

qualis ipsis AE, CB si-
 mul, erit, per Prop. 25.

rectangulum AFC u-

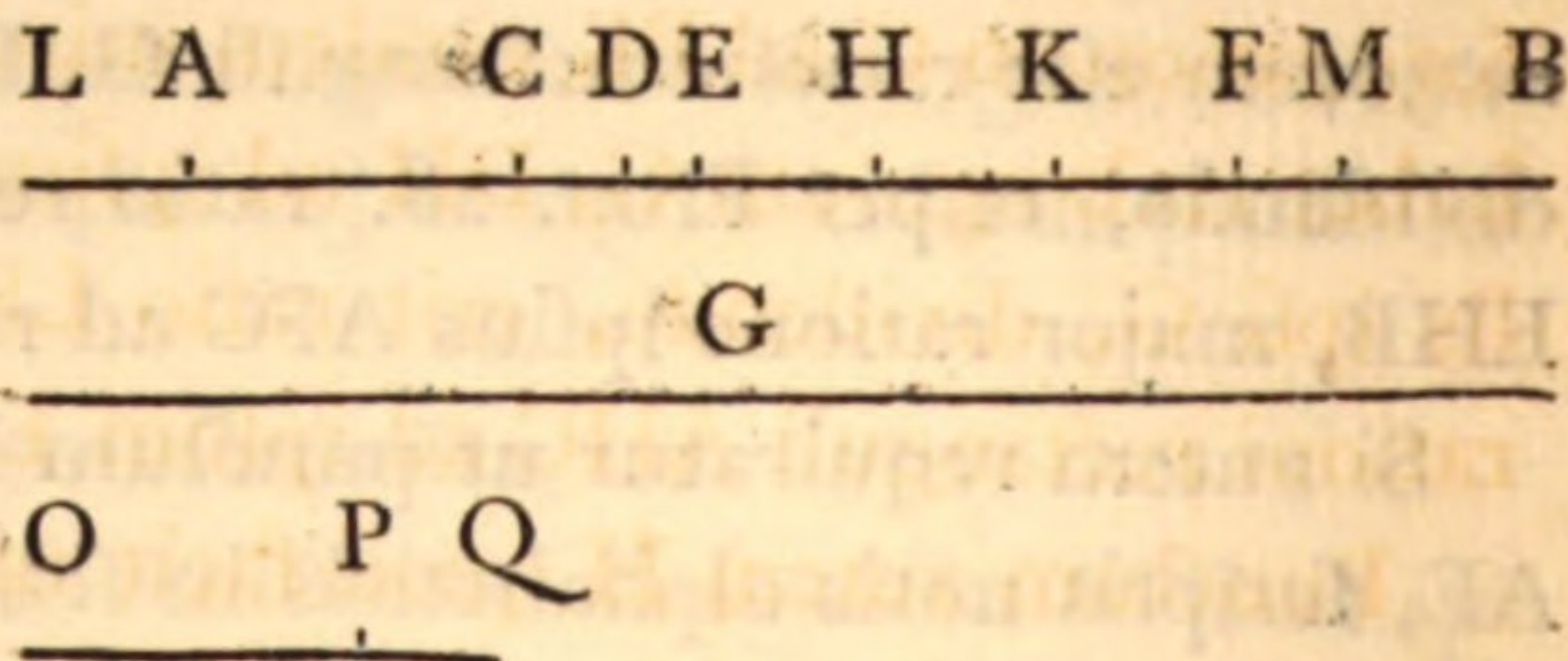
na cum ipso EFB ae-

quale rectangulo G,

DF. Data autem est

ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, igitur, componendo,
 data erit ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB. Data autem
 sunt puncta D, E, B, et data est recta G, et est punctum F
 inter E et B; ergo deductum est Problema ad Epitagma 3.
 Prob. 3. Lib. 1. hoc est ad Prop. 47. cujus ope invenietur
 punctum F.

Quoniam vero Problema ad quod deductum est hoc de-
 terminationem habet, et non semper construi potest, neque



hoc semper construi poterit. Ostensum autem est in Prop. 47. Datis in recta linea tribus punctis D, E, B, et datâ rectâ G, si inter BD, DE fumatur media proportionalis DH, punctum H facere minimam rationem rectanguli G, DH ad rectangulum EHB, hoc est si fumatur aliud quodvis punctum F inter E, B puncta, fore rationem rectanguli G, DH ad ipsum EHB minorem ratione rectanguli G, DF ad rectangulum EFB. Quoniam vero rectangulum ADC aequale est ipsi BDE, rectangulum AHC una cum ipso EHB aequale est rectangulo G, DH per Prop. 25. Et similiter rectangulum AFC una cum ipso EFB est aequale rectangulo G, DF; igitur, dividendo, erit ratio rectanguli AHC ad rectangulum EHB minor ratione rectanguli AFC ad ipsum EFB, et propterea punctum H facit minimam rationem. Et quoniam in determinatione Problematis in Prop. 47. ostensum est, positâ HK aequali ipsi EH, fore rationem G ad BK eandem minimae rationi quam scilicet habet rectangulum G, DH ad ipsum EHB; si fiat LB aequalis ipsi G, dividendo, erit ratio LK ad KB eandem minimae rationi rectanguli AHC ad ipsum EHB.

Punctum autem H quod facit minimam rationem ita determinatur. Quoniam proportionales sunt BD, DH, DE, erit^a 2. cor. 20. 6. BD ad DE, ut (quadratum ex BD ad quadratum ex DH, hoc est ut) quadratum ex BH ad quadratum ex HE. Igitur rectangulum G, DB est ad ipsum G, DE, ut quadratum ex BH ad quadratum ex HE. Quoniam vero rectangulum ADC aequale est ipsi BDE, et est recta G aequalis ipsis AE, CB simul, erit rectangulum G, DB aequale rectangulo ABC, et rectangulum G, DE aequale ipsi AEC, per partem scilicet 3tiam et 4tam Prop. 20. Est igitur rectangulum ABC ad ipsum AEC,

ut quadratum ex BH ad quadratum ex HE. Atque haec ipsa est determinatio quam Pappus memorat in Prop. 62. Lib. 7.

Componetur hoc ita,

Secetur EB in H, ita ut quadratum ex BH sit ad quadratum ex HE, ut rectangulum ABC ad ipsum AEC, punctumque H erit id quod facit minimam rationem. Nam ex hac proportionem et parte 3tia et 4ta Prop. 20. erit quadratum ex BH ad quadratum ex HE, ut rectangulum G, DB ad ipsum G, DE, hoc est ut recta BD ad

ipsam DE. Igitur, per Prop. 16. rectangulum BDE aequale est quadrato ex DH, et propterea DH media est proportionalis inter ipsas BD, DE; ideoque, ex praemissis, punctum H facit minimam rationem. Potest etiam punctum H inveniri si fiat ut rectangulum BAE ad ipsum BCE, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC, ut constat ex Prop. 18.

Et puncta ipsi H propiora minores faciunt rationes quam puncta remotiora ad easdem partes puncti H. Sit enim punctum F propius ipsi H quam punctum M ad easdem partes puncti H. Igitur per ea quae ostensa sunt in determinatione Problematis in Prop. 47. erit ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB minor ratione rectanguli G, MD ad ipsum EMB; quare, dividendo, et per Prop. 25. ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB minor est ratione rectanguli AMC ad rectangulum EMB.

Et puncta ipsi H propiora minores faciunt rationes quam puncta remotiora ad easdem partes puncti H. Sit enim punctum F propius ipsi H quam punctum M ad easdem partes puncti H. Igitur per ea quae ostensa sunt in determinatione Problematis in Prop. 47. erit ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB minor ratione rectanguli G, MD ad ipsum EMB; quare, dividendo, et per Prop. 25. ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB minor est ratione rectanguli AMC ad rectangulum EMB.

Componetur vero Problema ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta OP ad ipsam PQ, inveniantur autem puncta D, H, K, L et recta G, ut in praemissis ostensum fuit. Et si ratio OP ad PQ eadem sit rationi minimae, hoc est rationi LK ad KB, five rationi rectanguli AHC ad ipsum EHB, punctum H, idque solum, Problema efficiet, ut in praemissis ostensum est. Si vero ratio data OP ad PQ non eadem sit rationi huic minimae, erit, si Problema construi potest, eadem ratione necessario major. Sit igitur ratio OP ad PQ major ratione LK ad KB, et, componendo, ratio OQ ad QP major erit ratione LB, hoc est ipsius G ad KB. Quare, per Compositionem Problematis in Prop. 47. Datis in recta linea tribus punctis D, E, B, et datâ rectâ G, possunt inter E et B inveniri duo puncta quorum utrumlibet, quod sit F, faciet rationem rectanguli G, FD ad ipsum EFB eandem rationi datae quam habet OQ ad QP. Igitur, dividendo, ratio excessus rectanguli G, FD supra ipsum EFB, hoc est per Prop. 25. ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, eadem est rationi rectae OP ad ipsam PQ, hoc est rationi datae.

Ratio autem minima ita determinatur. Ostensum fuit, Datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D si fiat ut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita quadratum ex DE ad quadratum ex EC, fore E punctum quod facit minimam rationem rectanguli AEB ad rectangulum CED. Ostendendum nunc est rationem hanc eandem esse ei quam habet quadratum rectae lineae quae constat ex ea quae potest rectangulum AC, BD, et ex ea quae potest rectangulum AD, BC ad quadratum ex DC.

Ducatur a puncto E ipsi AD ad rectos angulos EF, et producat, fitque rectangulo ADB aequale quadratum ex DF, et ipsi FD parallela ducatur CG. Quoniam igitur ut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita est quadratum (ex DE ad quadratum ex EC, hoc est quadratum) ex DF ad quadratum ex CG; atque est rectangulum ADB quadrato ex DF aequale, erit et rectangulum

ACB aequale quadrato ex CG. Jungantur AF, FB, AG,

GB, occurratque GC ipsi BF

in H; itaque cum rectangu-

lum ADB fit aequale quadra-

to ex DF, angulus BFD aequa-

^a 17, et 6. 6. lis est ^a angulo FAB; est au-

tem et BGC angulus angulo

BAG aequalis ^a, quia rectan-

gulum ACB aequale est qua-

drato ex CG; sed et angulus

^b 29. 1. BFD angulo ^b BHG; igitur an-

guli BHG, BGH simul, hoc

est, si producat GB ut occurrat ipsi AF in K, angulus KBF

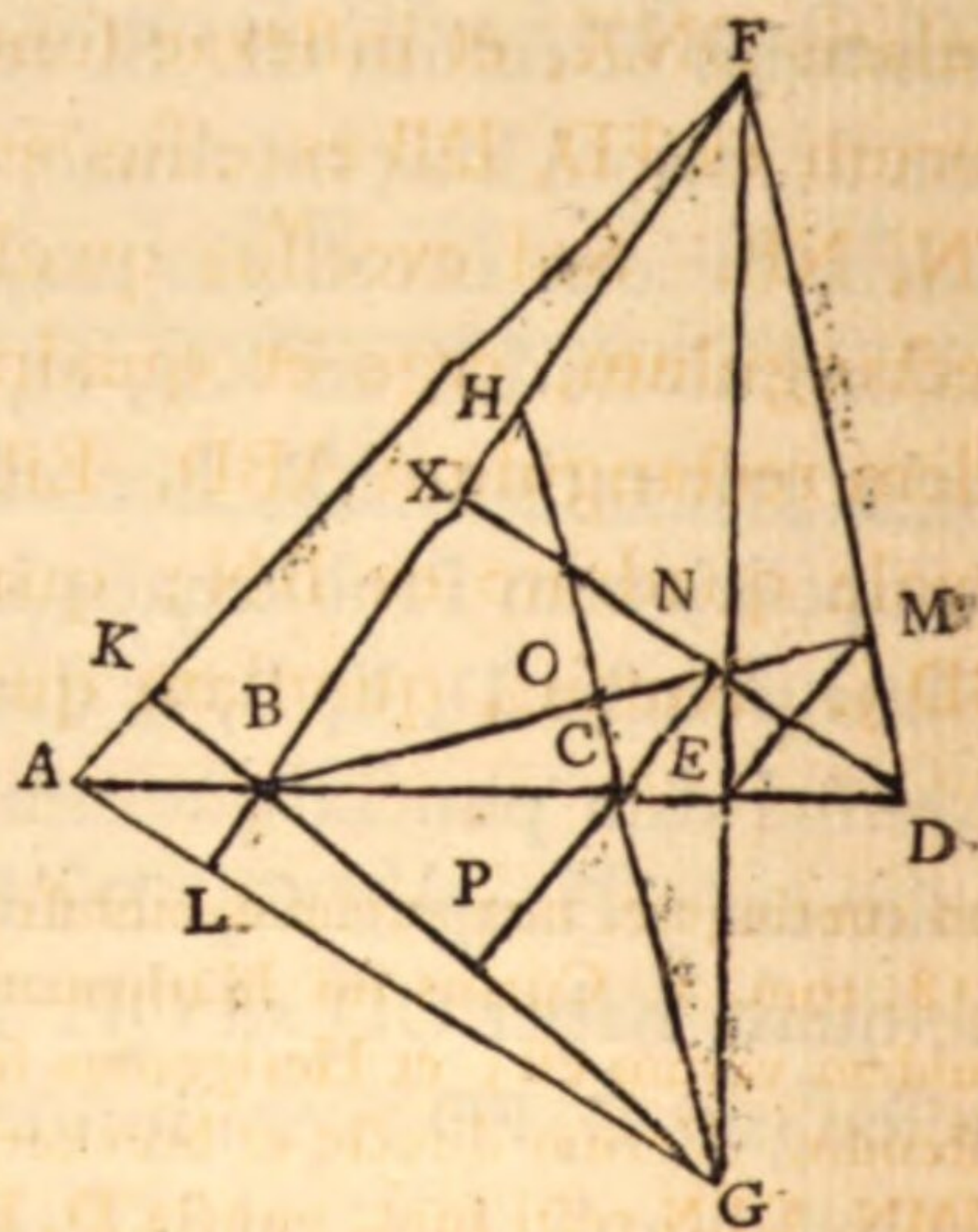
^c conv. 22. 3. aequalis est angulo LAK; quare in circulo sunt ^c A, L, B, K

puncta. Et per Prop. 40. anguli ad K, L puncta recti erunt.

Ducatur ad FD perpendicularis BM quae occurrat ipsi EF in

N, et juncta DN ad X producat. Perpendicularis igitur est

DX ad FL*, et ipsi GL parallela. Occurrat GC ipsi BN in O,



* Perpendicularis igitur est DX ad FL] Hoc prolixè conatur ostendere Commandinus in commentario suo ad literam M in pag. 198. b. Coll. Math. Pappi; verum ponit circulos FEC, AEK, in figura sua ad hanc notam, se mu-

ergo perpendicularis est ad BN, est enim FD ad BM perpendicularis. Angulus autem BGC angulo GAC est aequalis, ut prius ostensum. Sed angulus quidem BGC aequalis est angulo CNB in circulo †, angulus autem GAC aequalis est angulo BDN in parallelis, ergo et angulus CNB angulo BDN est aequalis, ac propterea^d rectangulum DBC aequale est quadrato^e 4. et 17. 6. ex BN. Quoniam autem in triangulo BDF acta est perpendicularis DNX, et inflexae sunt ad ipsam FN, NB erit quadratorum ex FD, DB excessus aequalis excessui quadratorum ex FN, NB. Sed excessus quadratorum ex FD, DB est ‡ ADB rectangulum, ergo et quadratorum ex FN, NB excessus est idem rectangulum ABD. Est autem et rectangulum DBC aequale quadrato ex BN; quare NF potest rectangulum AC, BD §. Rursum, quoniam quadratorum NG, NB excessus est

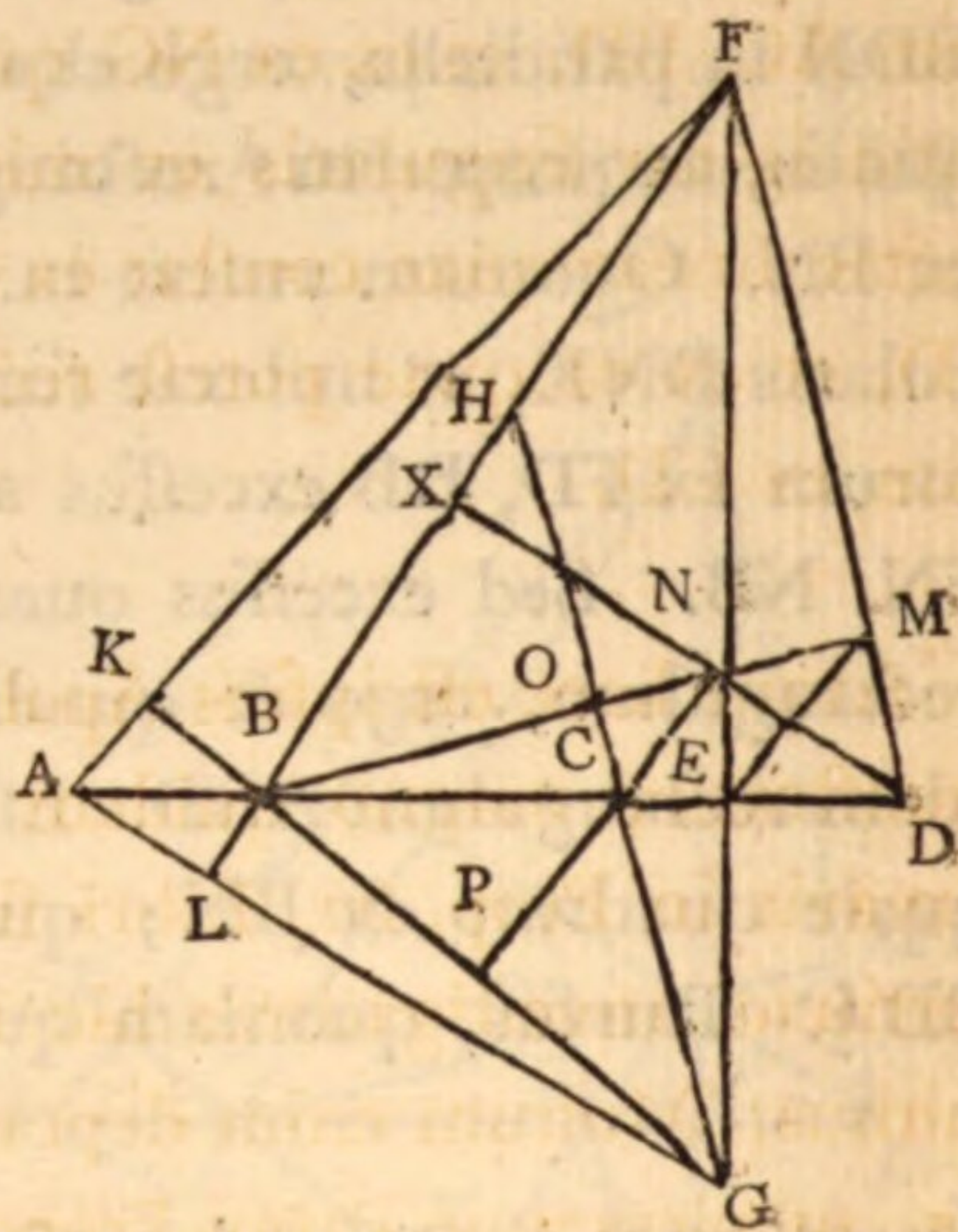
tuo contingere, non autem demonstrat, ut observatum est a Herigonio in pag. 318. tom. 1. Cursus sui Mathematici, unde dicit eum nihil probare, quod quidem verum est; et Herigonius satis longa demonstratione indirecte idem ostendit. Verum directe et breviter ita demonstratur, viz. Quoniam anguli DMN, DEN recti sunt, puncta D, E, N, M sunt in circulo, ut et puncta F, B, E, M. Juncta igitur EM, erit angulus MDN aequalis (angulo MEN, sive MEF, hoc est) angulo MBF; et in triangulis FDX, MBF, communis est angulus MFX; aequalis igitur est reliquus angulus DXF reliquo BMF, angulo scilicet recto. Unde DX perpendicularis est ad FL.

† Sed angulus quidem BGC aequalis est angulo CNB in circulo] Producat^r enim NC ad BG in P; et quoniam in triangulo BNG est BE perpendicularis ad NG, et GO ad BN, erit, per ea quae ostensa sunt in nota ad *, NP perpendicularis ad BG. Sunt igitur G, P, O, N puncta in circulo, quare angulus PGO aequalis est PNO in eodem segmento, hoc est angulus BGC aequalis ipsi CNB. COMMANDINUS.

‡ Sed excessus quadratorum ex FN, NB est ABD rectangulum] Quadratum enim ex FD aequale est rectangulo ADB cujus excessus supra quadratum ex DB est rectangulum ABD per 3. 2. COMMAND.

§ Quoniam enim excessus quadratorum ex FN, NB est rectangulum ABD,

aequalis excessui quadratorum ex GC, CB, quadratorum autem ex GC, CB excessus est ABC rectangulum*; erit quadratorum ex NG, NB excessus idem rectangulum ABC. Atque est rectangulum DBC aequale quadrato ex BN; ergo NG potest rectangulum AD, BC.† Sed et FN potest rectangulum AC, BD. Itaque quoniam rectus est angulus FKG, et perpendicularis AE “ad FG,” erit rectangulum AEB rectangulo FEG aequale.‡ Ergo ut rectangulum AEB ad rectangulum CED, ita est rectangulum FEG ad rectangulum CED. Ut autem rectangulum FEG ad rectangulum CED, ita quadratum ex FG ad quadratum ex CD §. Et



erit quadratum ex FN aequale rectangulo ABD et quadrato ex NB simul, hoc est rectangulis ABD, DBC simul, hoc est per 1. 2. rectangulo AC, BD; hoc est recta FN potest rectangulum AC, BD. COMMAND.

* Quoniam quadratum ex CG aequale est rectangulo ACB, excessus ejus supra quadratum ex CB est rectangulum ABC per 3. 2.

† Quoniam enim quadratorum ex NG, NB excessus est rectangulum ABC, erit quadratum ex NG aequale rectangulo ABC et quadrato ex NB simul, hoc est rectangulis ABC, DBC simul, hoc est rectangulo AD, BC. Igitur recta NG potest rectangulum AD, BC.

‡ Aequiangula enim sunt triangula AEF, GEB, quia utrumque acquiangulum est ipsi AKB; igitur ut AE ad EF, ita EG ad EB.

§ Quoniam enim parallelae sunt FD, GC, erit [2. 6.] FE ad ED, ut FG ad DC; similia autem sunt rectangula FEG, DEC, igitur [22. 6.] rectangulum FEG est ad ipsum DEC, ut quadratum ex FG ad quadratum ex CD.

ut igitur rectangulum AEB ad rectangulum CED, ita quadratum ex FG ad quadratum ex CD. Estque rectanguli quidem AEB ad rectangulum CED singularis et minima ratio; recta vero linea FEG constat ex ea FN quae potest rectangulum AC, BD, et ex ea NG quae potest rectangulum AD, BC: ratio igitur singularis et minima, eadem est quae quadrati rectae lineae quae constat ex ea quae potest rectangulum AC, BD, et ex ea quae potest rectangulum AD, BC, ad quadratum ex CD.

Atque haec est ipsius Apollonii Determinatio, ejusque Demonstratio, magno quidem Geometra digna, quas Pappus servavit in Prop. 62. Libri sui septimi, quam Propositionem pertinaci investigatione hic in pristinam integritatem restitimus. Multum enim depravata habetur in codicibus Graecis, ut pleraeque Pappi Propositiones Librariorum incuria et ignorantia. Unde Federicus Commandinus, qui in veterum Geometrarum scriptis, praesertim quidem Pappi Alexandrini, emaculandis, maximam et utilissimam adhibuit diligentiam, bonus licet Geometra, Propositionem hanc restituere minime potuit. Commentarii enim prolixi quos in eam scripsit ad notas in margine Z , α , β , nihil ad rem faciunt, quoniam ad textum Pappi corruptum explicandum adferuntur, qui quidem, ut habetur in Commandini versione et manuscriptis Graecis, explicari minime potest. Non enim hunc locum corruptum esse videbat Commandinus, qui in aliis locis manuscriptum corruptum esse putat quando integer est, et in quibusdam locis quaedam ut supervacanea omittit, quae quidem necessaria sunt. Et quidem materiam hanc non fatis intel-

lexit, ut ingenue fatetur in commentario ad notam A ad Prop. praecedentem 61. Lib. 7. Pappi, ubi haec habet “Graecus codex ὁ μοναχὸς λόγος καὶ ἐλαχίστος ἐστὶν ὁ τῶν ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΝ. Quibus verbis quid significetur, quidque per monachos, et Epitagma in his Lemmatibus intelligat, factis percipi non potest, cum Apollonii libris careamus, in quos ea conscripta sunt.”

P R O B. III.

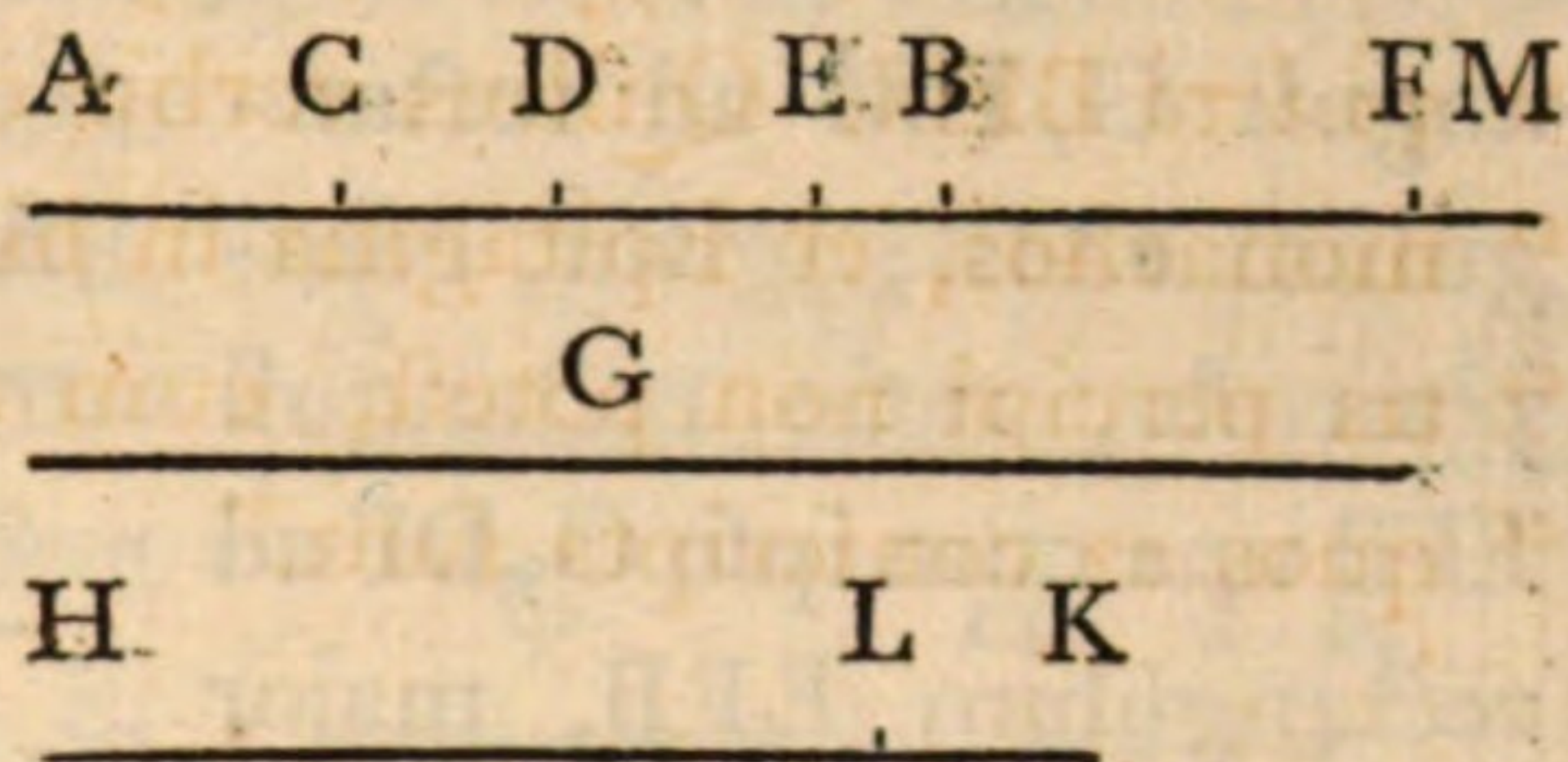
“DATIS in recta linea quatuor punctis, quintum invenire extra data puncta, ad utraque partes, quod faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et duo ex punctis datis, ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta, in ratione data.”

PROP. LXIII. PROB. III. EPITAGMA I.

“DATA sint puncta A, C, E, B quintum invenire extra puncta data, ad partes scilicet puncti B, quod faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C ab ipso remotiora, ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, in ratione data. Patet autem rationem datam debere esse majoris ad minorem.”

Factum puta; sit scilicet punctum F inveniendum quod faciet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data. Primo autem inveniatur inter puncta C, E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE, ope scilicet Cas. 1. Prop.

57. Igitur si utrisque AE, CB aequalis ponatur recta G, erit, per Prop. 26. rectangulum AFC aequale rectangulis EFB, G, DF simul. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, quare, dividendo, data erit ratio rectanguli G, DF ad rectangulum EFB. Igitur deductum est ad Problema in Prop. 48.

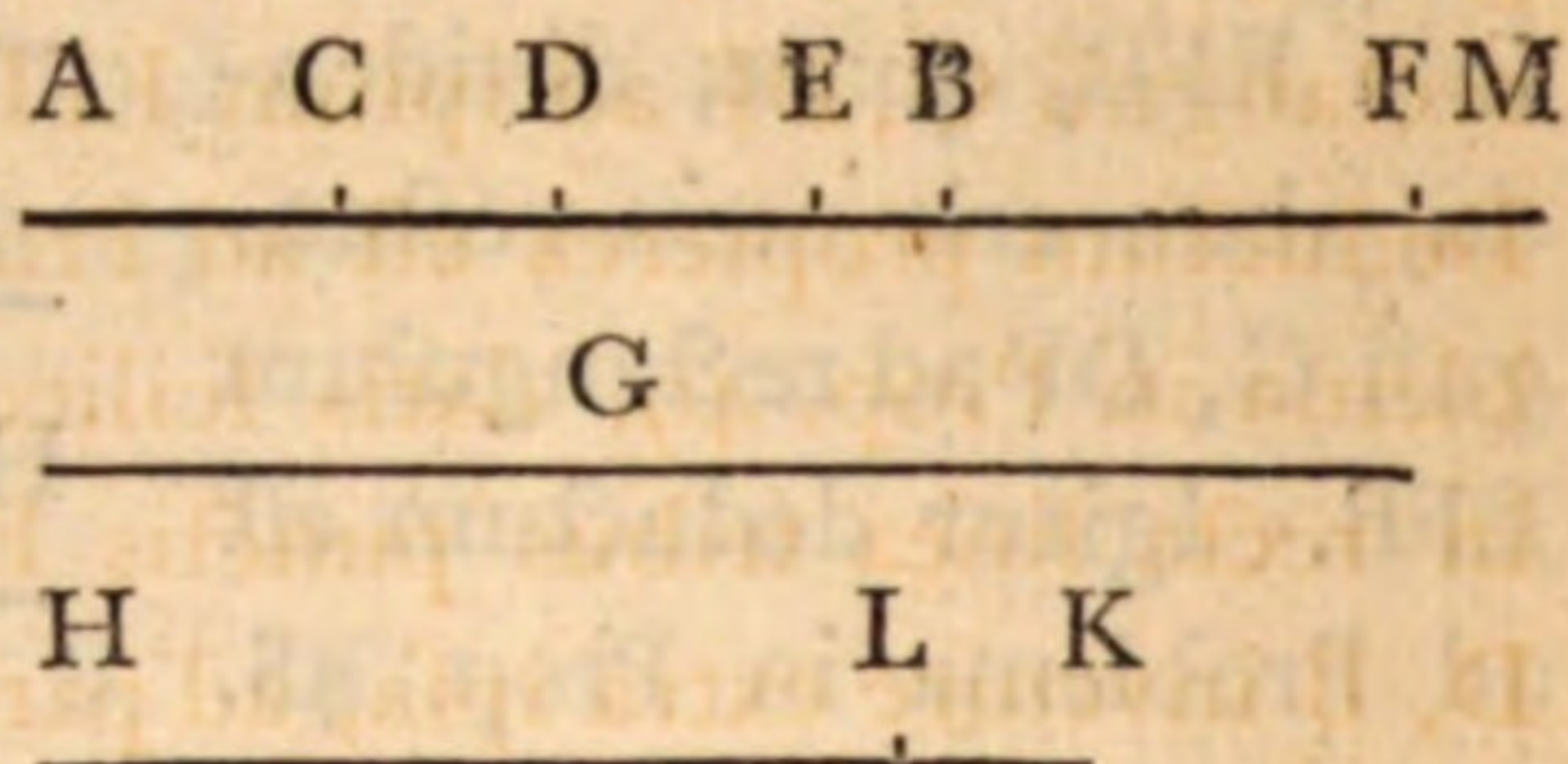


datis scilicet in recta linea tribus punctis D, E, B invenire extra ipsa, ad partes puncti B, quantum F quod faciet rectangulum a data recta G et ipsa DF, ad rectangulum EFB in ratione data. Datum igitur est punctum F.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta HK ad rectam KL; et invento puncto D ut dictum fuit, per Prop. 48. datis in recta linea tribus punctis D, E, B, et recta lineâ G aequalis scilicet ipsis AE, CB simul, inveniatur in DB producta ad partes B, punctum F quod facit rectangulum a data recta G et segmento FD inter punctum F et punctum D ab eo remotissimum ad rectangulum EFB a segmentis inter F et reliqua puncta E, B, in ratione data quam habet HL ad LK; erit F punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum G, FD est ad ipsum EFB, ut recta HL ad ipsam LK, erit, componendo, rectangulum EFB una cum ipso G, DF ad rectangulum EFB, ut HK ad KL. Rectangula autem EFB, G, DF simul aequalia sunt rectangulo AFC, per Prop. 26. quod propterea est ad rectangulum EFB, ut HK ad KL, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut F, propiora puncto B majores faciunt rationes quam puncta remotiora, ut M. Nam per Prop. 48. ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB major est ratione rectanguli G, DM ad rectangulum EMB; igitur, componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipso G, DF ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli EMB una cum ipso G, DM ad ipsum EMB, hoc est, per Prop. 26. ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli AMC ad ipsum EMB. Puncta igitur propiora ipsi B faciunt majores rationes quam puncta remotiora.



PROP. LXIV. PROB. III. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
 “ tum invenire extra data puncta, quod faciet rectangulum
 “ a segmentis inter ipsum et punctum A ab eo remotissimum
 “ et punctum medium C quod ipsi propius est, ad rectangu-
 “ lum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B in rati-
 “ one data. Patet autem rationem datam debere esse majoris
 “ ad minorem.”

Factum puta; sitque F punctum inveniendum quod faciet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data; et ope Caf. 1. Prop. 58. inveniatur inter puncta E, C punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Igitur per

Prop. 29. si utrisque AE, CB aequalis ponatur recta G, erit rectangulum AFC aequale rectangulo EFB una cum ipso G, DF. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, igitur, dividendo, data erit ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB.

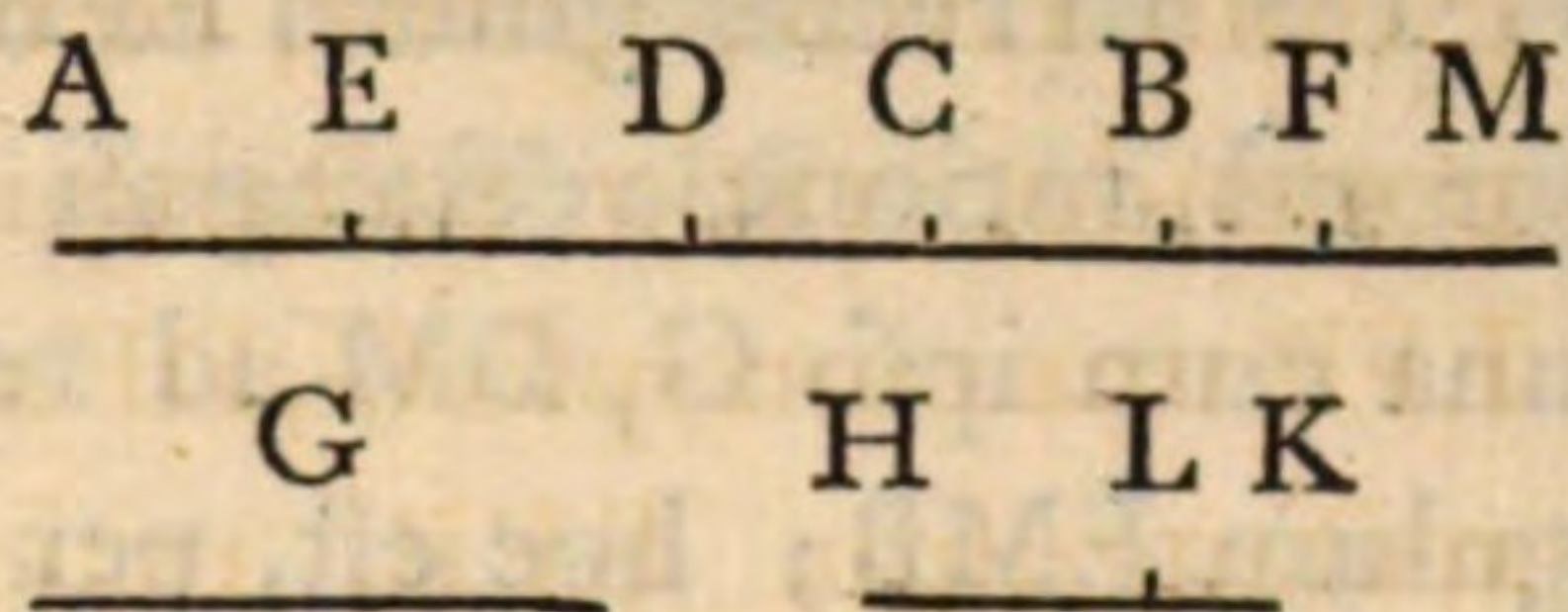
Deductum propterea est ad Pro-

blema in Prop. 49. datis scilicet

in recta linea tribus punctis E,

D, B invenire extra ipsa, ad par-

tes puncti B, quantum F quod faciet rectangulum a data recta G et segmento DF inter F et punctum medium D ad rectangulum EFB in ratione data. Datum igitur est punctum F.



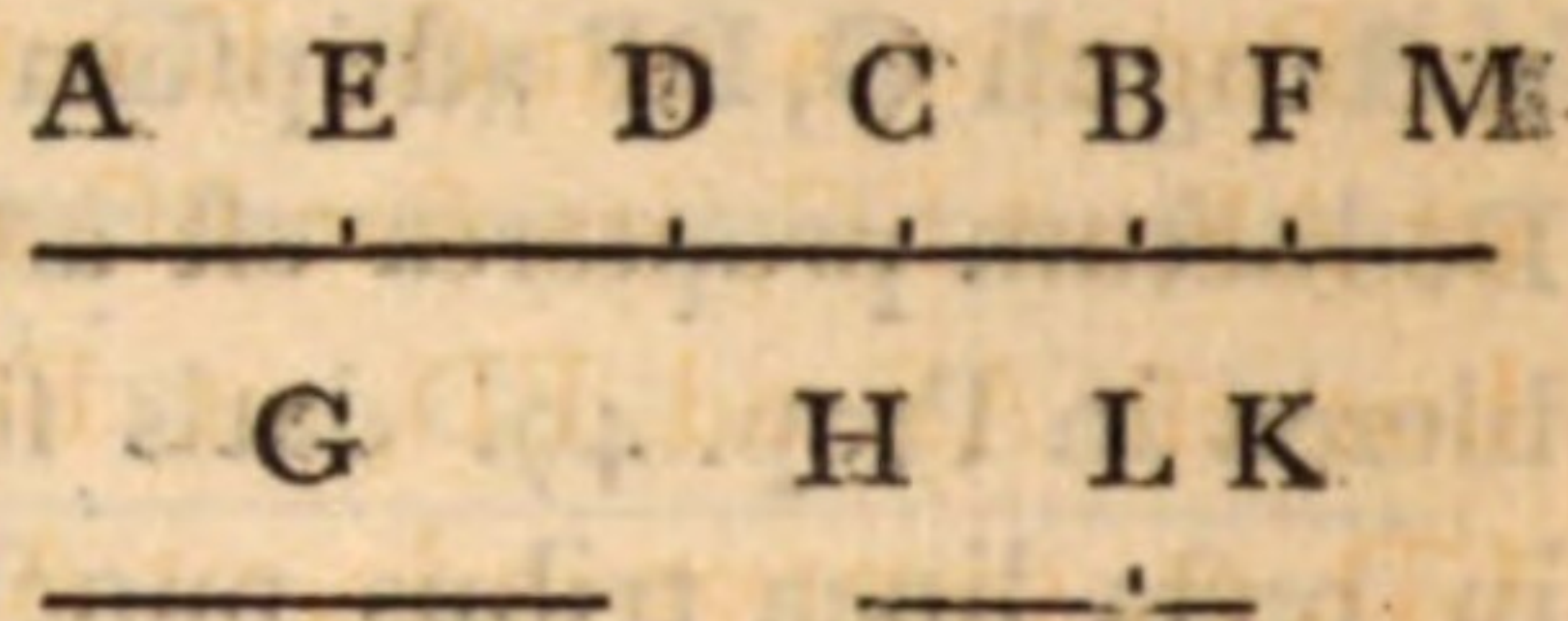
Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta HK ad rectam KL; et per Prop. 49. datis in recta linea tribus punctis E, D, B, et recta lineâ G aequalis scilicet ipsis AE, CB simul, inveniat in DB producta ad partes B, punctum F quod faciet rectangulum a data recta G, et segmento FD inter F et punctum medium D ad rectangulum EFB a segmentis inter F et reliqua puncta E, B, in ratione data quam habet HL ad LK; erit F punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum G, FD est ad ipsum EFB, ut recta HL ad ipsam LK, erit, componendo, rectangulum EFB una cum ipso G, FD ad rectangulum EFB, ut HK ad KL. Rectangula autem EFB, G, FD simul aequalia sunt rectangulo AFC, per Prop. 29. quod propterea est ad rectangulum EFB, in data ratione HK ad KL.

Puncta autem, ut F, propiora puncto B majores faciunt ra-

Z

tiones quam puncta remotiora, ut M. Nam, per Prop. 49. ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB major est ratione rectanguli G, DM ad ipsum EMB; igitur, componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipso G, DF ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli EMB una cum ipso G, DM ad rectangulum EMB; hoc est, per Prop. 29. ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli AMC ad ipsum EMB. Puncta igitur propiora ipsi B majores faciunt rationes quam puncta remotiora.



PROP. LXV. PROB. III. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C, quin-
 “ tum invenire extra data puncta quod faciet rectangulum a
 “ segmentis inter ipsum et puncta extrema A, C ad rectan-
 “ gulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, in
 “ ratione data.

CAS. I. Quando ratio data est aequalis ad aequalem.

Factum puta; sit scilicet D punctum inveniendum quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Est igitur AD ad DE, ut BD ad DC, et, dividendo, ut AE ad ED, ita BC ad CD; quare ^a ut excessus ipsarum AE, BC ad EC, ita est BC ad CD. Datae autem sunt AE, BC, EC, data igitur est CD, datumque erit punctum D. Quoniam vero est AE ad ED, ut

^a cor. 19. 5.

BC ad CD, et est ED major CD, erit AE major BC, hoc est punctum D necessario cadit ad partes rectae AC ad quas est minor rectarum AE, BC, ad partes scilicet ipsius BC.

Componetur ita,

Ponatur a puncto E versus A recta EF aequalis ipsi BC; et ut AF ad EC, ita fiat BC ad CD, igitur^b est AF et BC simul, ^b 12. 5. hoc est AE ad ED, ut BC ad CD, et, componendo, ut AD ad DE, ita BD ad DC. Rectangulum igitur ADC est aequale rectangulo EDB. Si vero BC major fuerit quam AE, punctum D eodem modo inveniatur in CA producta ad partes A. Haec autem est pars secunda Prop. 22.

A F E B C D
—————

CAS. 2. Quando ratio data est minoris ad maiorem.

Primò, aequales inter se sint AE, BC, sitque D punctum inveniendum.

Factum puta; habeat scilicet rectangulum ADC datam rationem ad rectangulum EDB. Quoniam vero aequales sunt AE, BC, et est punctum D in AC producta, erit, per Prop. 38. rectangulum EDB aequale rectangulis ADC, ECB simul. Rectangula igitur ADC, ECB simul datam habent rationem ad rectangulum ADC, quare, dividendo, data est ratio rectanguli ECB ad rectangulum ADC. Datum autem est ECB, quia data sunt puncta E, B, C; datum igitur est rectangulum ADC, et data est recta AC; quare^a ^a 85. Dat. data est CD, punctumque C propterea datum est.

A E B C D L K
—————
H F G
—————

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad ipsum EDB ea quam habet recta FG ad ipsam GH, et ut HF ad FG, ita fiat rectangulum ECB ad aliud, quod invenietur faciendo ut HF ad FG, ita EC ad CK, nam ita erit rectangulum ECB ad ipsum BCK; et ad rectam AC applicetur rectangulum aequale ipso BCK, excedens quadrato, fitque D punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C; erit D punctum invenendum. Quoniam enim, ex constructione, rectangulum ADC aequale est ipso BCK, erit rectangulum ECB ad ipsum ADC, (hoc est ad BCK, ut EC ad CK, hoc est) ut HF ad FG; et, componendo, erit rectangulum ADC una cum ipso ECB ad rectangulum ADC, ut HG ad GF; et, invertendo, erit rectangulum ADC ad ADC una cum ipso ECB, hoc est ad ipsum EDB, ut FG ad GH, hoc est in ratione data.

A	E	B	C	D	L	K
—————						
H	F	G				
—————						

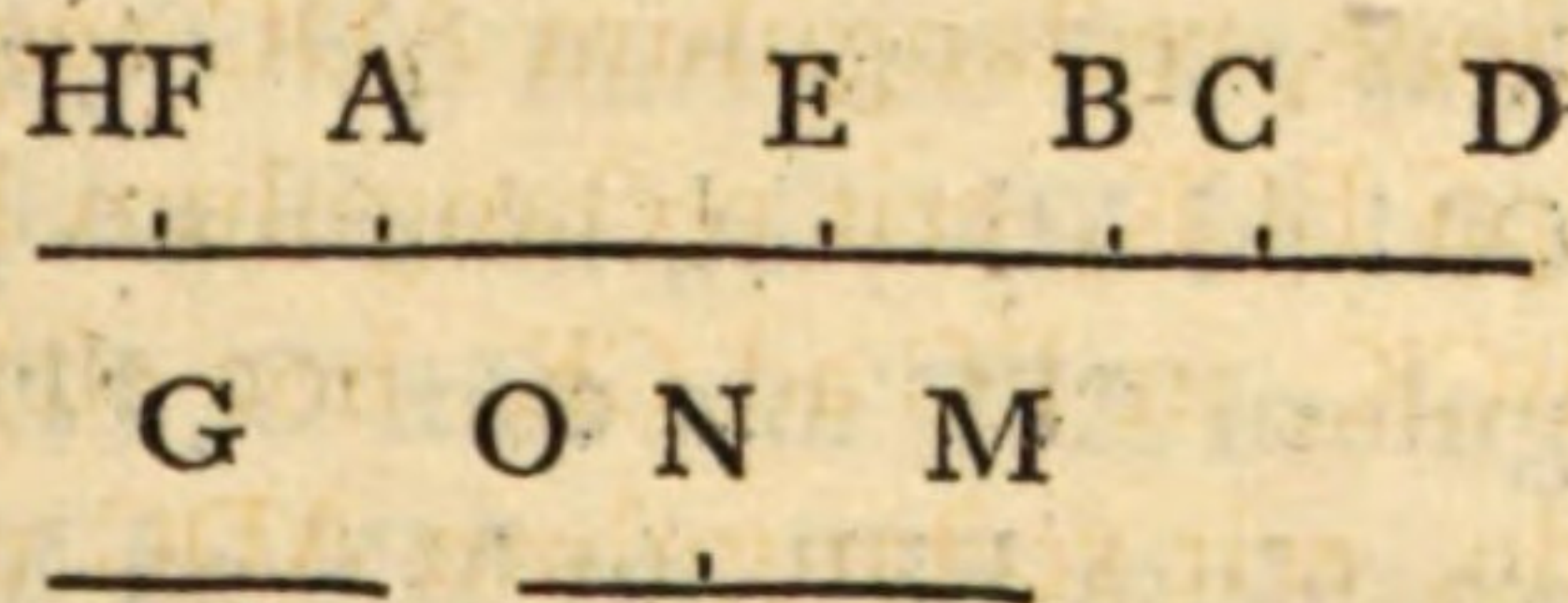
Puncta autem, ut L, remotiora a puncto C majores faciunt rationes quam puncta propiora, ut D. Erit enim rectangulum ALC majus ipso ADC, et propterea rectangulum ECB habet ad rectangulum ALC minorem rationem quam ad rectangulum ADC; et, componendo, rectangulum ALC una cum ipso ECB, hoc est, per Prop. 38. rectangulum ELB minorem habet rationem ad ipsum ALC, quam rectangulum ADC una cum ipso ECB, hoc est rectangulum EDB ad ipsum ADC. Igitur, invertendo, rectangulum ALC majorem habet rationem ad ELB, quam rectangulum ADC ad ipsum EDB.

Secundò, sint AE, BC inaequales, major autem AE.

Sit F punctum inveniendum, quod scilicet faciet rectangulum AFC ad ipsum EFB in data ratione minoris ad majorem. Potest autem requiri ut punctum F vel cadat in AC producta ad partes A majoris segmenti, vel in eadem producta ad partes C minoris segmenti.

Imò, Requiratur ut F cadat in AC producta ad partes A, et ope Cas. 1. hujus Problematis inveniatur punctum D extra data puncta quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB; et quoniam, ex hypothese, major est recta AE ipsa BC, cadet punctum D in AC producta ad

partes C, ut in primo casu ostensum; et fit G excessus ipsarum AE, BC. Quoniam igitur est rectangulum ADC aequale ipsi EDB, et est punctum F ex-



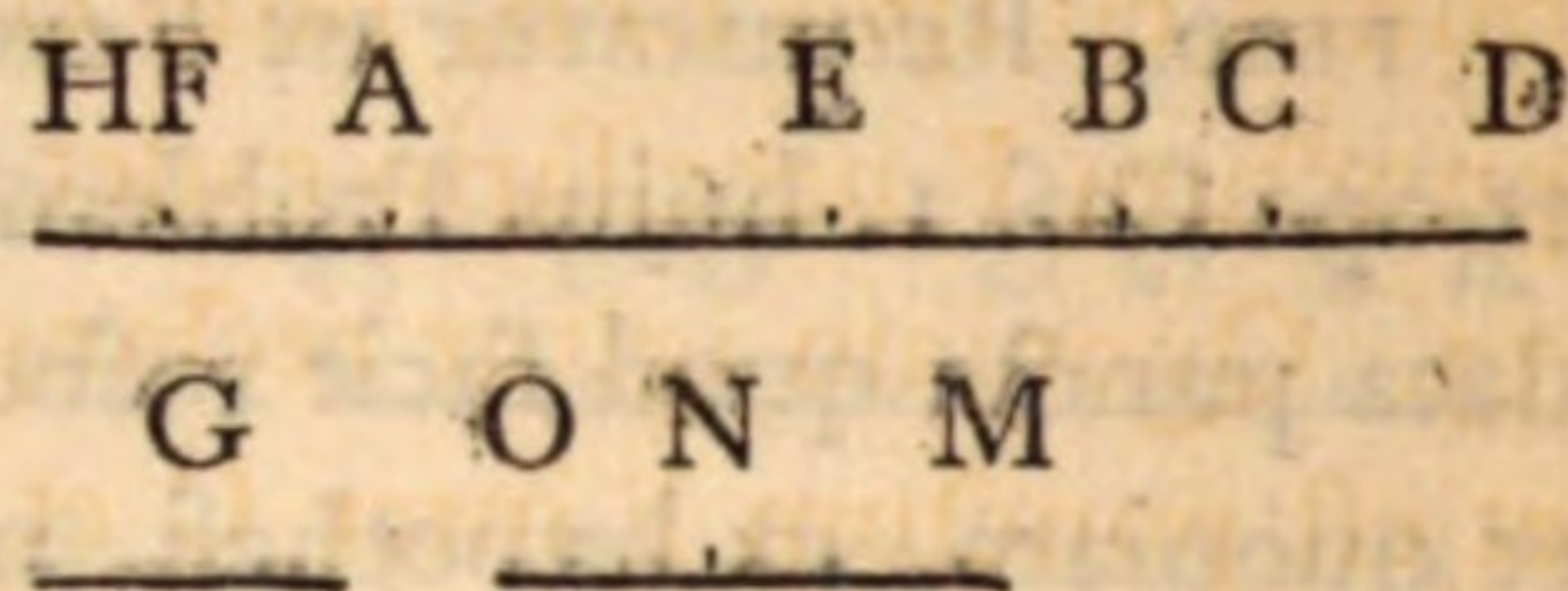
tra rectam AC ad partes puncti A, erit, per Prop. 35. rectangulum EFB aequale rectangulo AFC una cum ipso G, DF. Ex hypothese autem data est ratio rectanguli EFB ad ipsum AFC, igitur, dividendo, data est ratio rectanguli G, DF ad ipsum AFC; deductum propterea est ad Problema in Prop. 48. datis scilicet in recta linea tribus punctis D, C, A invenire extra ipsa, ad partes puncti A, quantum F quod faciet rectangulum a data recta G et ipsa DF, ad rectangulum AFC in ratione data. Datum igitur est punctum F.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta MN ad ipsam MO; et ope Cas. 1. inveniatur punctum D quod facit rectangulum ADC

aequale ipsi EDB; dein, per Prop. 48. datis in recta linea tribus punctis D, C, A, et rectâ lineâ G aequalis scilicet excessui ipsarum AE, BC, inveniatur in DA producta ad partes A, punctum F quod facit rectangulum G, DF a data recta G et segmento FD inter punctum F et punctum ab eo remotissimum D, ad rectangulum AFC a segmentis inter F et reliqua puncta

A, C, in data ratione quam habet recta ON ad ipsam NM; erit F punctum inveniendum. Erit



enim, componendo, rectangu-

lum AFC una cum ipso G, FD ad rectangulum AFC, ut recta OM ad MN; et, invertendo, rectangulum AFC est ad rectangulum AFC una cum G, FD, hoc est, per Prop. 35. ad rectangulum EFB, ut MN ad MO, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut H, remotiora a puncto A majores faciunt rationes quam puncta propiora, ut F. Nam, per Prop. 48. rectangulum G, HD habet ad ipsum AHC minorem rationem quam rectangulum G, FD habet ad ipsum AFC; igitur, componendo, ratio rectanguli AHC una cum ipso G, HD, hoc est, per Prop. 35. ratio ipsius EHB ad AHC, minor est ratione rectanguli EFB ad ipsum AFC, et, invertendo, ratio rectanguli AHC ad ipsum EHB major est ratione rectanguli AFC ad rectangulum EFB. Puncta igitur remotiora a puncto A majores faciunt rationes quam puncta ipsi propiora. Ubique autem sumatur punctum F in CA producta ad partes A, erit rectangulum AFC minus ipso EFB; ostensum enim est rectangulum EFB excedere rectangulum AFC ipso G, FD.

2do, Requiratur ut punctum F cadat in AC producta ad partes C.

Sit F punctum inveniendum, quod scilicet facit rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data; et inveniatur punctum D extra puncta data quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Et quoniam, ex hypothese, rectangulum AFC minus est ipso EFB, ratio enim data est minoris ad maiorem, punctum F necessario cadet inter puncta C, D per Cor. Prop.

33. Quoniam igitur rectangulum ADC aequale est ipsi EDB, et est punctum F inter C et D, si

ponatur recta G aequalis excessui ipsarum AE, BC, erit, per Prop.

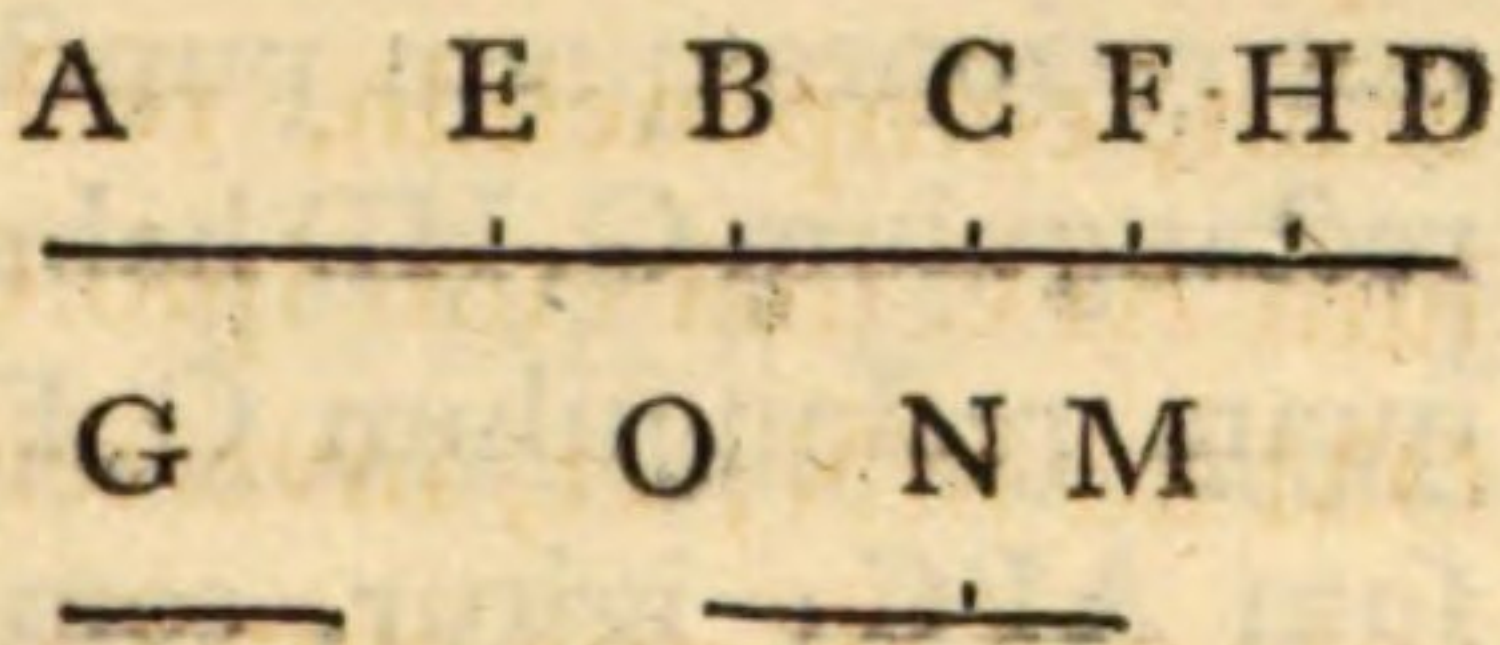
32. rectangulum EFB aequale rectangulo AFC una cum ipso G,

FD; data autem est ratio rect-

anguli EFB ad ipsum AFC, igitur, dividendo, data est ratio rectanguli G, FD ad ipsum AFC. Ergo deductum est ad Problema in Prop. 45. datis scilicet in recta linea tribus punctis A, C, D, et datâ rectâ G, invenire inter puncta C, D quartum F quod faciet rectangulum a data recta G et ipsa DF ad rectangulum AFC in data ratione. Datum igitur est punctum F.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta MN ad ipsam MO, et ope Cas. 1. inveniatur punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB; dein, per Prop. 45. datis in recta linea tribus punctis A, C, D et recta linea G aequalis scilicet excessui ipsarum AE, BC inveniatur inter puncta C, D punctum F



quod facit rectangulum a data recta G, et segmento FD, ad rectangulum AFC a segmentis inter F et puncta A, C quae sunt ad easdem partes ipsius F, in ratione data quam habet recta ON ad ipsam NM; erit F punctum inveniendum. Componendo enim, rectangulum AFC una cum ipso G, FD est ad rectangulum AFC, ut recta OM ad ipsam MN, et, invertendo, rectangulum AFC est ad AFC una cum ipso G, FD, hoc est, per Prop. 32. ad rectangulum EFB, ut MN ad MO, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut H, remotiora a puncto C majores faciunt rationes quam puncta propiora, ut F. Nam, per Prop. 45. rectangulum G, HD habet ad ipsum AHC minorem rationem quam rectangulum G, FD ad ipsum AFC; igitur, componendo,

$$\begin{array}{ccccccc} A & & E & B & C & F & HD \\ \hline & & & & & & \\ G & & & O & N & M & \\ \hline \end{array}$$

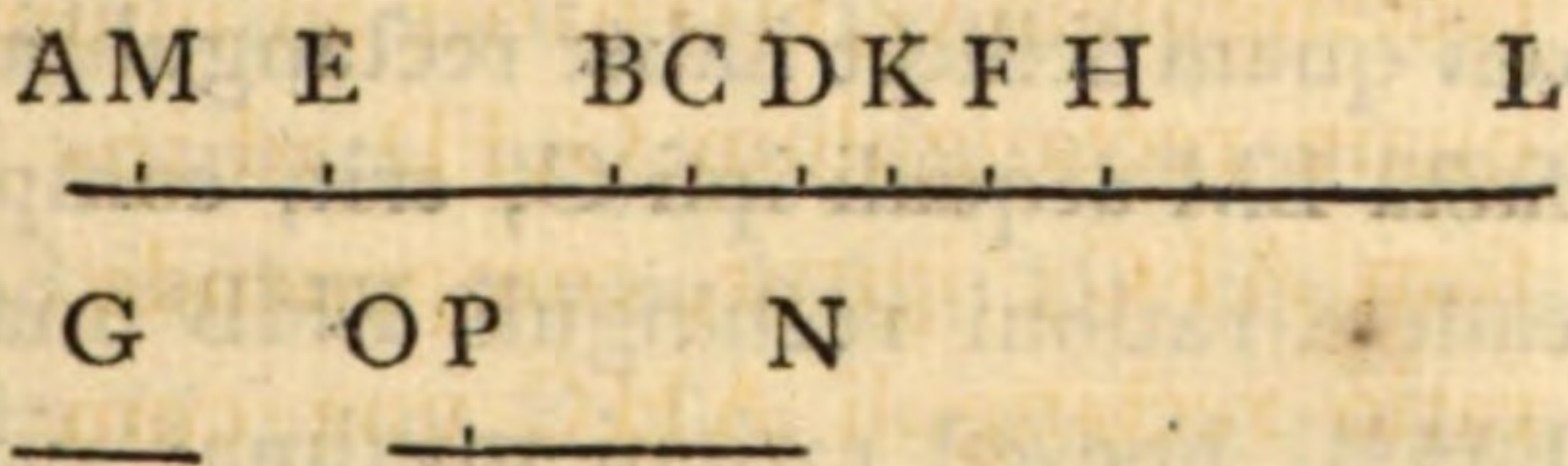
ratio rectanguli AHC una cum ipso G, HD ad ipsum AHC, minor est ratione rectanguli AFC una cum ipso G, FD ad rectangulum AFC; et, invertendo, ratio rectanguli AHC ad AHC una cum ipso G, HD, hoc est, per Prop. 32. ad rectangulum EHB major est ratione ipsius AFC ad AFC una cum G, FD, hoc est ad rectangulum EFB. Puncta igitur remotiora a puncto C majores faciunt rationes quam puncta propiora.

CAS. 3. Quando ratio data est majoris ad minorem; fit autem AE major BC.

Factum puta; fit scilicet F punctum inveniendum quod facit rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data majoris ad minorem; et inveniatur punctum D extra data puncta

quod facit rectangulum ADC aequale ipfi EDB. Quoniam igitur, ex hypothefi, rectangulum AFC majus est ipfo EFB, necesse est ut inaequales fint AE, BC, quia fi aequales effent, rectangulum AFC minus effet ipfo EFB per Prop. 38. Punctum autem D cadet ad partes minoris segmenti BC, ut prius ostenfum in Caf. 1. cadet vero punctum F in AD producta ad partes D, per Cor. Prop. 33. ponatur recta G aequalis excessui ipfarum AE, BC, et quoniam rectangulum ADC aequale est ipfi EDB, erit, per Prop. 33. rectangulum AFC aequale ipfi EFB una cum rectangulo G, FD. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ip-

sum EFB, igitur, dividendo, data est ratio rectanguli G, FD ad rectangulum EFB. Deductum igitur est ad

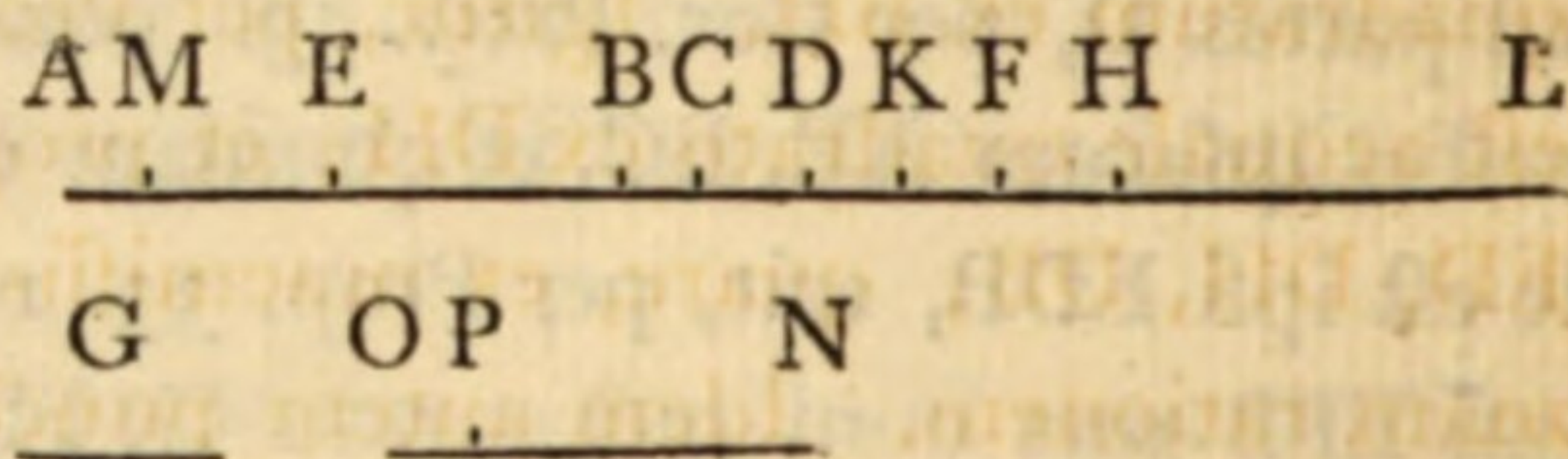


Problema in Prop. 50. datis fcilicet in recta linea tribus punctis E, B, D et recta G, invenire extra puncta data quartum F quod faciet rectangulum G, FD ad ipsum EFB in ratione data. Datum igitur est punctum F.

Quoniam vero Problema ad quod hoc deductum est determinationem habet, et non femper construi potest, neque hoc in omni casu construi poterit, sed determinationem habebit. Ostensum autem est in Prop. 50. datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, si producat ED ad H, ut DH fit media proportionalis inter ED et DB, punctum H facere maximam rationem, hoc est si sumatur aliud quodvis punctum F in AD producta ad partes D, fore rationem rectanguli G, HD ad ipsum EHB majorem ratione rectanguli G, FD ad

ipsum EFB. Est autem, per Prop. 33. rectangulum AHC aequale rectangulis EHB, G,HD simul; et rectangulum AFC aequale ipsis EFB, G,FD simul. Erit igitur, componendo, ratio rectanguli AHC ad ipsum EHB major ratione rectanguli AFC ad ipsum EFB. Punctum igitur H facit maximam rationem. Et quoniam in Prop. 50.

ostensum est, si producat^r BH ad L ut aequales sint BH, HL fore rationem G ad EL eandem maximae rati-



oni quam scilicet habet rectangulum G,HD ad ipsum EHB, factâ EM aequali ipsi G, erit, componendo, ratio ML ad LE eadem rationi rectanguli EHB una cum G, HD ad ipsum EHB, hoc est rationi maximae rectanguli AHC ad ipsum EHB.

Punctum autem H quod facit maximam rationem ita determinatur. Quoniam proportionales sunt ED, DH, DB, erit

- ^a 12. 5. ^a ED ad DH, ut EH ad HB, igitur ut quadratum ex ED ad quadratum ex DH ^b, hoc est ut recta ED ad ipsam DB ^c, ita quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Ut autem ED ad DB, ita est rectangulum G,ED ad ipsum G,DB; et per partem 4. Prop. 22. rectangulum G,ED aequale est rectangulo AEC, et rectangulum G,DB, per partem 3. ejusdem Prop. aequale est ipsi ABC, quia scilicet aequalia sunt ADC, EDB rectangula; igitur rectangulum, AEC est ad ipsum ABC, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Atque haec est Apollonii determinatio quam Pappus memorat in Prop. 64. Lib. 7.
- †

Componetur hoc ita,

Fiat ut rectangulum AEC ad ipsum ABC, ita quadratum ex recta EH ad quadratum ex BH; punctum H erit id quod facit maximam rationem. Nam ex hac proportionem, et parte 4. et 3. Prop. 22. sequitur rectangulum G,ED esse ad ipsum G,DB, hoc est rectam ED esse ad ipsam DB, ut quadratum ex EH ad quadratum ex BH. Igitur, per Prop. 17. rectangulum EDB est aequale quadrato ex DH; et propterea proportionales sunt ED, DH, DB; quare, ex praemissis, punctum H facit maximam rationem. Idem autem punctum H potest inveniri faciundo ut rectangulum BAE ad ipsum ECB, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC, ut constat ex Prop. 19.

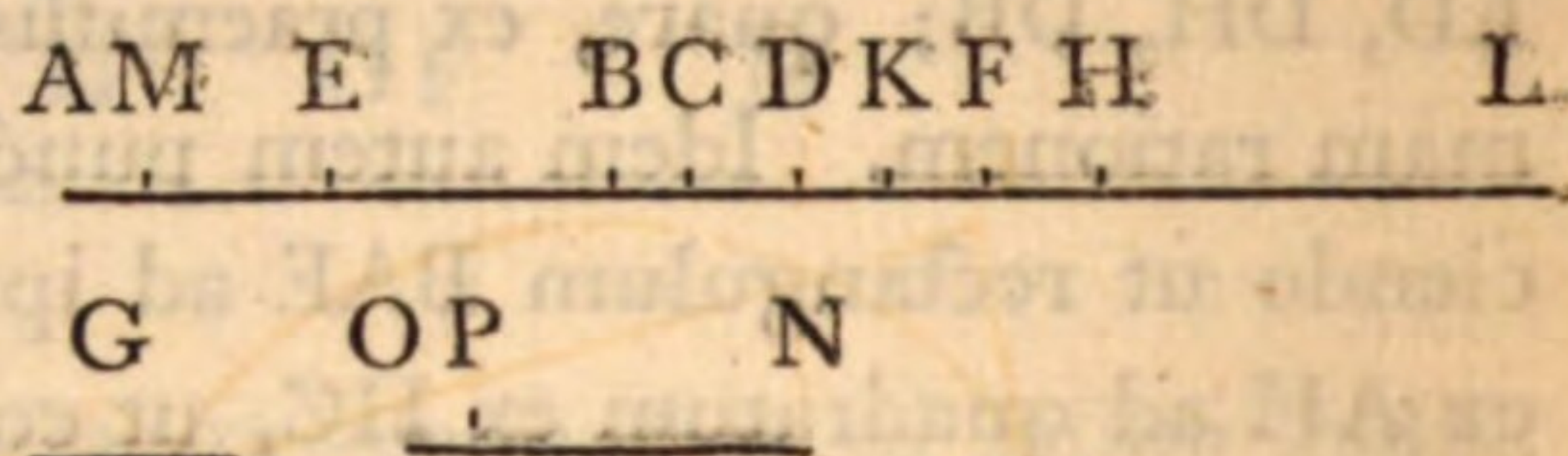
Puncta autem ipsi H propiora majores faciunt rationes quam puncta remotiora ad easdem partes ipsius H. Sit enim punctum F propius puncto H quam K, sint autem ad easdem partes ipsius H. Igitur, per ea quae ostensa sunt in determinatione Problematis in Prop. 50. ratio rectanguli G,FD ad ipsum EFB major est ratione rectanguli G,KD ad ipsum EKB, et, componendo, et per Prop. 33. ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB major est ratione rectanguli AKC ad rectangulum EKB. Puncta igitur propiora ipsi H majores faciunt rationes quam puncta remotiora ad easdem ejus partes.

Componetur vero Problema in Casu 3. ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta NO ad ipsam NP; et inveniantur puncta D, H, L, M, ut dictum fuit, ut et recta G; et si ratio NO ad NP eadem sit rationi maximae, hoc est rationi quam habet recta ML ad rectam LE, sive rationi rectanguli AHC ad ipsum EHB, punctum H, idque solum, Problema

efficiet, ut in praemissis ostensum est. Si vero ratio data NO ad NP non eadem sit rationi ML ad LE, erit ea necessario minor ratione ML ad LE, quare, dividendo, ratio OP ad PN minor erit ratione rectae ME, hoc est ipsius G ad EL. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, inveniri possunt, per Compositionem Problematis in Prop. 50. duo puncta in ED producta ad partes D, quorum utrumlibet

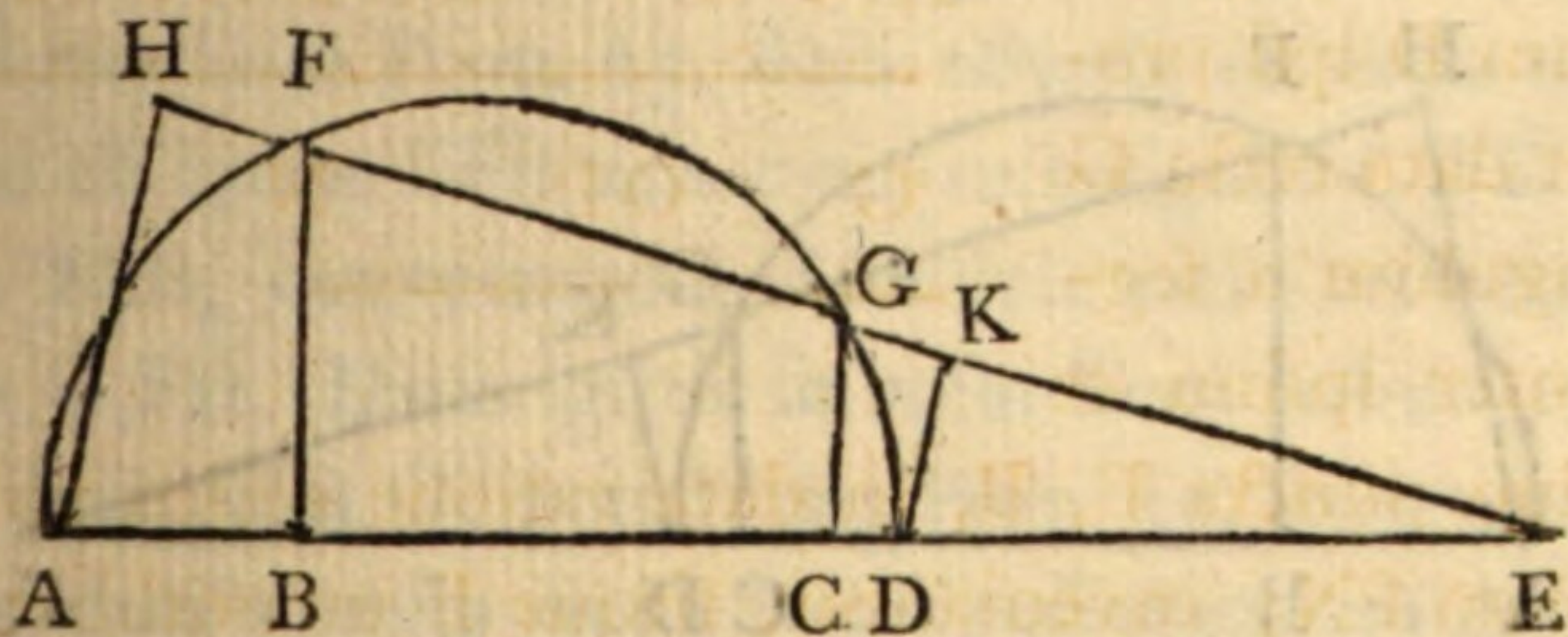
faciet rectangulum a segmento inter ipsum et punctum D ipsi proximum et data recta G ad rectangulum a segmentis inter ipsum et



reliqua duo puncta E, B, in data ratione quam habet recta OP ad ipsam PN; inveniantur, sitque F utrumlibet ex ipsis. Quoniam igitur, ex constructione, rectangulum G,FD est ad rectangulum EFB, ut OP ad PN, componendo, rectangulum EFB una cum ipso G,FD, hoc est, per Prop. 33. rectangulum AFC est ad ipsum EFB, ut recta ON ad rectam NP, hoc est in ratione data.

* Vide ad † Ratio autem maxima determinatur ita. Ostensum fuit *, Datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D, si fiat, additâ quâdam DE, ut rectangulum ABD ad rectangulum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex CE, fore E punctum quod facit maximam rationem rectanguli AED ad rectangulum BEC. Ostendendum nunc est rationem hanc eandem esse ei quam habet quadratum ex AD ad quadratum rectae lineae quae componitur ex ea quae potest rectangulum AC, BD, et ex ea quae potest contentum AB, CD.

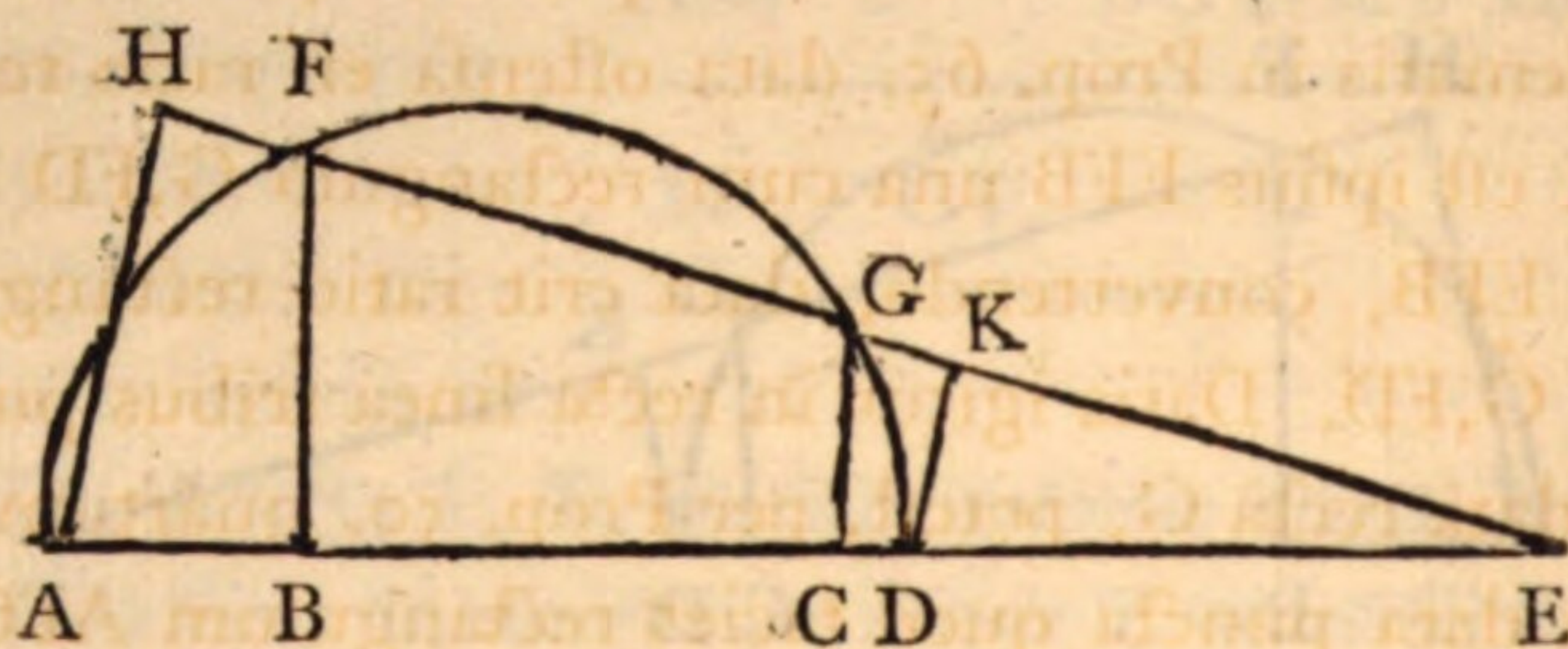
Describatur in recta linea AD semicirculus AFGD, et ad rectos angulos ipsi AD agantur BF, CG. Quoniam igitur factum est ut ABD rectangulum ad rectangulum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex CE; rectangulo autem ABD aequale est in semicirculo quadratum ex BF, et rectangulo ACD aequale quadratum ex CG; erit ut quadratum ex BF ad quadratum ex CG, ita quadratum ex BE ad id quod fit ex EC quadratum; et longitudine^d, ut BF ad CG, ita BE ad ^d 22. 6.



EC; suntque BF, CG parallelæ, igitur recta linea est quæ per F, G, E transit; fit FGE et producat, atque ad ipsam agantur perpendiculares AH, DK. Quoniam igitur singularis et maxima ratio est rectanguli AED ad rectangulum BEC, rectangulum autem FEG rectangulo AED est æquale; erit singularis et maxima ratio eadem quæ rectanguli FEG ad rectangulum BEC. Ut autem rectangulum FEG ad rectangulum BEC, ita est^d ob parallelas rectas quadratum ex GE ad quadratum ex EC, hoc est ut quadratum ex AE ad quadratum ex EH, in circulo enim sunt puncta H, A, C, G, *

* In circulo enim sunt puncta H, A, C, G] Quare rectangulum HEG æquale est ipsi AEC, igitur ut GE ad EC, ita est AE ad EH, et quadrata ex ipsis proportionalia. Commandinus ostendit angulum ad H rectum esse, ex eo

cum anguli ad H, C recti sint. Ut autem quadratum ex AE ad quadratum ex EH, ita est quadratum ex AD ad quadratum ex HK ob parallelas. Singularis igitur et maxima ratio est quadrati ex AD ad quadratum ex HK. Sed HG quidem potest rectangulum AC, BD; GK vero potest quod AB, CD continetur "scilicet per Prop. 39." quare singularis et maxima ratio eadem est quae quadrati ex AD ad quadratum rectae lineae "HK," quae componitur ex ea "HG" quae potest rect-



angulum AC, BD, et ea "GK" quae potest id quod AB, CD continetur. Atque haec est Apollonii determinatio et demonstratio quas servavit Pappus in Prop. 64. Libri 7.

Observandum est Epitagmata omnia hujus libri secundi posse duplici via solvi, vel scilicet ostendendo rationem rectanguli G,FD ad rectangulum AFC, vel rationem ipsius G,FD ad rectangulum EFB datam esse; unde et duae erunt constructiones quibus punctum F quod solvit Problema, duaeque quibus punctum quod facit maximam vel minimam rationem inveniatur. Ex. gr. In Epitagmate 3. Prob. 3. hoc est quod puncta H, A, C, G sunt in circulo, non memor angulum ad H rectum esse ex constructione.

in Prop. 65. data ostensa est ratio rectanguli G,FD ad ipsum EFB , et inde punctum H quod facit maximam rationem invenitur faciendo ut rectangulum AEC ad ipsum ABC , ita quadratum ex EH ad quadratum ex ipsâ HB . Sed aeque potuisset ostendi rationem rectanguli G,FD ad rectangulum AFC datam esse, unde alia constructio ad inveniendum punctum H , simili analysi, inveniretur, faciendo scilicet ut rectangulum BAE ad ipsum BCE , ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC . Hoc autem fiet ut sequitur; quoniam in Analyfi Problematis in Prop. 65. data ostensa est ratio rectanguli AFC , hoc est ipsius EFB una cum rectangulo G,FD ad rectangulum EFB , convertendo, data erit ratio rectanguli AFC ad ipsum G,FD . Datis igitur in recta linea tribus punctis A , C , D , et datâ rectâ G , potest, per Prop. 50. quartum F inveniri extra data puncta quod faciet rectangulum AFC ad ipsum G,FD in ratione data. Et si inter AD et DC media proportionalis inveniatur DH , ostendetur similiter ut in Prop. 65. punctum H facere maximam rationem rectanguli AHC ad ipsum EFB . Hoc autem punctum H idem est cum eo quod inventum fuit in Prop. 65. Quoniam enim rectangula ADC , EDB sunt inter se aequalia, media proportionalis inter AD , DC est etiam media inter ED , DB .

Et ut in Prop. 65. ostensum fuit esse ut ED ad DB , ita quadratum ex EH ad quadratum ex HB , ita similiter omnino ostendetur esse ut AD ad DC , ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC , et propterea rectangulum G,AD esse ad rectangulum G,DC , ut quadratum ex AH ad quadratum ex HC . Est autem, per partem 1. Prop. 22. rectangulum G,AD aequale rectangulo BAE ; et, per partem 2. ejusdem, rectangulum

G,DC aequale est ipsi BCE. Ut igitur rectangulum BAE ad ipsum BCE, ita est quadratum ex AH ad quadratum ex HC. Et haec est altera constructio qua inveniri potest punctum H, ut dictum fuit.

Apollonius autem sola harum constructionum prima utitur, quoniam in Prop. 19. ostensum est secundam ex ea necessario sequi. Idem autem observandum est de Determinationibus Epitagmatis 3. Prob. 1. et Epitagmatis 3. Prob. 2. hujus Lib. 2. quarum alterae constructiones ad eas quae in hoc Libro habentur deduci possunt ope ejusdem Prop. 19. vel Prop. 18.

Quamvis autem quaevis ex praedictis constructionibus quibus determinatur punctum H sufficiat Compositioni Problematis, ex neutra autem statim dignoscitur utrum Problema fieri potest an non fieri. Demonstratum quidem est, si fuerit rectangulum AEC ad ipsum ABC ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB, rationem rectanguli AHC ad ipsum EHB fore maximam. Utrum vero ratio data rectae NO ad ipsam NP hac ratione maxima major sit an non major, hoc est utrum Problema construi potest an non construi statim percipi non potest, quia punctum H et propterea rectangula AHC, EHB non sunt inter ea quae data sunt in Problemate, sed ex hisce datis ope praedictae constructionis invenienda sunt. Et propter hanc causam Determinationem hanc ad aliam deducit Apollonius in qua ratio maxima exhibetur in magnitudinibus quae data sunt in ipsa enuntiatione Problematis. In Problematibus autem quorum Determinationes facilius inveniuntur, una determinatio utrique usui inservire potest, ut in Determinatione Problematis in Prop. 43. et eorum in Prop.

53. et 56. Et fimiliter in Libris Apollonii de Sectione Rationis, aliquando unam aliquando duas determinationes obfer-
vare licet. Harum autem ultima ex altera femper pendet.

Ex his igitur aliisque veterum libris liquet eos Determinationes Problematum ita tradidiffe, ut ex iis quam facile dig-
nofceretur utrum Problema fieri an non fieri poffet, et fi lo-
cus inveniendus fuerit, quifnam futurus fit, utrum, ex. gr.
Parabola, Ellipfis, an Hyperbola. Quod quidem ex multis
recentiorum Determinationibus vix intelligi queat; quasdam
etiam tradunt ex quibus id minime percipi potest.

Ufus vero praecipuus librorum de Sectione Determinata
eft in Analyfi Problematum, multa enim Problemata ad ea
quae in hifce libris continentur deducuntur. Optime etiam ty-
ronibus oftendunt genuinam demonftrandi viam a veteribus
ufurpatam, variis ejufdem Propositionis demonftrationibus
adductis; Lemmata enim Apollonii a Pappo fervata demon-
ftrata funt vel fine ratione compofita, vel ejufdem ope; et vel
utendo folis rectis lineis, vel ope figurarum. Apollonii igi-
tur libros hos tum Geometris, tum in Geometria Tyronibus,
non ingratos fore aequum eft fperare.

F I N I S.

B b

DE
SECTIONE
DETERMINATA
LIBER TERTIUS,
DUOBUS PRAECEDENTIBUS
APOLLONII
ADDITUS.

SECTIO

DETERMINATA

SECTIO

DETERMINATA

LIBERTER

PROBLEMA

DUOBUS PRÆCEDENTIBUS

APOLLONII

PROBLEMA

DATIS DUOBUS PUNCTIS A, B RECTA C IUNGITUR CIRCULUS
QUI FACIT QUADRATUM EX AC MENSURE, AUT ALIUM QUADRATUM
EX CB LATO, QUAM IN RECTO, VEL QUOD FACIT QUADRATUM

ATAZIMERT DE
S E C T I O N E

DETERMINATA

LIBER TERTIUS,

DUOBUS PRAECEDENTIBUS.

A P O L L O N I I

A D D I T U S.

PROBLEMA PRIMUM.

“ DATIS duobus punctis tertium invenire in recta quae per
“ ea tranfit, quod faciet quadratum ex segmento inter ipsum
“ et alterum ex datis punctis majus, aut minus quadrato ex
“ reliquo segmento dato, quam in ratione, vel quod faciet
“ quadratum ex segmento inter ipsum et alterum ex datis
“ punctis datum simul cum eo ad quod quadratum ex reli-
“ quo segmento datam habet rationem.”

PROP. LXVI. PROB. I. EPITAGMA I.

“ DATIS duobus punctis A, B tertium C inter ea invenire
“ quod faciet quadratum ex AC majus, aut minus quadrato
“ ex CB dato, quam in ratione, vel quod faciet quadratum

“ ex AC datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB da-
 “ tam habet rationem.”

PARS 1. Sit quadratum ex AC majus quadrato ex CB da-
 to, quam in ratione. Igitur, ex hypothesi, a quadrato ex AC
 ablato dato spatio, quod fit quadratum ex data AD vel AE,
 reliquum, rectangulum scilicet

EC, CD ad quadratum ex CB $\begin{array}{cccccc} E & A & D & C & B \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$
 datam habet rationem; et data

funt puncta E, D, B, et inter D,
 B inveniendum est punctum C quod faciet rectangulum EC,
 CD a segmentis inter ipsum et puncta E, D quae sunt ad eaf-
 dem ipsius partes ad quadratum ex CB segmento inter ipsum
 et reliquum punctum datum B in data ratione. Deductum
 igitur est Problema ad Epitagma 1. Prob. 5. Lib. 1. hoc est ad
 Prop. 51. cujus ope punctum C invenietur.

PARS 2. Sit quadratum ex AC minus quadrato ex CB da-
 to, quam in ratione, et datum fit quadratum ex recta D; igi-
 tur quadratum ex AC una cum quadrato ex D habet, ex hy-
 pothesi, datam rationem ad qua-
 dratum ex CB; in hac ratione fit
 quadratum ex D ad quadratum ex
 recta BE cui aequalis fit recta BF,
 $\begin{array}{cccccc} A & C & F & B & E \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D & & & & \end{array}$

^a 19. 5. et in eadem ratione erit ^a quadra-
 tum ex AC ad excessum quadrati

^b 6. 2. ex CB supra quadratum ex BE, hoc est ^b ad rectangulum EC,
 CF. Quoniam igitur data sunt tria puncta A, F, E in recta
 linea, et est punctum C inter A, F puncta quod facit ratio-

nem rectanguli EC, CF ex segmentis inter ipsum et puncta F, E quae sunt ad easdem ejus partes ad quadratum ex AC inter ipsum et reliquum punctum A in ratione data, datum erit punctum C per eandem Prop. 51.

PARS 3. Denique fit quadratum ex AC datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem, et datum fit aequale quadrato ex AD cui aequalis fit recta AE. Quoniam igitur quadratum ex AC una cum rectangulo EC, CD aequale est quadrato ex AD spatio scilicet dato cui aequale est quadratum ex AC simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem, erit rectangulum EC, CD id ad quod ex CB quadratum datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, D, B inveniendum est punctum C inter E, D quod faciet rectangulum EC, CD ad quadratum ex CB in ratione data, hoc autem fiet ope Epit. 3. Prob. 5. Lib. 1. hoc est ope Prop. 53.

E A C D B

PROP. LXVII. PROB. I. EPITAGMA 2.

“ DATIS duobus punctis A, B tertium C in recta quae per
 “ ea transit invenire extra ipsa quod faciet quadratum ex AC
 “ segmento inter ipsum et punctum A ab eo remotius majus,
 “ aut minus quadrato ex reliquo segmento CB dato, quam in
 “ ratione, vel quod faciet quadratum ex AC datum simul
 “ cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem.”

PARS 1. Sit quadratum ex AC majus quadrato ex CB dato, quam in ratione; igitur a quadrato ex AC ablato dato spatio, quod fit quadratum ex AD vel AE, reliquum, scilicet rectangulum EC, CD habebit datam rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, D, C inveniendum est quartum C extra ipsa quod faciet rectangulum EC, CD a segmentis inter ipsum et duo puncta ab eo remotiora E, D ad quadratum ex CB inter ipsum et punctum reliquum, in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 54. quae est Epitagma 1. Prob. 6. Lib. 1.

E A D B C

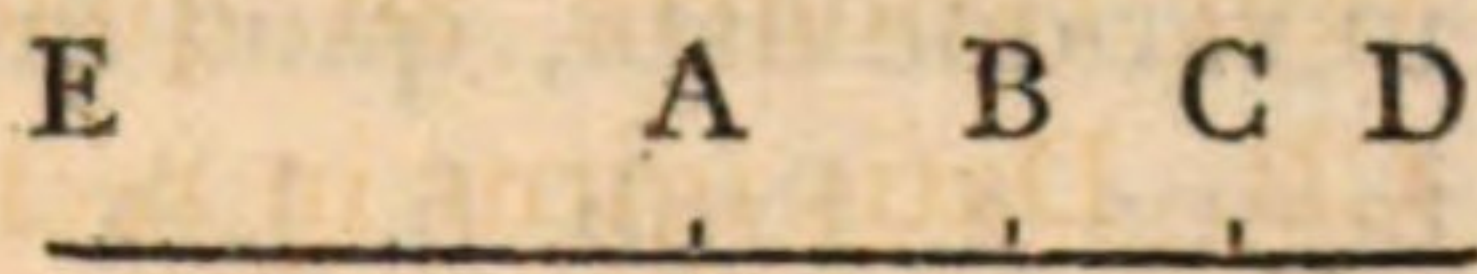
PARS 2. Sit quadratum ex AC minus quadrato ex CB dato, quam in ratione; igitur, ex hypothesi, quadratum ex AC una cum spatio dato, quod fit quadratum ex recta D datam habet rationem ad quadratum ex CB. In hac ratione fit quadratum ex D ad quadratum ex recta BE cui aequalis fit BF, et in eadem data ratione erit^a quadratum ex AC ad rectangulum FC, CE.

A F B E C

D

Datis igitur in recta linea tribus punctis A, F, E inveniendum est quartum C extra ipsa quod faciet rectangulum FC, CE a segmentis inter ipsum et duo puncta propiora F, E ad quadratum ex AC in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 55. quae est Epitagma 2. Prob. 6. Lib. 1.

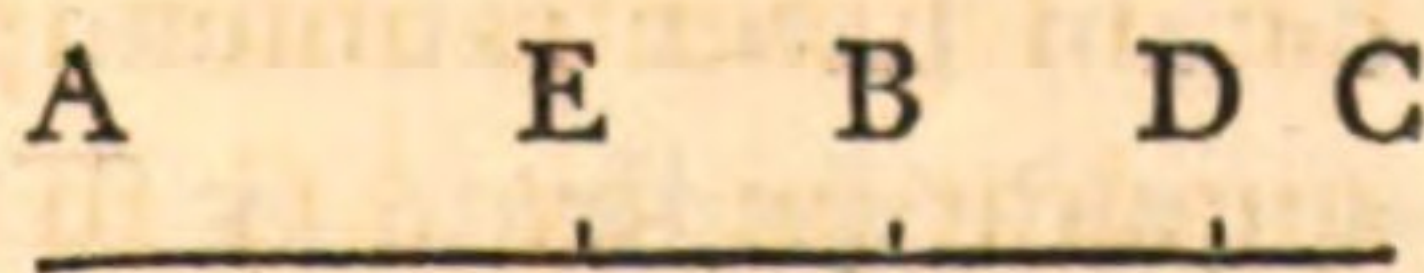
PARS 3. Denique fit quadratum ex AC datum simul cum spatio ad quod quadratum ex CB datam habet rationem; fit spatio datum quadratum ex recta AD cui aequalis fit AE, et quoniam quadratum ex AC simul cum rectangulo EC, CD aequale est quadrato ex AD, erit rectangulum EC, CD id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, D inveniendum est quartum C inter puncta B, D quod faciet rectangulum EC, CD a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, D ad quadratum inter ipsum et reliquum punctum B in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 52. quae est Epitagma 2. Prob. 5. Lib. 1.



PROP. LXVIII. PROB. I. EPITAGMA 3.

“ DATIS duobus punctis A, B invenire in recta quae per ea
 “ transsit tertium C extra puncta data quod faciet quadratum
 “ ex CB segmento inter ipsum et punctum B ei propius ma-
 “ jus, aut minus quadrato ex segmento AC inter ipsum et
 “ reliquum punctum A dato, quam in ratione, vel quod fa-
 “ ciet quadratum ex CB datum simul cum spatio ad quod
 “ quadratum ex AC datam habet rationem.”

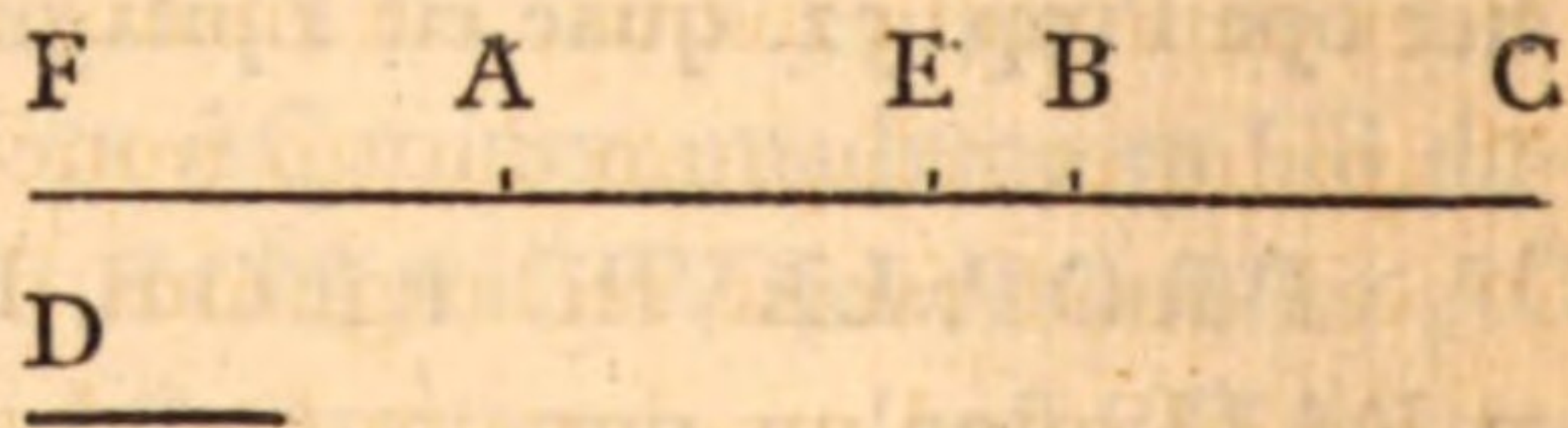
PARS 1. Sit quadratum ex CB majus quadrato ex AC dato, quam in ratione; igitur a quadrato CB ablato dato spatio, quod fit quadratum ex BD vel BE, erit, ex hypothesi, reliquum, rectangulum scilicet EC, CD ad quadratum ex AC in data ratione.



Datis igitur in recta linea tribus punctis A, E, D invenien-
dum est quartum C extra ipsa quod faciet rectangulum EC,
CD a segmentis inter ipsum et duo puncta ei propiora ad qua-
dratum ex segmento AC inter ipsum et reliquum punctum A
in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 55. quae est Epi-
tagma 2. Prob. 6. Lib. 1.

PARS 2. Sit quadratum ex CB minus quadrato ex AC da-
to, quam in ratione; igitur, ex hypothese, quadratum ex CB
una cum spatio dato, quod fit quadratum ex recta D, datam
habet rationem ad quadratum ex AC. In hac ratione fit qua-
dratum ex D ad quadra-

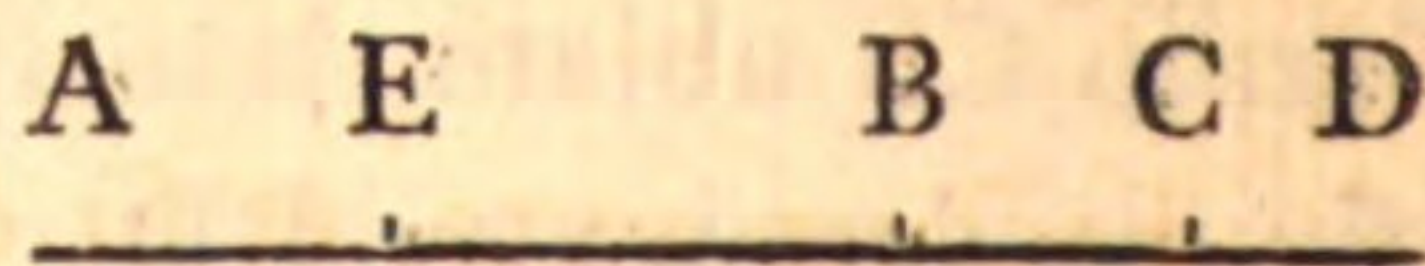
tum ex recta AE, cui ae-
qualis fit AF, et in eadem



* 19. 5. data ratione ^a erit qua-
dratum ex CB ad rectan-
gulum FC, CE. Datis i-

gitur in recta linea tribus punctis F, E, B invenendum est
quartum C extra ipsa quod faciet rectangulum FC, CE a seg-
mentis inter ipsum et duo puncta remotiora F, E ad quadra-
tum ex segmento CB inter ipsum et punctum reliquum B in
ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 54. Lib. 1.

PARS 3. Denique fit quadratum ex CB datum simul cum
spatio ad quod quadratum ex AC
datam habet rationem; fit datum
aequale quadrato ex BD cui aequa-
lis fit recta BE. Quoniam igitur
quadratum ex CB una cum rectangulo EC, CD aequale est



quadrato ex BD, erit rectangulum EC, CD spatium ad quod quadratum ex AC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis A, E, D inveniendum est quartum C inter E et D quod faciet rectangulum EC, CD ad quadratum ex AC in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 53.

P R O B. II.

“ DATIS duobus punctis tertium invenire in recta quae per
 “ ea transit, inter vel extra data puncta quod faciet rectan-
 “ gulum a segmento inter ipsum et alterum ex datis punctis
 “ et datâ rectâ majus, aut minus quadrato ex segmento inter
 “ ipsum et reliquum datum punctum dato, quam in ratione,
 “ vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum spa-
 “ tio ad quod quadratum hoc datam habet rationem.”

PROP. LXIX. PROB. II. EPITAGMA I.

P A R S I.

“ DATIS duobus punctis A, B tertium C invenire in recta
 “ quae per ea transit inter puncta data quod faciet rectangu-
 “ lum a segmento inter ipsum et alterum ex punctis datis A
 “ et data recta AD majus quadrato ex reliquo segmento CB
 “ dato, quam in ratione.”

Factum puta, et sit datum rectangulum a recta DA et ipsa AE contentum, et quoniam data est recta DA data erit AE quae ponatur in recta AB versus punctum B; datum igitur

est punctum E. Et a rectangulo DA, AC ablato dato rectangulo DA, AE reliquum, rectangulum scilicet DA, EC, ex hypothesi, datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur

$$\begin{array}{ccccccc} D & & A & & E & & C & & B \\ \hline \end{array}$$

in recta linea duobus punctis E, B inveniendum est tertium C inter ipsa quod faciet rectangulum a segmento EC et data recta DA ad quadratum ex CB in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 42. quae est Epitagma 1. Prob. 2. Lib. 1.

PARS 2. Sit rectangulum DA, AC minus quadrato ex CB; igitur ipsi DA, AC addito dato, quod sit rectangulum DA, AE posita AE in BA producta ad partes

$$\begin{array}{ccccccc} D & E & & A & & C & & B \\ \hline \end{array}$$

A, totum, rectangulum scilicet DA, EC habet, ex hypothesi, datam rationem ad quadratum ex CB. Punctum igitur C invenietur ut in Parte 1. ope Prop. 42.

PARS 3. Denique, sit rectangulum DA, AC datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Sitque datum cui praedicta spatia simul sunt aequalia rectangulum DA, AE.

CAS. 1. Quando rectangulum DA, AE minus est ipso DA, AB; posita igitur AE in recta AB versus partes B cadet punctum E

$$\begin{array}{ccccccc} D & & A & & & & C & & E & & B \\ \hline \end{array}$$

inter A et B, et quoniam rectangulum DA, AE majus est ipso DA, AC cadet E inter C et B. Est autem rectangulum DA,

AC simul cum ipso DA, CE aequale rectangulo DA, AE, igitur rectangulum DA, CE est id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum est tertium C in recta linea quae per ea transit extra puncta data quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et punctum E ei propius et data recta DA ad quadratum ex CB in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 43. quae est Epitagma 2. Prob. 2. Lib. 1.

CAS. 2. Quando rectangulum DA, AE aequale est ipsi DA, AB, hoc est quando punctum E cadit in B. Quoniam igitur rectangulum DA, AC simul cum ipso DA, CB aequale est rectangulo DA, AB, erit DA, CB rectangulum id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem; habet igitur recta DA datam rationem ad ipsum CB, et data est DA, data igitur est CB, et datum erit punctum C.

$$\begin{array}{ccccccc} D & A & & C & & B & \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & E \end{array}$$

CAS. 3. Quando rectangulum DA, AE majus est rectangulo DA, AB, et propterea cadit punctum E in AB producta; est igitur rectangulum DA, AC simul cum ipso DA, CE aequale rectangulo DA, AE, quare, ex hypothesis, est rectangulum DA, CE id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est tertium C extra ipsa in recta quae per ea transit quod faciet rectangulum a segmento CE, inter ipsum et punctum E ab eo remotius et da-

$$\begin{array}{ccccccc} D & A & & C & & B & E \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

tâ rectâ DA in data ratione ad quadratum ex CB, quod quidem fiet ope Prop. 44. Lib. 1. quae est Epitagma 3. Prob. 2.

PROP. LXX. PROB. II. EPITAGMA 2.

“ DATIS duobus punctis B, A tertium C invenire in rectâ
 “ quae per ea tranfit extra data puncta quod faciet rectan-
 “ gulum a segmento CA inter ipsum et punctum A ei propius
 “ et datâ rectâ AD majus, aut minus quadrato ex segmento
 “ CB inter ipsum et reliquum punctum B dato, quam in ra-
 “ tione, vel quod faciet rectangulum illum datum fimul cum
 “ eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem.”

PARS 1. Sit rectangulum AC, AD majus quadrato ex CB dato, quam in ratione, et datum fit rectangulum DA, AE, et quoniam data est DA data erit AE, punctumque E erit datum. Ablato igitur a rectangulo DA, AC dato rectangulo DA, AE reliquum, rectangulum fcilicet DA, EC datam habet, ex hypothesi, rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est extra ipfa punctum C quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et propius punctum C et data recta DA ad quadratum ex CB in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 43.

B D A E C

PARS 2. Sit rectangulum AC, AD minus quadrato ex CB dato, quam in ratione, fitque datum rectangulum DA, AE et ponatur AE versus punctum B.

CAS. 1. Quando AE minor est quam AB; igitur addito rectangulo DA, AE ad ipsum DA, AC totum DA, EC, ex hypothesi, datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis B, E invenendum est tertium C extra ipsa in recta BE producta quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et punctum ei propius ad quadratum ex CB in ratione data, id quod fiet ope Prop. 43. Lib. 1.

B E D A C
—————

CAS. 2. Quando AE aequalis est ipsi AB, five quando punctum E cadit in B. Addito igitur rectangulo DA, AB ad ipsum DA, AC totum DA, BC datam habet rationem ad quadratum ex CB; data igitur est ratio DA ad BC, et data est D, data igitur est BC, datumque erit punctum C.

B D A C
—————
E

CAS. 3. Quando AE major est quam AB; cadit igitur punctum E in AB producta ultra B. Et quoniam addito rectangulo DA, AE ad ipsum DA, AC totum rectangulum DA, EC datam habet rationem ad quadratum ex CB; igitur datis duobus punctis E, B tertium C invenendum est extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et punctum remotius E ad quadratum ex CB in ratione data, quod fiet ope Prop. 44. quae est Epitagma 3. Prob. 2. Lib. 1.

E B D A C
—————

PARS 3. Denique sit rectangulum AC, AD datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem, et datum sit rectangulum DA, AE.

Quoniam igitur rectangulum DA, AC simul cum ipso DA, CE aequale est dato rectangulo DA, AE, erit rectangulum DA, CE id ad quod quadratum ex CB, ex hypothesi, datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est tertium C inter ipsa quod faciet rectangulum a segmento CE et datâ rectâ DA ad quadratum ex reliquo segmento CB in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 42.

B D A C E
—————

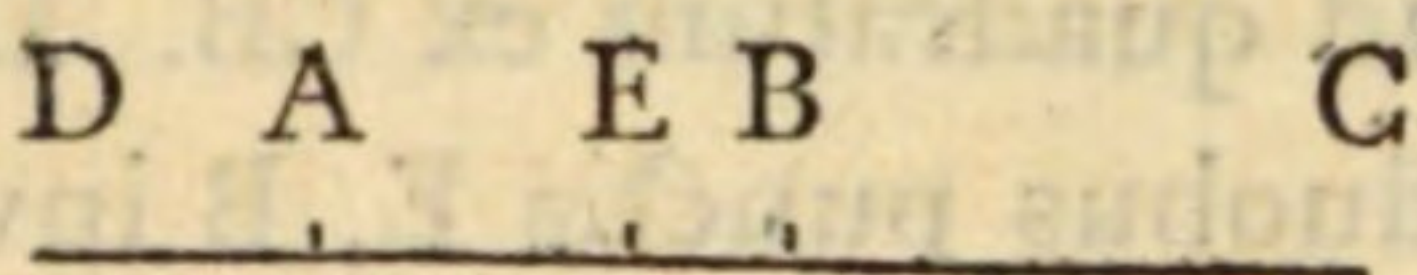
PROP. LXXI. PROB. II. EPITAGMA 3.

“ DATIS duobus punctis A, B tertium C invenire in rectâ
 “ quae per ea transit extra data puncta quod faciet rectan-
 “ gulum a segmento CA inter ipsum et punctum A ab eo re-
 “ motius et data rectâ AD majus, aut minus quadrato ex
 “ segmento CB inter ipsum et reliquum punctum B dato,
 “ quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud da-
 “ tum simul cum eo ad quod quadratum hoc datam habet
 “ rationem.”

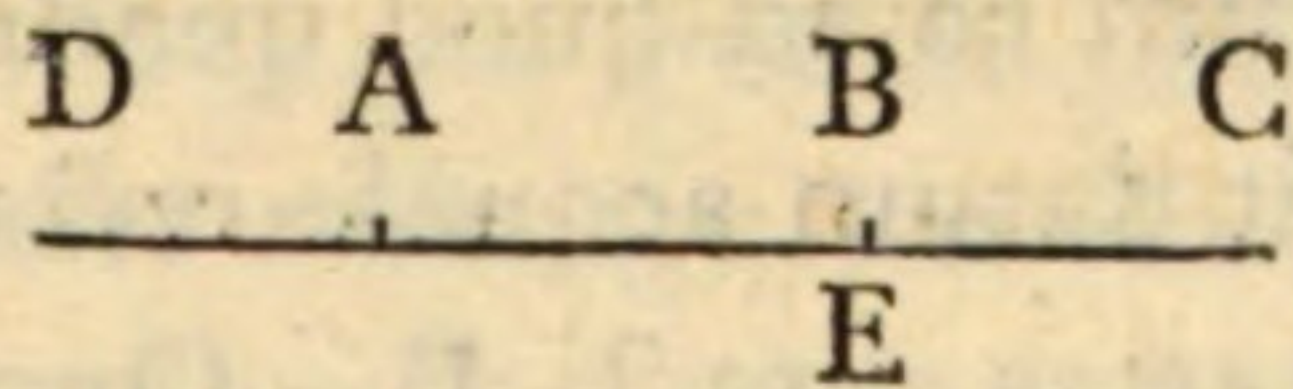
PARS I. Sit rectangulum CA, AD majus quadrato ex CB dato, quam in ratione, et datum sit aequale rectangulo DA, AE.

CAS. I. Quando AE minor est quam AB, igitur a rectangulo DA, AC ablato dato rectangulo DA, AE reliquum rect-

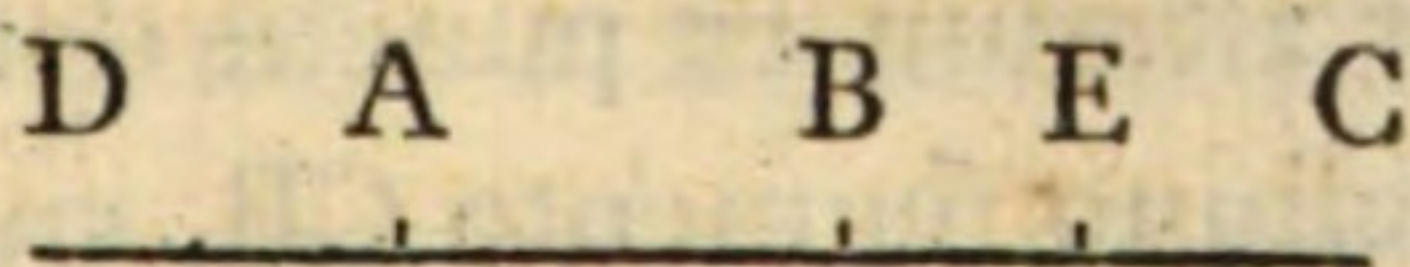
angulum DA, EC datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum est tertium C extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et punctum E quod remotius est ab eo et datâ rectâ AD in data ratione ad quadratum ex segmento CB inter ipsum et reliquum punctum datum B, quod fiet ope Prop. 44. Lib. 1.



CAS. 2. Quando AE aequalis est ipsi AB, hoc est quando punctum E cadit in B. Igitur a rectangulo DA, AC ablato dato rectangulo DA, AB, reliquum, scilicet rectangulum DA, BC habet, ex hypothesis, datam rationem ad quadratum ex CB; data propterea est ratio datae DA ad ipsam BC, et ipsa BC data erit, datumque erit punctum C.



CAS. 3. Quando AE major est quam AB, et propterea cadit punctum E in AB producta. Ablato igitur dato rectangulo DA, AE ab ipso DA, AC reliquum rectangulum DA, EC habet ad quadratum ex CB rationem datam. Datis igitur duobus punctis

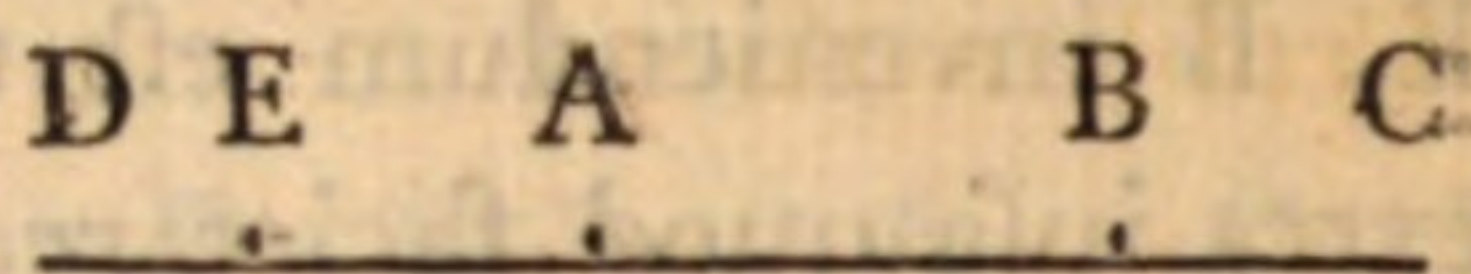


B, E inveniendum est tertium C extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et punctum E ipsi propius et data rectâ AD ad quadratum ex CB inter ipsum et reliquum punctum in data ratione, quod fiet ope Prop. 43.

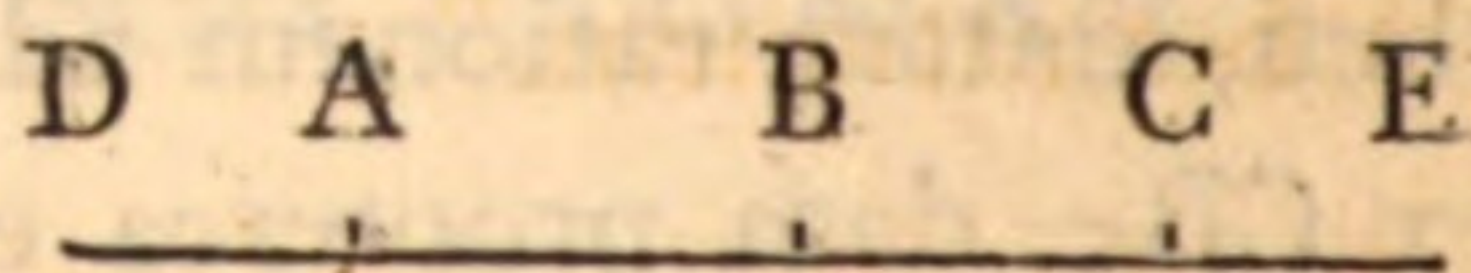
PARS 2. Sit rectangulum CA, AD minus quadrato ex CB dato, quam in ratione, et datum sit aequale rectangulo DA, AE, et

D d

ponatur AE in BA producta. Totum igitur, rectangulum scilicet DA, EC datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum est tertium C extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et punctum E ab eo remotius et datâ rectâ AD ad quadratum ex CB in ratione data, quod fiet ope Prop. 44.



PARS 3. Denique sit rectangulum CA, AD datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem, et sit datum aequale rectangulo AD, AE, et ponatur AE versus partes puncti B. Quoniam igitur rectangulum DA, AC simul cum ipso DA, CE aequale est dato rectangulo DA, AE, erit rectangulum DA, CE id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est tertium C inter ea quod faciet rectangulum a segmento CE inter ipsum et alterum ex punctis datis E in data ratione ad quadratum ex reliquo segmento CB, quod fiet ope Prop. 42.



C O R. A D P R O B. II.

Et si quadratum ex CB majus, aut minus fuerit rectangulo CA, AD dato, quam in ratione, erit rectangulum CA, AD minus, aut majus quadrato ex CB dato, quam in ratione per Prop. 14. Dat. in Edit. Glasg. 1762. Et si quadratum ex CB datum fuerit simul cum eo ad quod rectangulum CA, AD datam habet rationem, erit rectangulum CA, AD datum simul

cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem per Prop. 15. Dat. Igitur hae Propositiones deducuntur ad eas Problematis 2.

P R O B. III.

“ DATIS in recta linea tribus punctis quartum invenire in-
 “ ter ipsa, viz. inter utrumlibet ex extremis et punctum me-
 “ dium quod faciet rectangulum a segmento inter ipsum et
 “ quodlibet ex datis punctis et datâ rectâ majus, aut minus
 “ rectangulo a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data
 “ dato, quam in ratione, aut quod faciet rectangulum illud
 “ datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc datam ha-
 “ bet rationem.”

PROP. LXXII. PROB. III. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C invenire
 “ quartum D inter punctum A alterum ex extremis et medi-
 “ um punctum B quod faciet rectangulum a segmento DA
 “ inter ipsum et extremum punctum A quod non est ad par-
 “ tes ad quas est medium et datâ rectâ AE majus, aut minus
 “ rectangulo BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua
 “ puncta B, C dato quam in ratione, vel quod faciet rectan-
 “ gulum illud datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc
 “ datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et datum aequale sit rectangulo

EA, AF quae ponatur ab A versus B. Ablato igitur rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothefi, datam rationem ad rectangulum BD, DC.

Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum est quartum D inter extremum punctum F et medium B quod faciet rectangulum a segmento DF et datâ rectâ ad rectangulum BD, DC inter ipsum et reliqua puncta quae sunt ad eandem ejus partes in data ratione, quod fiet opè Prop. 45. quae est Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1.

E A F D B C

PARS 2. Sit rectangulum DA, AE minus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et fit datum aequale rectangulo EA, AF quae ponatur in BA producta ad partes A. Totum igitur, rectangulum scilicet EA, FD datam habet rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum est in ea quartum D inter puncta F, B quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta B, C quae sunt ad eandem ejus partes in data ratione, quod fiet ope Prop. 45.

E F A D B C

PARS 3. Denique fit rectangulum DA, AE datum simul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et fit datum aequale rectangulo EA, AF quae ponatur a puncto A versus B.

CAS. 1. Quando recta AF minor est ipsâ AB; igitur, quoniam rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF est aequale dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum est quartum D in CF producta quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ipsi proximum et data recta EA ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua data puncta B, C in ratione data; quod quidem fiet ope Prop. 50. quae est Epitagma 3. Prob. 4. Lib. 1.

E A D F B C

CAS. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AB, seu quando punctum F incidit in B. Quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DB aequale est dato rectangulo EA, AB, erit rectangulum EA, DB id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem; data est propterea ratio datae rectae EA ad ipsam CD, quare data est CD, et punctum D datum erit.

E A D B C

 F

CAS. 3. Quando recta AF major est quam AB at minor quam AC; quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF aequale est dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quartum in CB producta quod faciet rectangulum a seg-

E A D B F C

mento DF inter ipsum et punctum medium F et datâ rectâ AE ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta B, C in data ratione, quod fiet ope Prop. 49. quae est Epitagma 2. Prob. 4. Lib. 1.

CAS. 4. Quando recta AF aequalis est ipsi AC, seu quando punctum F incidit in ipsum C. Quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DC aequale est $\frac{E \quad A \quad D \quad B \quad C}{F}$ rectangulo dato EA, AC, erit rectangulum EA, DC id quod ad rectangulum BD, DC datam habet rationem; data igitur est ratio datae rectae EA ad ipsam BD, data propterea est BD, et datum erit punctum D.

CAS. 5. Quando recta AF major est ipsa AC; igitur quoniam rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF aequale est dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in $\frac{E \quad A \quad D \quad B \quad C \quad F}{}$ recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum est in FB producta ad partes B quartum punctum D quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ab eo remotissimum ad rectangulum BD, DC inter ipsum et reliqua data puncta B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 48. quae est Epitagma 1. Prob. 4. Lib. 1.

PROP. LXXIII. PROB. III. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C invenire in-
 “ ter B, A quartum D quod faciet rectangulum a segmento
 “ DA inter ipsum et punctum medium C et datâ rectâ AE
 “ majus, aut minus rectangulo BD, DC inter ipsum et reli-
 “ qua puncta data B, C dato, quam in ratione, vel quod fa-
 “ ciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod qua-
 “ dratum hoc datam habet rationem.”

PARS 1. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et fit datum aequale rectangulo EA, AF, $\text{E} \quad \text{B} \quad \text{D} \quad \text{F} \quad \text{A} \quad \text{C}$
 positâ AF versus partes puncti B. Igitur a rectangulo EA, AD ablato
 dato rectangulo EA, AF, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C invenien-
 dum est quartum D inter puncta B, F quod faciet rectangu-
 lum a segmento inter ipsum et punctum medium F et datâ
 rectâ EA ad rectangulum inter ipsum et reliqua data puncta
 B, C in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 46. quae est
 Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1.

PARS 2. Sit rectangulum DA, AE minus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et fit datum aequale rectangulo EA, AF positâ AF versus partes puncti C.

CAS. 1. Quando recta AF minor est ipsâ AC; addito igitur dato rectangulo EA, AF ad rectangulum EA, AD, totum,

rectangulum scilicet EA, DF habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC.

Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quartum D inter extremum B et medium punctum F quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et medium F, et data recta AE ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C in data ratione, quod quidem fiet ope ejusdem Prop. 46.

CAS. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AC, seu quando punctum F incidit in C; quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum dato rectangulo EA, AF, hoc est rectangulum EA, DF, five EA, DC datam habet rationem ad rectangulum BD, DC, data erit ratio datae rectae EA ad ipsam BD, quare data est BD, datumque erit punctum D.

CAS. 3. Quando recta AF major est quam AC; igitur rectangulum EA, AD simul cum dato rectangulo EA, AF, hoc est rectangulum EA, DF datam habet rationem, ex hypothesi, ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum est quartum D quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F quod est ad eas partes puncti D ad quas est punctum medium A et datâ rectâ EA ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 47. quae est Epitagma 3. Prob. 3. Lib. 1.

PARS 3. Denique fit rectangulum DA, AE datum simul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et fit datum aequale rectangulo EA, AF, positâ AF versus partes puncti B.

CAS. 1. Quando AF minor est quam AB; quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF aequale est rectangulo dato EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta

$$\begin{array}{ccccccc} E & B & F & D & A & C \\ \hline & & & & & \end{array}$$
 linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quartum D inter puncta F, C quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F et data recta EA ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 46.

CAS. 2. Quando AF aequalis est ipsi AB, seu quando punctum F incidit in B; quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DB aequale est dato rectangulo EA, AB, erit rectangulum EA, DB id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem; data igitur est ratio datae rectae EA ad ipsam DC, quare data est DC, et datum erit punctum D.

$$\begin{array}{ccccccc} E & B & D & A & C \\ \hline & & & & \\ & & F & & \end{array}$$

CAS. 3. Quando AF major est quam AB; igitur quoniam rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF aequale est dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem.

E e

Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C invenien-
 dum est quartum D inter B et C
 quod faciet rectangulum a seg- $E \quad F \quad B \quad D \quad A \quad C$
 mento DF inter ipsum et extremum -----
 punctum F quod est ad eas partes
 ipsius D ad quas est punctum medium B et datâ rectâ EA ad
 rectangulum a segmentis inter ipsum et puncta reliqua data
 B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 47.

PROP. LXXIV. PROB. III. EPITAGMA 3.

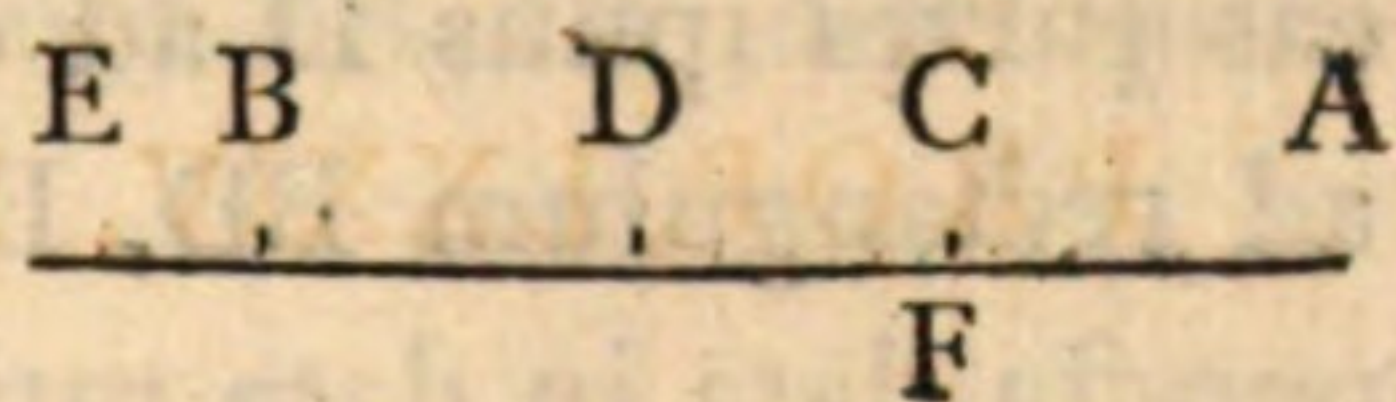
“ DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quartum D
 “ invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum a seg-
 “ mento DA inter ipsum et punctum extremum A quod est
 “ ad eas partes ipsius D ad quas est punctum medium C et
 “ datâ rectâ AE majus, aut minus rectangulo BD, DC a seg-
 “ mentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C dato, quam
 “ in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul
 “ cum eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD,
 DC dato quam in ratione, et sit datum aequale rectangulo
 EA, AF posita AF versus partes puncti B.

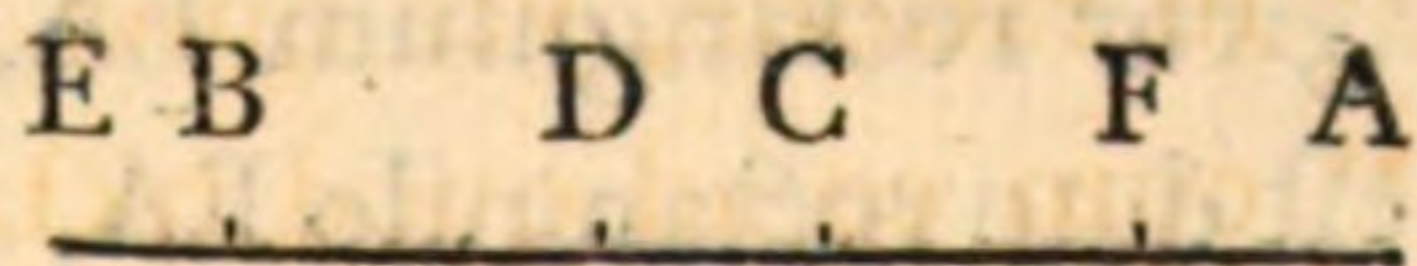
CAS. I. Quando recta AF major est ipsâ AC; igitur a rect-
 angulo EA, AD ab-
 lato dato rectangulo $E \quad B \quad D \quad F \quad C \quad A$
 EA, AF reliquum, -----
 rectangulum scilicet
 EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangu-

lum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quartum D inter B, C quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F et datâ rectâ EA in data ratione ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta B, C, quod fiet ope Prop. 46.

CAS. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AC, seu quando punctum F incidit in ipsum C; igitur a rectangulo EA, AD ablato dato rectangulo EA, AC, reliquum, rectangulum scilicet EA, CD habet, ex hypothefi, datam rationem ad rectangulum BD, DC; quare data est ratio datae rectae EA ad ipsam CD; data igitur est recta CD, et punctum D erit datum.



CAS. 3. Quando recta AF minor est quam AC; igitur ablato dato rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, scilicet rectangulum EA, FD datam habet, ex hypothefi, rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum est quartum D inter B et C quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum extremum F quod est ad eas partes ipsius D ad quas est medium C, et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 47.



PARS 2. Sit rectangulum EA, AD minus ipso BD, DC dato, quam in ratione, et sit datum aequale rectangulo EA, AF,

posita AF in BA producta; igitur ad rectangulum EA, AD addito dato rectangulo EA, AF, totum, scilicet rectangulum EA, DF habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum est quantum D inter B et C quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum extremum F quod est ad eas partes ipsius D ad quas est medium C, et data recta EA ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data in data ratione, quod fiet ope Prop. 47.

E B D C A F

PARS 3. Denique fit rectangulum EA, AD datum simul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et fit datum aequale rectangulo EA, AF, posita AF ab A versus partes puncti B.

CAS. 1. Quando recta AF minor est ipsa AB; quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF aequale est dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quantum D inter F et C quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F et data recta EA ad rectangulum BD, DC in ratione data, quod fiet ope Prop. 46. quae est Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1.

E B F D C A

CAS. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AB, seu quando punctum F incidit in B; quoniam igitur rectangulum

EA, AD simul cum ipso EA, DB aequale est dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DB

id ad quod rectangulum BD, DC $\begin{array}{ccccccc} E & B & D & C & A \\ \hline & F & & & \end{array}$ datam habet rationem. Data igitur est ratio datae rectae EA ad ipsam DC; data igitur est recta CD, et datum erit punctum D.

CAS. 3. Quando recta AF major est ipsa AB; quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF aequale est dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod datam habet rationem rectangu-

lum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C $\begin{array}{ccccccc} F & E & B & D & C & A \\ \hline & & & & & \end{array}$ inveniendum est quartum D inter B

et C quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum extremum F quod est ad eas partes ipsius D ad quas est punctum medium B et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data, quod fiet ope Prop. 47.

COR. AD PROB. III.

Et si rectangulum BD, DC majus, aut minus fuerit rectangulo EA, AD dato, quam in ratione, erit rectangulum EA, AD minus, aut majus ipso BD, DC dato quam in ratione per 14. Dat. Et si rectangulum BD, DC datum fuerit simul cum eo ad quod rectangulum EA, AD datam habet rationem, rectangulum EA, AD datum erit simul cum eo ad quod BD, DC rectangulum datam habet rationem, per 15. Dat. Igitur hae Propositiones deducuntur ad eas Problematis 3.

P R O B. IV.

“ DATIS in recta linea tribus punctis invenire quantum ex-
 “ tra ipsa ad utraquevis partes quod faciet rectangulum a seg-
 “ mento inter ipsum et quodlibet ex punctis datis, et data
 “ recta majus, aut minus rectangulo inter ipsum et reliqua
 “ puncta data, dato, quam in ratione; vel quod faciet rect-
 “ angulum illud datum simul cum eo ad quod rectangulum
 “ hoc datam habet rationem.”

P R O P. LXXV. P R O B. IV. E P I T A G M A I.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quantum D
 “ invenire extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento in-
 “ ter ipsum et punctum A ab eo remotissimum et data recta
 “ AE majus, aut minus rectangulo BD, DC a segmentis in-
 “ ter ipsum et reliqua puncta data B, C dato, quam in rati-
 “ one, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
 “ eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

P A R S I. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, fitque datum aequale rectangulo EA, AF, positâ AF versus partes puncti C.

C A S. I. Quando recta AF minor est ipsâ AB; igitur ablato dato rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD reliquum, scilicet rectangulum EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C

E A F B C D
 —————

inveniendum est quantum D extra ipsa quod faciet rectangu-
lum a segmento DF inter ipsum et punctum ab eo remotissi-
mum F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD,
DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod
fiet ope Prop. 48. quae est Epitagma 1. Prob. 4. Lib. 1.

C A S. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AB, hoc est quando punctum F incidit in B.

Ablato igitur dato rectangulo EA, AB ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, BD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC; data igitur recta EA datam habet rationem ad ipsam CD, quae propterea data est, datumque erit punctum D.

The diagram consists of a horizontal line with five points marked above it: E, A, B, C, and D. A vertical line segment, labeled 'F' at its base, extends downwards from point B.

CAS. 3. Quando recta AF major est quam AB, at minor quam AC; ablato igitur dato rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi,

E A B F C D

BD, DC. Datis igitur in recta li-
nea tribus punctis B, F, C inveniendum est extra ipsa quar-
tum D quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum
et punctum medium F, et data recta EA in data ratione ad
rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua data
puncta B, C, quod quidem fiet ope Prop. 49. quae est Epi-
tagma 2. Prob. 4, Lib. 1.

Cas. 4. Quando recta AF aequalis est ipsi AC, hoc est quando punctum F incidit in C. Ostendetur hic Casus eodem modo quo ostensus fuit Cas. 2.

CAS. 5. Quando recta AF major est ipsa AC; ablato igitur dato rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothefi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum est quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum ipsi proximum F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 50. quae est Epitagma 2. Prob. 4. Lib. 1.

E A B C F D

PARS 2. Sit rectangulum DA, AE minus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et sit datum aequale rectangulo EA, AF, posita AF in BA producta. Igitur addito dato rectangulo EA, AF ipsi EA, AD, totum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothefi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum est quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ab eo remotissimum et data recta EA ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 48.

E F A B C D

PARS 3. Denique sit rectangulum DA, AE datum simul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et datum aequale sit rectangulo EA, AF, positâ AF ab A ver-

fus partes puncti C. Quoniam igitur rectangulum EA, AD
 simul cum ipso EA, DF aequale est dato rectangulo EA, AF,
 erit rectangulum EA, DF id ad
 quod ipsum BD, DC datam ha-
 bet rationem. Igitur datis in
 recta linea tribus punctis B, C, F
 inveniendum est quartum D inter C et F quod faciet rectan-
 gulum a segmento DF inter ipsum et punctum extremum F
 quod non est ad eas partes ipsius D ad quas est punctum me-
 dium C et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD,
 DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod
 fiet ope Prop. 45. quae est Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1.

E A B C D F

PROP. LXXVI. PROB. IV. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “ invenire extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DA
 “ inter ipsum et punctum medium A et data recta EA ma-
 “ jus, aut minus rectangulo BD, DC a segmentis inter ip-
 “ sum et reliqua data puncta B, C dato, quam in ratione,
 “ vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad
 “ quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS 1. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD,
 DC dato, quam in ratione, et datum sit aequale rectangulo
 EA, AF, positâ AF a puncto A versus partes C.

CAS. 1. Quando recta AF minor est ipsâ AC; igitur ablato
 dato rectangulo EA, AF, ab ipso EA, AD reliquum, rectan-
 F f

gulum scilicet EA, FD, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F et data recta EA in data ratione ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 49.

CAS. 2. Quando AF aequalis est ipsi AC, hoc est quando punctum F incidit in C; igitur a rectangulo EA, AD ablato dato rectangulo EA, AC reliquum, scilicet rectangulum EA, CD, habet, ex hypothesi, datam rationem ad ipsum BD, DC. Recta igitur data EA datam habet rationem ad ipsam BD, quae propterea data est, datumque erit punctum D.

CAS. 3. Quando recta AF major est ipsâ AC; igitur ablato dato rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est extra ipsa quartum D quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ipsi proximum in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 50. quae est Epitagma 3. Prob. 4. Lib. 1.

PARS 2. Sit rectangulum EA, AD minus ipso BD, DC dato, quam in ratione, fitque datum aequale rectangulo EA, AF, positâ AF versus partes puncti B.

CAS. 1. Quando AF minor est ipsa AB; igitur ad rectangulum EA, AD addito dato rectangulo EA, AF, totum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothefi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Igitur datis in recta linea tribus punctis B, F, C quartum D inveniendum est extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 49.

E B F A C D

CAS. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AB, hoc est quando punctum F incidit in ipsum B; igitur rectangulo EA, AD dato rectangulo EA, AB addito, totum, rectangulum scilicet EA, DB habet, ex hypothefi, datam rationem ad ipsum BD, DC. Data igitur recta EA datam habet rationem ad ipsam CD, data propterea est CD, et datum erit punctum D.

E B A C D

F

CAS. 3. Quando recta AF major est ipsa AB; igitur rectangulo EA, AD dato rectangulo EA, AF addito, totum, rectangulum scilicet EA, FD datam, ex hypothefi, habet rationem ad ipsum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum est quartum F extra ipsa quod faciet rectangulum a

E F B A C D

segmento DF inter ipsum et punctum F ab eo remotissimum
et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC,
quod fiet ope Prop. 49.

PARS 3. Denique datum fit rectangulum EA, AD simul
cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet ratio-
nem, et datum fit aequale rectangulo EA, AF, positâ AF ver-
sus partes puncti C. Igitur quoniam rectangulum EA, AD
simul cum ipso EA, DF aequale est

dato rectangulo EA, AF, erit rect-
angulum EA, DF id ad quod rect-
angulum BD, DC datam habet ra-

E B A C D F

tionem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F in-
veniendum est quartum D inter C et F quod faciet rectangu-
lum a segmento DF inter ipsum et punctum extremum F
quod non est ad eas partes ipsius D ad quas est punctum me-
dium C et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD,
DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data, quod fiet
ope Prop. 45.

PROP. LXXVII. PROB. IV. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quartum D
“ invenire extra data puncta quod faciet rectangulum a seg-
“ mento DA inter ipsum et punctum A ipsi proximum et
“ data recta EA majus, aut minus rectangulo a segmentis in-
“ ter ipsum et reliqua puncta data B, C dato, quam in rati-
“ one, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
“ eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS 1. Sit rectangulum EA, AD majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et datum aequale sit rectangulo EA, AF positâ AF versus partes D. Igitur a rectangulo EA, AD ablato dato rectangulo EA, AF, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD datam, ex hypothesi, habet rationem ad rectangulum BD, DC.

E B C A F D
—————

Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F invenendum est quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ei proximum et data recta EA in data ratione ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 50.

PARS 2. Sit rectangulum EA, AD minus ipso BD, DC dato, quam in ratione, et datum aequale sit rectangulo EA, AF, positâ AF versus partes puncti B.

CAS. 1. Quando AF minor est recta AC; igitur addito dato rectangulo EA, AF ipsi EA, AD, totum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in

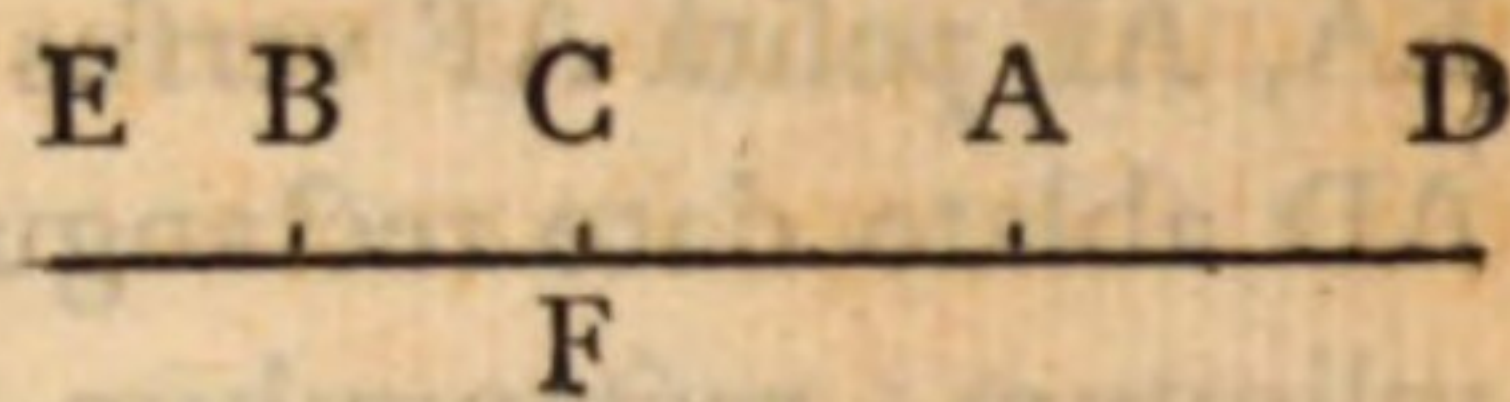
recta linea tribus punctis B, C, F invenendum est quartum D extra ipsa

E B C F A D
—————

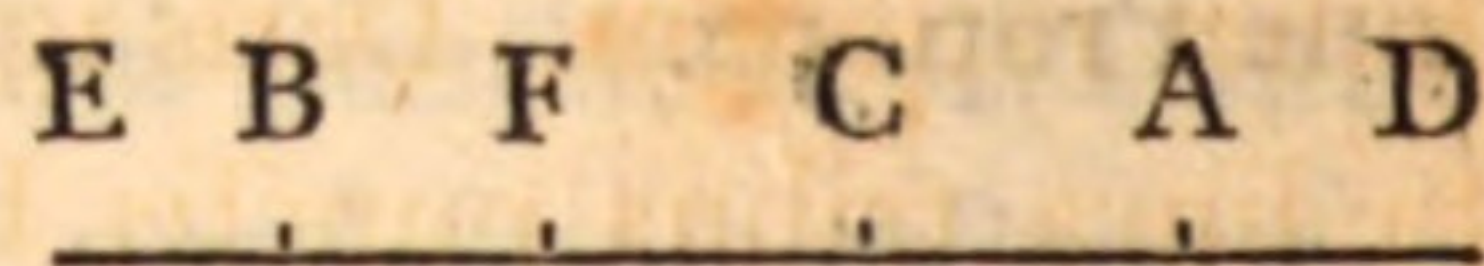
quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ei proximum et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta B, C, quod fiet ope Prop. 50.

CAS. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AC, hoc est quando punctum F incidit in C.

Igitur addito dato rectangulo EA, AC ipsi EA, AD, totum, scilicet rectangulum EA, CD datam habet, ex hypothesi, rationem ad rectangulum BD, DC; et propterea data recta EA datam habet rationem ad ipsam BD. Data igitur est BD, et datum erit punctum B.



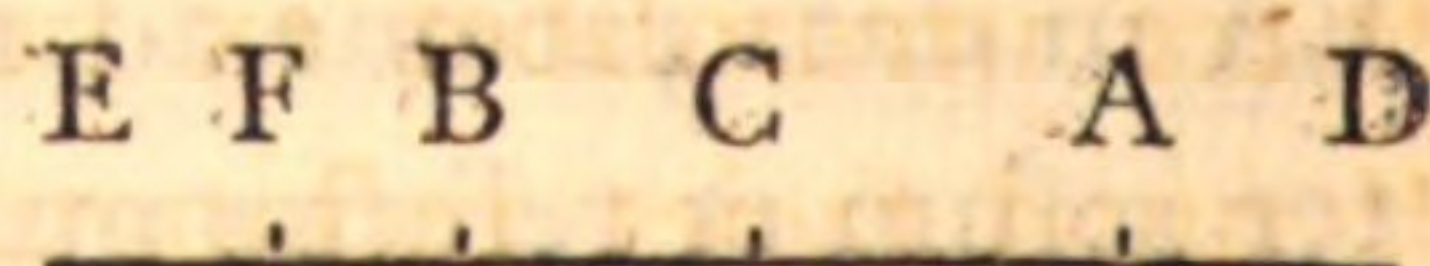
CAS. 3. Quando recta AF major est ipsâ AC, at minor quam AB; igitur addito dato rectangulo EA, AF rectangulo EA, AD, totum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum



BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C quartum D inveniendum est extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC, quod fiet ope Prop. 49.

CAS. 4. Quando recta AF aequalis est ipsi AB, hoc est quando punctum F incidit in C. Casus hic eodem modo ostenditur quo Cas. 2. ostensus fuit.

CAS. 5. Quando recta AF major est ipsâ AB; addito igitur dato rectangulo EA, AF ipsi EA, AD, totum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C



inveniendum est extra ipsa quartum D quod faciet rectangu-

lum a segmento DF inter ipsum et punctum F ab eo remotissimum et datâ rectâ EA ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 48.

PARS 3. Denique fit rectangulum EA, AD datum simul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, fitque datum aequale rectangulo EA, AF, posita AF in BA producta ad partes D. Quoniam igitur rectangulum EA, AD simul cum ipso EA, DF aequale est dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam
 E B C A D F
 —————
 habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum est quartum D inter C et F quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum extremum F quod non est ad eas partes ipsius D ad quas est punctum medium C, et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 45.

Corollarium idem sequitur ex Prob. 4. cum eo ex Prob. 3.

P R O B. V.

“ DATIS in recta linea tribus punctis invenire quartum inter
 “ ter utrumlibet ex punctis extremis et punctum medium
 “ quod faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et duo
 “ ex punctis datis majus, aut minus quadrato ex segmento
 “ inter ipsum et reliquum punctum datum dato, quam in ra-

“ tione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
 “ eo ad quadratum hoc datam habet rationem.”

PROP. LXXVIII. PROB. V. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum
 “ D invenire inter punctum medium C et utrumlibet ex ex-
 “ tremis, puta B, quod faciet rectangulum AD, DC a seg-
 “ mentis inter ipsum et puncta A, C quae sunt ad easdem ip-
 “ sius partes majus, aut minus quadrato ex segmento DB in-
 “ ter ipsum et reliquum punctum datum B dato, quam in ra-
 “ tione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
 “ eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB
 dato quam in ratione; auferatur datum ab ipso AD, DC rect-
 angulo, hoc fiet applicando ad datam rectam AC rectangu-
 lum dato aequale excedens quadrato, fitque E punctum ap-
 plicationis in AC producta

versus D, et fit F alterum; erit

F A C E D B

igitur per Prop. 24. Lib. 7.

Pappi Alexandrini rectangu-

lum AD, DC aequale rectangulo FD, DE una cum ipso AE,
 EC, quare ab ipso AD, DC ablato dato rectangulo AE, EC
 reliquum est rectangulum FD, DE, quod propterea, ex hypo-
 thesi, datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igi-
 tur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum est
 quartum D inter E et B quod faciet rectangulum FD, DE a
 segmentis inter ipsum et puncta E, F quae sunt ad easdem

ipsius partes in data ratione ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 51. quae est Prob. 5. Epitagma 1.

PARS 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio ipsius AC, applicari igitur potest^a ad datam rectam AC rectan-^a 27. 6. gulum dato aequale deficiens qua-

drato; applicetur, sintque E, F $\begin{array}{ccccccc} A & F & & E & C & & D & B \\ \hline & & & & & & & \end{array}$ puncta applicationum; igitur, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi rectangulum FD, DE aequale erit rectangulo AD, DC una cum dato rectangulo AE, EC, seu FC, CE. Ex hypothese igitur rectangulum FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB, et reliqua solutio erit ut in parte 1.

CAS. 2. Quando datum, addendum scilicet rectangulo AD, DC, aequale est quadrato ex dimidio rectae AC. Igitur bifariam secta AC in E, erit^b rectangu-^b 6. 2. lum AD, DC una cum quadrato ex

EC aequale quadrato ex ED, quod $\begin{array}{ccccccc} A & & E & & C & & D & & B \\ \hline & & & & & & & & \end{array}$ propterea, ex hypothese, datam habebit rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea duobus punctis E, B inveniendum est tertium D inter ipsa quod faciet quadratum ex ED ad illud ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 41. quae est Prob. 1. Lib. 1.

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex EC dimidio ipsius AC; fit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex data EF, additis igitur hisce rectangulo AD, DC, to-

tum, quadratum scilicet ex ED una cum dato quadrato ex EF datam, ex hypothesi, habet rationem ad quadratum ex DB. Quadratum igitur ex ED minus est quadrato ex DB dato, quam in ratione, et invenendum est punctum D inter data puncta E, B quod hoc efficiet, invenietur autem ope partis 2. Prop. 66. quae est Prob. 1. Epitagma 1. Lib. hujus 3.

A E F C D B

PARS 3. Denique fit rectangulum AD, DC datum simul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem.

CAS. 1. Quando datum minus est rectangulo AB, BC; ad datam rectam AC applicetur utrinque rectangulum aequale dato excedens quadrato, fitque E punctum applicationis quod est in AC producta versus B, et fit F alterum; et quoniam datum, rectangulum scilicet AE, EC minus est rectangulo AB, BC, cadet punctum E inter C et B.

Est autem per Prop. 23. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE aequale rectangulo

F A C D E B

FC, CE hoc est dato rectangulo AE, EC; rectangulum igitur FD, DE est id ad quod quadratum ex DB habet, ex hypothesi, datam rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum est quartum D inter punctum extremum F et medium E quod faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et ea puncta, rectangulum scilicet FD, DE ad quadratum ex DB segmento inter ipsum et reliquum punctum datum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. quae est Prob. 5. Epitagma 3. in qua ostenditur rationem datam rectanguli FD,

DE ad quadratum ex DB non posse majorem esse ratione quadrati ex dimidio rectae FE ad rectangulum FB, BE, et si huic rationi eadem fuerit ratio data unicum erit punctum D, si vero minor fuerit ratio data ea ratione erunt duo puncta D quae Problema efficient.

CAS. 2. Quando datum aequale est rectangulo AB, BC; in BA producta sumatur AF aequalis datae CB, et quoniam punctum D est inter C et B, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC una cum ip-

so FD, DB aequale ipsi FC, CB, hoc
est dato rectangulo AB, BC; rect-
angulum igitur FD, DB est id ad
quod quadratum ex DB datam habet rationem, et propterea
data est ratio rectae FD ad ipsam DB, quare, componendo,
data est ratio datae rectae FB ad ipsam BD; data igitur est
BD, datumque erit punctum D.

F A C D B
—————|—————|—————|—————|—————

CAS. 3. Quando datum majus est rectangulo AB, BC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque E punctum applicationis quod est in AC producta versus partes B, et sit F alterum; et quoniam datum rectangulum AE, EC majus est quam AB, BC erit punctum E in AB producta. Est autem, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi,

rectangulum AD, DC una cum ipso FD, DE aequale rectangulo FC, CE, hoc est dato rectangulo AE, EC; rectangulum igitur FD, DE est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum est quartum D inter punctum extremum F et me-

F A C D B E
—————|—————|—————|—————|—————|—————

dium B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E in data ratione ad quadratum ex DB, quod fiet ope Prop. 52. in qua quidem ostenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB majorem esse ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB, quia scilicet punctum D propius est puncto medio B quam est punctum C. Ratio igitur data rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB major debet esse ratione rectanguli dati FC, CE, five AE, EC ad quadratum ex CB.

PROP. LXXIX. PROB. V. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quantum D
 “ invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum AD,
 “ DC a segmentis inter ipsum et puncta extrema A, C majus,
 “ aut minus quadrato ex segmento DB inter ipsum et reli-
 “ quum punctum datum B dato, quam in ratione, vel quod
 “ faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod qua-
 “ dratum hoc datam habet rationem.”

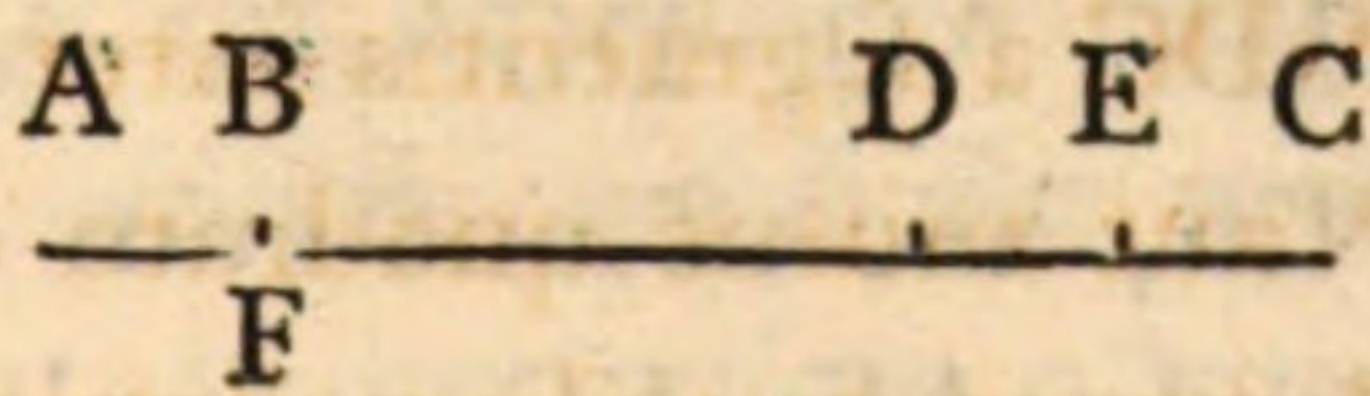
PARS I. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato, quam in ratione; quoniam igitur datum quod auferendum est a rectangulo AD, DC minus est ipso, erit idem minus quadrato ex dimidio rectae AC;
 ad rectam igitur AC applicari potest ^a rectangulum ei dato aequale deficiens quadrato. Applicetur, et fit

^a 27. 6. E punctum applicationis quod propius est puncto C, et F alterum; et quoniam rectangulum AE, EC minus est ipso AD,

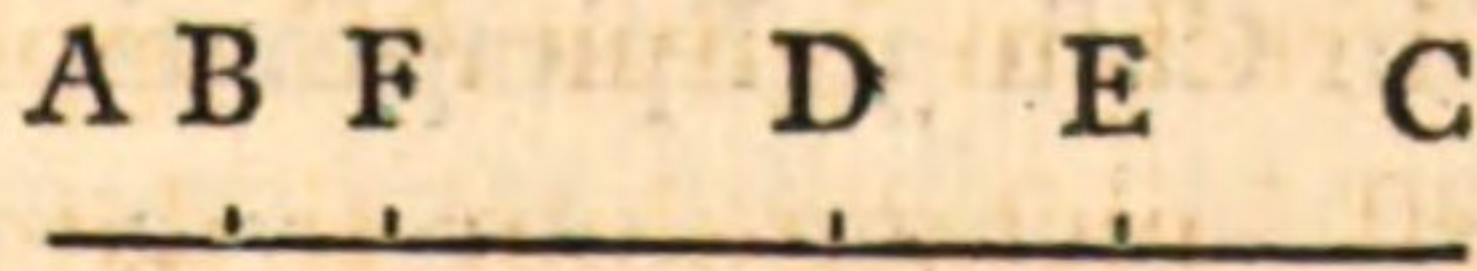
A F B D E C

DC cadet punctum E inter D et C. Est autem, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC aequale rectangulo AE, EC una cum ipso FD, DE; igitur a rectangulo AD, DC ablato dato rectangulo AE, EC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE datam habet, ex hypothesi, rationem ad quadratum ex DB. Et primo, fit punctum B inter puncta F, E, hoc est fit datum rectangulum AE, EC, hoc est AF, FC minus ipso AB, BC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum est quartum D inter puncta F, E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum datum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52.

Secundo, fit punctum B in ipso F; hoc est fit rectangulum AF, FC aequale ipsi AB, BC, et quoniam rectangulum FD, DE, five in hoc casu BD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipsam DB, et componendo, data erit ratio datae rectae EB ad rectam BD; data igitur est BD, et datum erit punctum D.



Tertio, fit punctum B inter A et F, hoc est fit rectangulum AF, FC majus ipso AB, BC; et quoniam rectangulum FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB, igitur data sunt in recta linea tria puncta B, F, E et inveniendum est quartum D inter puncta F, E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta F, E ad quadratum ex DB segmento inter ipsum et reliquum datum punctum B, extremum



scilicet quod est ad easdem partes ad quas est medium F in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. in qua quidem ostenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB non posse maiorem esse ratione quadrati ex FE ad rectangulum EB, BF quater, cui si aequalis fuerit ratio data unicum erit punctum D, si vero eâ fuerit minor ratio data duo erunt puncta D quae Problema efficient.

PARS 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato ei scilicet quod ipsi AD, DC addendum est excedens quadrato, et sit E punctum applicationis quod est in AC producta, sitque F alterum; est autem per Prop. 31. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC una cum ipso FC, CE, hoc est una cum dato rectangulo AE, EC aequale rectangulo FD, DE. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum est quartum D inter B et E quod faciet rectangulum FD, DE inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et punctum reliquum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52. Ratio autem data rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB major debet esse ratione rectanguli dati FC, CE, five AE, EC ad quadratum ex CB, ut in Casu 3. Epitagmatis 2. Prob. 5. Lib. 1. ostensum fuit.

F A B D C E
—————

PARS 3. Denique sit rectangulum AD, DC datum simul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio ip-

fius AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum aequale dato deficiens quadrato; applicetur, fitque E punctum applicationis quod ipsi C propius est, et fit F alterum. Quoniam igitur, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE aequale est dato, rectangulo scilicet AE, EC, erit rectangulum FD, DE id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem.

A F E B D C

Primo autem sit rectangulum AE, EC majus ipso AB, BC et cadat punctum B in recta FE producta versus D. Datis igitur tribus punctis F, E, B invenendum est quantum D extra data puncta ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ab ipso remotiora ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum datum in ratione data, quae, ut patet, debet esse majoris ad minus, quod fiet ope Prop. 54. quae est Prob. 6. Epitagma 1. in qua etiam ostenditur rationem FD, DE ad quadratum ex DB majorem esse ratione FC, CB ad quadratum ex CB.

Secundo, cadat punctum B in ipsum E; quoniam igitur data est ratio rectanguli FD, DE, sive FD, DB ad quadratum ex DB, hoc est ratio rectae FD ad ipsam DB, et data est FB, datum erit punctum D.

A F E D C

 B

Tertio, sit rectangulum AE, EC minus ipso AB, BC, et cadet punctum B inter F et E; datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E quantum D invenendum est extra ipsa

quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E in data ratione ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum datum B, quod fiet ope Prop. 56. quae est Prob. 6. Epitagma 3.

Quarto, sit punctum B in F, et punctum D datum ostendetur, ut ostensum fuit in articulo 2do hujus Cas. 1.

Quinto, denique sit rectangulum AE, EC, five AF, FC majus ipso AB, BC, et cadat punctum B inter A et F puncta, et in hoc casu punctum D potest inveniri vel inter E, C vel inter A, F puncta; quando est inter E et C data sunt in recta linea tria puncta B, F, E ad inveniendum quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum FD, DE, a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ipsi propiora ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum datum in data ratione, quod fiet ope Prop.

A B F E D C

A B D F E C

55. Et quoniam in hac ostenditur puncta remotiora a puncto E majores facere rationes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora, et est punctum D inter E et C, igitur ratio data rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minor debet esse ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB. Quando autem D est inter puncta A, F data sunt tria puncta B, F, E in recta linea ad inveniendum quartum D inter B et F quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E quae sunt ad easdem ipsius partes ad quadratum

ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum datum in ratione data, quod fiet ope Prop. 51. Ratio autem data nullam habet limitationem.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in E erit rectangulum AD, DC simul cum quadrato ex ED aequale dato, quadrato scilicet ex EC; quadratum igitur ex ED est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; data propterea est ratio rectae ED ad ipsam DB, et data est recta EB, quare data est ED, et punctum D erit datum.

A E B D C

CAS. 3. Quando datum est majus quadrato ex dimidio rectae AC, quadratis scilicet ex EC, EF, bifariam secta AC in E; erit rectangulum AD, DC simul cum quadratis ex ED, EF aequale dato, quadratis scilicet ex EC, EF, quadrata igitur ex ED, EF sunt id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem, et datum est

A E F B D C

quadratum ex EF, quare quadratum ex ED minus est quadrato ex DB dato quam in ratione. Datis igitur duobus punctis E, B tertium D inveniendum est extra ipsa ad partes B quod efficiet quadratum ex segmento DE inter ipsum et punctum E ab eo remotius minus quadrato ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B in data ratione, quod fiet ope Partis 2. Prop. 67.

PROP. LXXX. PROB. V. EPITAGMA 3.

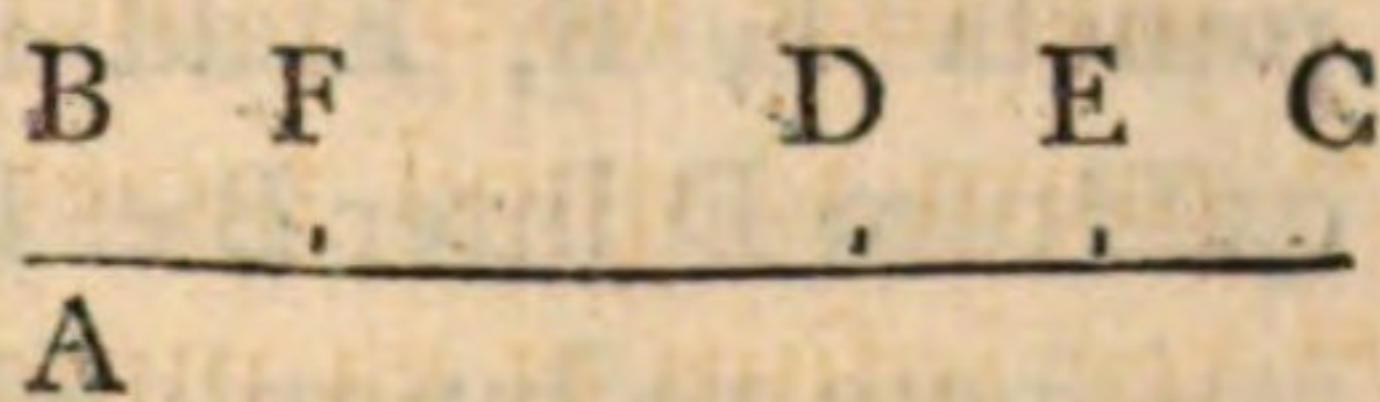
“ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “ invenire inter punctum medium A et utrumlibet extre-
 “ mum C quod faciet rectangulum AD, DC a segmentis in-
 “ ter ipsum et ea puncta majus, aut minus quadrato ex seg-
 “ mento DB inter ipsum et reliquum punctum B dato, quam
 “ in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul
 “ cum eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato quam in ratione; igitur quoniam datum quod auferendum est a rectangulo AD, DC minus est ipso, erit idem minus quadrato ex dimidio rectae AC, applicari igitur potest ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et sit E punctum applicationis quod propius est puncto C, et F alterum; et quoniam per Prop. 31. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC aequale est rectangulo dato AE, EC una cum ipso FD, DE, igitur ablato rectangulo AE, EC ab ipso AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum est quartum D inter F et E quod faciet rectangulum FD, DE ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. in cujus Casu 3. ostenditur rationem datam non posse majorem esse ratione quadrati ex FE ad rectangulum EB, BF quater, cui si aequalis fuerit

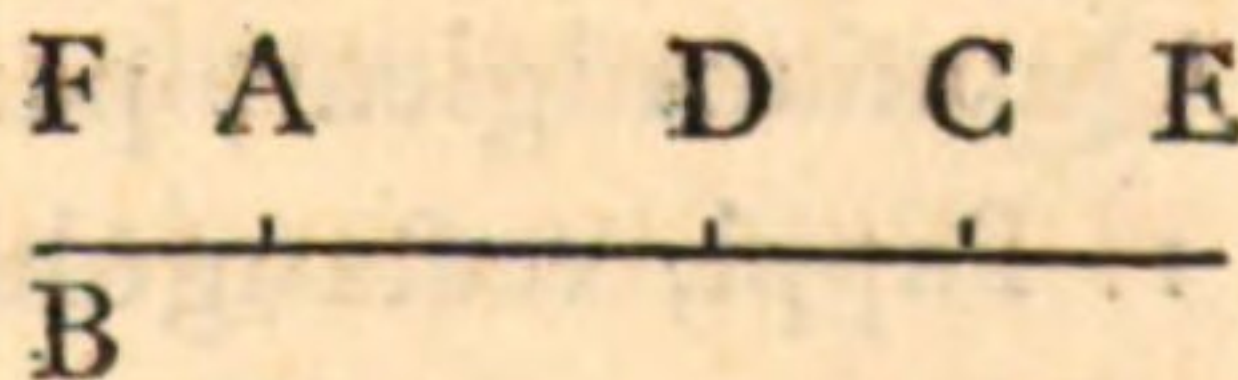
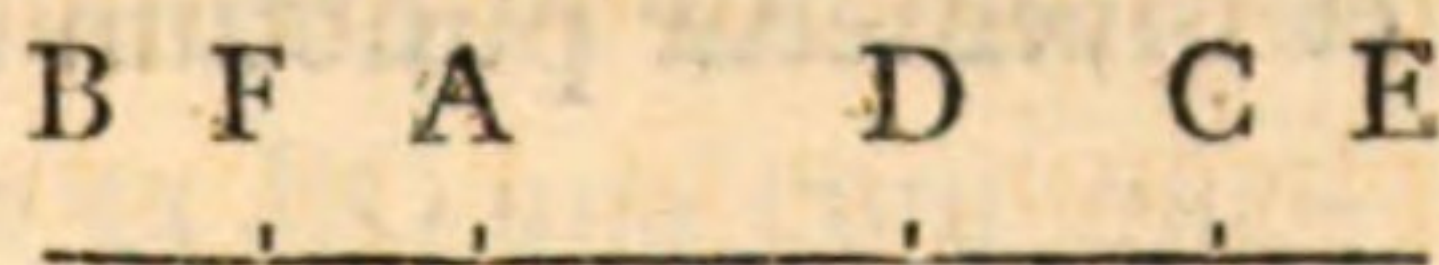
B A F D E C
 —————

unicum erit punctum D, si vero minor fuerit duo erunt puncta D quae Problema efficient.

COR. Et eodem modo si data fuerint duo puncta A, C, et inveniendum sit tertium D inter ea quod faciet rectangulum AD, DC majus quadrato ex DA dato, quam in ratione, si fiat rectangulum AE, EC, five AF, FC aequale dato, ostendetur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DA datam esse, unde invenietur punctum D ope ejusdem Prop. 53.



PARS 2. Quando rectangulum AD, DC minus est quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam AC applicetur rectangulum dato, quod scilicet addendum est ipsi ADC, aequale excedens quadrato, et sit E punctum applicationis quod est in AC producta, et F alterum; quoniam igitur, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FC, CE, hoc est simul cum dato rectangulo AE, EC aequale est rectangulo FD, DE, habebit FD, DE, ex hypothese, datam rationem ad quadratum ex DB. Primo autem sit punctum B in AF producta. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum est quartum D inter F et E quod faciet rectangulum FD, DE ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. Eademque est limitatio rationis datae quae in parte 1. observata fuit. Si vero punctum B cadit in F data erit ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB five DF, data igitur est ratio rectae DE ad ipsam DB,



et data est recta BE, et propterea punctum D. Si autem punctum B cadat inter F et A, quoniam data est ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB, data erunt in recta linea tria puncta F, B, E ad inveniendum quartum D inter B et E quod faciet rationem rectanguli FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB datam, quod fiet ope Prop. 52.

$$\begin{array}{ccccccc} F & B & A & & D & C & E \\ \hline & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

COR. Et eodem modo si data fuerint duo puncta A, C et inveniendum sit tertium D inter ea quod faciet rectangulum AD, DC minus quadrato ex DA dato, quam in ratione, si fiat rectangulum AE, EC, five FC, CE aequale dato, ostendetur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DA datam esse, et inveniatur punctum D ope Prop. 52.

$$\begin{array}{ccccccc} F & A & & & D & C & E \\ \hline & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ B & & & & & & \end{array}$$

PARS 3. Denique fit rectangulum AD, DC datum simul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, fitque E punctum applicationis proprius puncto D, et fit F alterum.

$$\begin{array}{ccccccc} B & A & & F & & E & D C \\ \hline & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

Quoniam igitur, per Prop. 23. Lib.

1. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE est aequale dato rectangulo AE, EC erit rectangulum FD, DE id ad quod quadratum ex DB datam

habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E quartum D est inveniendum extra ipsa ad partes E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ei propiora ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 55. in qua ostenditur datam rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minorem esse debere ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in E, erit rectangulum AD, DC simul cum quadrato ex ED aequale dato, quadrato scilicet ex EC; quadratum igitur ED est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; data propterea est ratio rectae ED ad ipsam DB, et data est recta BE, datum igitur est punctum D.

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex EC dimidio ipsius AC; fit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex EF, et quoniam rectangulum AD, DC simul cum quadratis ex ED, DF aequale est quadratis ex EC, EF, hoc est dato, erit quadratum ex ED una cum quadrato ex EF id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; quoniam igitur quadratum ex ED simul cum dato quadrato ex EF datam habet rationem ad quadratum ex DB, erit quadratum ex ED minus quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est tertium D extra ipsa quod faciet quadratum ex segmento DE inter ipsum et punctum E quod ei pro-

pius est minus quadrato ex segmento DB inter ipsum et reli-
quum punctum B minus dato, quam in ratione, quod fiet ope
Prop. 68. partis scilicet 2. Epitagmatis 3.

P R O B. VI.

“ DATIS in recta linea tribus punctis quartum invenire ex-
“ tra ipsa ad utraquevis partes quod faciet rectangulum a seg-
“ mentis inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis majus,
“ aut minus quadrato ex segmento inter ipsum et reliquum
“ punctum datum dato, quam in ratione, vel quod faciet
“ rectangulum illud datum simul cum eo ad quod quadra-
“ tum hoc datam habet rationem.”

PROP. LXXXI. PROB. VI. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum
“ D invenire extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum
“ AD, DC a segmentis inter ipsum et duo puncta ab eo re-
“ motiora majus, aut minus quadrato ex segmento DB inter
“ ipsum et reliquum punctum datum dato, quam in ratione,
“ vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad
“ quod quadratum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB
dato, quam in ratione.

CAS. I. Quando datum minus est rectangulo AB, BC; ad
datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale exce-
dens quadrato, sitque E punctum applicationis in AC pro-

ducta ad partes C, et sit F alterum. Quoniam igitur rectangulum AD, DC aequale est, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulo FD, DE simul cum ipso AE, EC, ablato dato rectangulo AE, EC ab ipso AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE ad quadratum ex DB datam

habet rationem. Datis igitur in recta

F A C E B D

linea tribus punctis F, E, B invenien-

dum est quartum D extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ab ipso remotiora in data ratione ad quadratum ex DB inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 54. Patet autem rationem datam debere esse majoris ad minorem.

CAS. 2. Quando datum aequale est rectangulo AB, BC; sumatur in BA producta recta AF aequalis ipsi CB, et per Prop. 24. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC aequale erit ipsi FD, DB una cum rectangulo AB, BC;

ablato igitur dato, rectangulo scilicet AB, BC ab ipso AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DB, est id

F A C B D

ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; recta igitur FD datam habet rationem ad ipsam DB, et data est recta FB ad ipsam DB, datum igitur est punctum D.

CAS. 3. Quando datum majus est rectangulo AB, BC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et sit E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C, sitque F alterum; et quoniam rectangulum AE, EC majus est ipso AB, BC cadet punctum E inter B et D puncta. Est autem, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi,

rectangulum AD, DC aequale ipsi FD, DE una cum rectangulo AE, EC, et ablato hoc a rectangulo AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE datam

habet, ex hypothesi, rationem ad $\text{F} \quad \text{A} \quad \text{C} \quad \text{B} \quad \text{E} \quad \text{D}$
 quadratum ex DB. Datis igitur in -----
 recta linea tribus punctis F, B, E

quartum D inveniendum est extra ipsa quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema F, E in data ratione ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 56. in qua ostenditur rationem datam non posse maiorem esse ratione quadrati ex FE ad rectangulum FB, BE quater.

COR. Et eodem modo si data fuerint duo puncta A, B et inveniendum sit tertium D in AB producta quod faciet rectangulum AD, DB majus quadrato ex DB dato, $\text{F} \quad \text{A} \quad \text{B} \quad \text{E} \quad \text{D}$
 quam in ratione, si fiat rectangulum -----
 AE, EB, five FB, BE aequale dato, C
 ostendetur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB datam esse; unde invenietur punctum D ope ejusdem Prop. 56.

PARS 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; applicari igitur potest ad datam rectam AC rectangulum aequale dato deficiens quadrato; applicetur, et sit E punctum applicationis quod ipsi C propius est, et F alterum. Quoniam igitur aequales sunt AF, EC, et est D in AC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD,

DC una cum ipso FC, CE, hoc est dato AE, EC aequale rectangulo FD, DE, quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum est quartum D extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta remotiora F, E ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 54. Et patet rationem datam debere esse maioris ad minorem.

A F E C B D

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in E, erit rectangulum AD, DC simul cum dato quadrato ex EC aequale quadrato ex ED quod propterea datam habet, ex hypothesi, rationem ad quadratum ex DB. Data igitur est ratio rectae ED ad ipsam DB, et data est recta EB, quare datum est punctum D.

A E C B D

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex EC dimidio rectae AC; fit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex EF; et quoniam rectangulum AD, DC una cum quadratis ex EC, EF, hoc est una cum dato, aequale est quadratis ex ED, EF, quadrata ex ED, EF, ex hypothesi, datam habent rationem ad quadratum ex DB; est igitur quadratum ex ED minus quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur E, B inveniendum est tertium D extra ipsa quod faciet quadratum ex segmento DE inter ipsum et punctum E ab ipso remotius minus qua-

A E F C B D

drato ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B dato. quam in ratione, quod fiet ope partis 2. Prop. 67.

PARS 3. Denique fit rectangulum AD, DC datum simul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, fitque E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C, et fit F alterum. Et quoniam punctum D est in AB producta et est datum, rectangulum scilicet AE, EC majus ipso AD, DC quod majus est rectangulo AB, BC, igitur datum rectangulum AE, EC majus debet esse ipso AB, BC. Est autem rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE aequale, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulo FC, CE, hoc est dato rectangulo AE, EC; igitur rectangulum FD, DE est id ad quod quadratum ex DB datam, ex hypothese, habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum est quartum D inter B et E quod faciet rectangulum a segmentis FD, DE inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB segmento inter ipsum et reliquum punctum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52. Nulla autem est limitatio rationis datae.

F A C B D E
—————

PROP. LXXXII. PROB. VI. EPITAGMA 2.

- “ DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
 “ invenire extra ipsa ad partes C quod faciet rectangulum
 “ AD, DC a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C ipsi

“ propiora majus, aut minus quadrato ex DB segmento inter
 “ ipsum et reliquum punctum B dato, quam in ratione, vel
 “ quod faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod
 “ quadratum hoc datam habet rationem.”

PARS 1. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C, et F alterum. Quoniam igitur sunt FA, CE aequales, et est D in FE producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7.

Pappi, rectangulum AD, DC aequale rectangulo FD, DE una cum ipso AE, EC. Ablato igitur dato, rectangulo scilicet AE, EC ab ipso AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE habet, ex hypothesi, datam rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum est quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex DB segmento inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 55. Patet vero rationem datam debere esse minoris ad majorem.

B F A C E D

PARS 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et sit

E punctum applicationis quod puncto C est propius, et F alterum. Igitur quoniam aequales sunt AF, EC et est punctum D in AC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC una cum ipso FC, CE, hoc est una cum dato rectangulo AE, EC aequale rectangulo FD, DE; igitur, ex hypothese, rectangulum FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E quartum D inveniendum est extra ipsa ad partes E quod faciet rationem rectanguli FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex DB segmento inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 55. in qua ostenditur datam rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB debere majorem esse ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB, ut scilicet cadat punctum D in AC producta.

B A F E C D
—————

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in E, rectangulum AD, DC simul cum dato, quadrato scilicet ex EC aequale est quadrato ex ED quod propterea datam, ex hypothese, habet rationem ad quadratum ex DB. Data igitur est ratio rectae ED ad ipsam DB, et data est BE, quare datum est punctum D.

B A E C D
—————

CAS. 3. Quando datum est majus quadrato ex EC dimidio ipsius AC; fit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex EF, est igitur rectangulum AD, DC una cum quadratis ex EC, EF, hoc est una cum dato, aequale quadratis ex

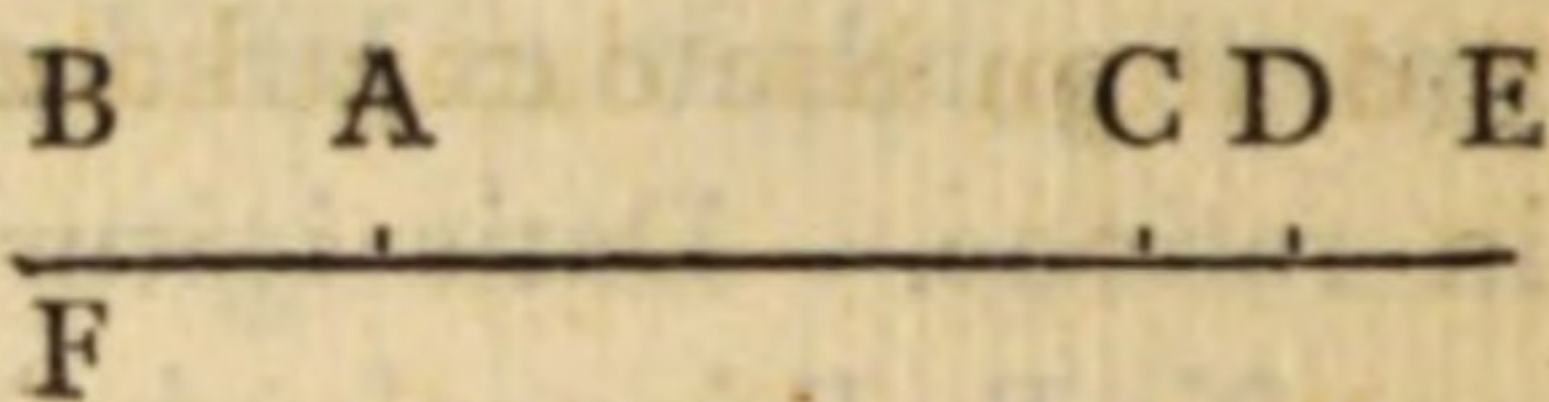
ED, EF, quae propterea simul habent, ex hypothesi, datam rationem ad quadratum ex DB; quare quadratum ex ED minus est quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est tertium D extra ipsa ad partes E quae faciet quadratum ex DE minus quadrato ex DB dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 2. Prop. 68.

B A E F C D
—————

PARS 3. Denique fit rectangulum AD, DC datum simul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, fitque E punctum applicationis quod est in AC producta, et F alterum. Et primò, fit rectangulum AE, EC, hoc est ipsum CF, FA minus rectangulo CB, BA, et cadet punctum F inter A et B. Est autem, per Prop. 23. Lib. 1. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE aequale rectangulo FC, CE, hoc est dato, rectangulo scilicet AE, EC; rectangulum igitur FD, DE est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum est quartum D inter puncta F, E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta F, E ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et punctum B quod est ad easdem partes ad quas est punctum medium F in data ratione, quod fiet ope Prop. 53. In cuius casu 3. ostenditur rationem datam non posse maiorem esse ratione quadrati ex FE ad rectangulum EB, BF quater.

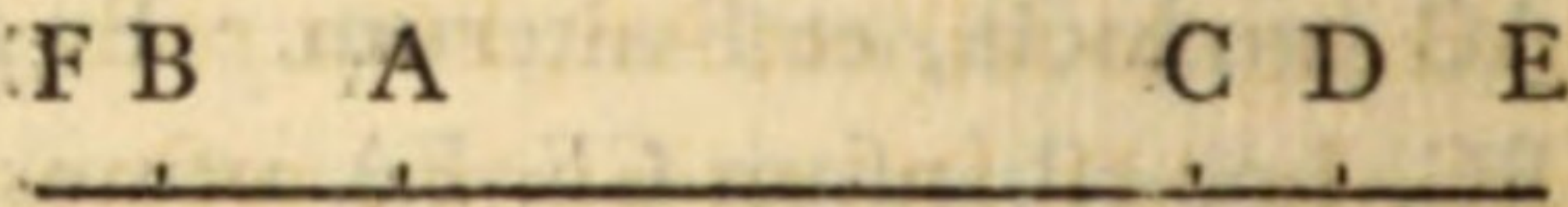
B F A C D E
—————

Secundò, sit rectangulum CF, FA aequale rectangulo CB, BA, hoc est cadat punctum F in ipsum B; habet igitur, ut in casu 1. ostensum, rectangulum FD, DE, five BD, DE datam rationem ad quadratum ex DB, quare data est ratio rectae ED ad ipsam DB, et data est recta BE, datum igitur est punctum D.



Tertiò, sit rectangulum CF, FA majus ipso CB, BA, et cadat punctum F in AB producta ad partes B; et, ut in casu 1. data ostendetur ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB. Datis igitur in

recta linea tribus punctis F, B, E quartum D inveniendum est inter puncta



B, E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52. in qua quidem ostenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minorem esse ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.

PROP. LXXXIII. PROB. VI. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D in-
 “ venire extra ipsa ad partes C quod faciet rectangulum AD,
 “ DC a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema A, C
 “ majus, aut minus quadrato ex segmento DB inter ipsum et

“reliquum punctum B dato, quam in ratione, vel quod fa-
 “ciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod qua-
 “dratum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, fitque E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C, et F alterum; et quoniam, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC aequale est rectangulo FD, DE una cum dato rectangulo AE, EC; igitur ablato dato, rectangulo scilicet AE, EC a rectangulo AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum est quartum D extra ipsa ad partes E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B in ratione dato, quod fiet ope Prop. 56. in qua ostenditur rationem datam non posse majorem esse ratione quadrati ex FE ad rectangulum FB, BE quater.

F A B C E D
 —————

COR. Eodem modo si data sint duo puncta A, C et inveniendum est tertium D in AC producta quod faciet rectangulum AD, DC majus quadrato ex DA segmento inter ipsum et punctum ab eo remotius A dato, quam in ratione, si fiat rectangulum AE, EC, five FC, CE aequale dato,

F A C E D
 —————
 B

ostendetur datam esse rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DA; unde invenietur punctum D ope ejusdem Prop. 56.

PARS 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC potest applicari rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, fitque E punctum applicationis quod propius est puncto C, et F alterum. Quoniam igitur aequales sunt AF, EC, et est punctum D in AC producta, erit, per Prop.

24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum dato rectangulo AE, EC, five FC, CE, aequale rectangulo FD, DE quod propterea, ex hypothesi, datam habebit rationem ad quadratum ex DB. Primò autem fit rectangulum AE, EC minus ipso AB, BC, et cadet punctum E inter B et C. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E invenendum est quartum D extra ipsa ad partes E quod faciet rationem rectanguli FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 56. in qua ostenditur rationem datam non posse majorem esse ratione quadrati ex FE ad rectangulum FB, BE quater, at majorem esse ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.

Secundò, fit rectangulum AE, EC aequale ipsi AB, BC, et cadet punctum E in B; quoniam igitur data ostensa est ratio rectanguli

A F B E C D

A F B C D

E

FD, DE, five FD, DB ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae FD ad ipsam DB, et data est FB, quare datum est punctum D.

Tertiò, sit rectangulum AE, EC majus ipso AB, BC, et cadat punctum E inter F et B; quoniam igitur data est ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB, data erunt in recta linea tria puncta F, E, B ad inveniendum quartum D extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ab ipso remotiora in data ratione ad quadratum ex DB segmento inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 54. in qua ostenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minorem esse ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.

A F E B C D

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in E erit rectangulum AD, DC simul cum dato, quadrato scilicet ex EC aequale quadrato ex ED, quod propterea, ex hypothesis, datam habebit rationem ad quadratum ex DB; data igitur est ratio rectae ED ad ipsam DB, et data est EB, quare datum erit punctum D.

A E B C D

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex EC dimidio rectae AC; sit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex recta EF, est igitur rectangulum AD, DC simul cum dato, quadratis scilicet ex EC, CF aequale quadrato ex ED una cum quadra-

A E F B C D

to ex EF; quadratum igitur ex ED una cum dato quadrato ex EF habet, ex hypothesi, datam rationem ad quadratum ex DB, hoc est quadratum ex ED minus est quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum est tertium C extra ipsa quod faciet quadratum ex DE segmento inter ipsum et punctum E ab ipso remotius minus quadrato ex DB segmento inter ipsum et reliquum punctum dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 2. Prop. 67.

A E F B C D

PARS 3. Denique fit rectangulum AD, DC datum simul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato; fitque E punctum applicationis quod est in AC producta, et F alterum; et quoniam aequales sunt FA, CE et est punctum D inter C et E, nam rectangulum AD, DC minus est dato AE, EC, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE aequale rectangulo FC, CE, hoc est dato, rectangulo scilicet AE, EC; rectangulum igitur FD, DE est id ad quod quadratum ex DB datam, ex hypothesi, habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E quartum D est inveniendum inter B et E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB segmento inter ipsum et reliquum punctum B in data ratione, quod fiet ope Casus 3. Prop. 52. Ubi ostenditur rationem rectanguli

F A B C D E

FD, DE ad quadratum ex DB minorem esse ratione rectan-
guli FC, CE, hoc est dati rectanguli AE, EC ad quadratum
ex CB.

COR. Ex Problemate 5to et 6to similia Corollaria sequun-
tur ei quod ex Problemate 3tio ostensum fuit.

K k 2

SECTIO

DE TERMINATA

LIBER QUARTUS

PROBLEMA PRIMUM

"Datis in recta lineis quatuor punctis quatuor invenire
inter puncta quatuor quod facit rectangulum a segmentis
inter punctum et duo punctis ex punctis datis magis, aut mi-
nus rectangulo a segmentis inter ipsum et reliqua puncta
data duo, quoniam in ratione, vel quod facit rectangulum
illud datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc da-
tum habet rationem."

PROPOSITIONE XLIV. PROBLEMA PRIMUM

"Datis in recta lineis quatuor punctis A, C, E, B quoniam
inter puncta quatuor in segmento inter C, quod facit rectan-
gulum A, C, E a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C
data duo ad eandem quatuor partes magis, aut minus rectan-
gulo B, E a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta
B, E data duo in ratione, vel quod facit rectangulum
illud datum simul cum eo ad quod rectangulum B, E da-
tum habet rationem."

S E C T I O N E

D E T E R M I N A T A

L I B E R Q U A R T U S.

P R O B L E M A P R I M U M.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis quintum invenire
 “ inter puncta media quod faciet rectangulum a segmentis
 “ inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis majus, aut mi-
 “ nus rectangulo a segmentis inter ipsum et reliqua puncta
 “ data dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum
 “ illud datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc da-
 “ tam habet rationem.”

P R O P. LXXXIV. P R O B. I. E P I T A G M A 1.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
 “ tum F invenire in segmento medio CE quod faciet rectan-
 “ gulum AF, FC a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C
 “ quae sunt ad easdem ejus partes majus, aut minus rectan-
 “ gulo BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta
 “ B, E dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum il-
 “ lud datum simul cum eo ad quod rectangulum BF, FE da-
 “ tam habet rationem.”

PARS 1. Sit rectangulum AF, FC majus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione; ad datam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et fit G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; aequales igitur sunt HA, CG, et quoniam punctum F est in HG producta, erit, $\text{HA} \quad \text{CG} \quad \text{F} \quad \text{E} \quad \text{B}$
 per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo HF, FG una cum dato rectangulo AG, GC; igitur a rectangulo AF, FC ablato dato, rectangulo scilicet AG, GC reliquum, scilicet rectangulum HF, FG datam, ex hypothesi, habet rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F inter puncta media G, E quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G quae sunt ad eadem ejus partes ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta B, E in ratione data, quod fiet ope Prop. 57. quae est Prob. 1. Epitagma 1. Lib. 2.

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et fit G punctum applicationis quod propius est puncto C, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt AH, GC, $\text{A} \quad \text{H} \quad \text{G} \quad \text{C} \quad \text{F} \quad \text{E} \quad \text{B}$
 et est F punctum in AC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC una

cum ipso HC, CG, hoc est una cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypothesis, datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B invenendum est quintum F inter puncta media G, E quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G quae sunt ad easdem ejus partes in data ratione ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta B, E, quod fiet ope Prop. 57.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF quod propterea datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B invenendum est quartum F inter G et E quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta F, B quae sunt ad easdem ejus partes ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 51. Et patet rationem datam rectanguli BF, FE minorem debere esse ratione rectanguli BC, CE ad quadratum ex GC.

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio ipsius AC; fit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, et rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC una cum quadrato ex GH erit aequale quadrato ex GF una cum eo ex GH; quadrata igitur ex GF, GH simul datam, ex hy-

A G C F E B

A G H C F E B

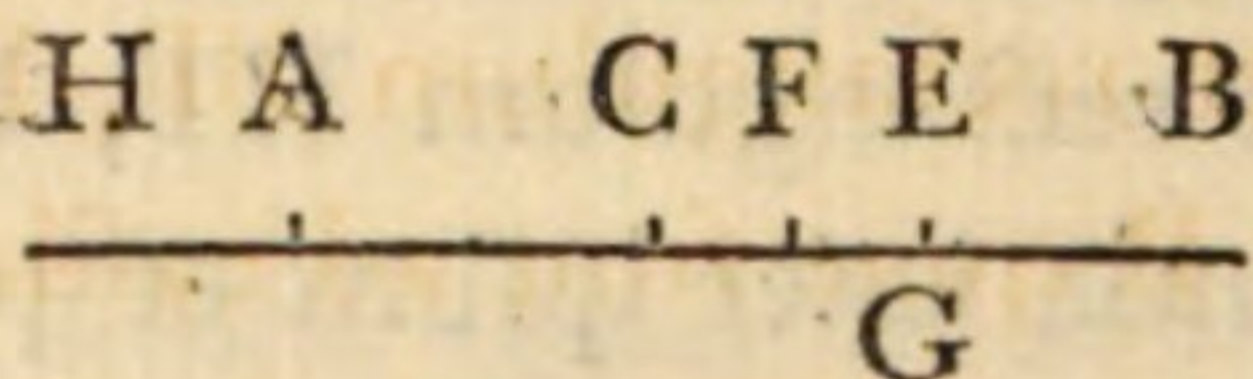
pothesi, habent rationem ad rectangulum BF, FE, et datum est quadratum ex GH, quare quadratum ex GF minus est rectangulo BF, FE dato, quam in ratione; et propterea, per Prop. 14. Dat. Edit. Glasg. 1762. rectangulum BF, FE majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione. Datis igitur in recta linea $A \quad G \quad H \quad C \quad F \quad E \quad B$ tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter G et E quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta E, B quae sunt ad eandem ejus partes majus quadrato ex segmento FG inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 78. hoc est Prob. 5. Epitagmatis 1: Lib. 3.

PARS 3. Denique sit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et sit G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter C et G, nam rectangulum AF, FC minus est ipso AG, GC, erit, per Prop.

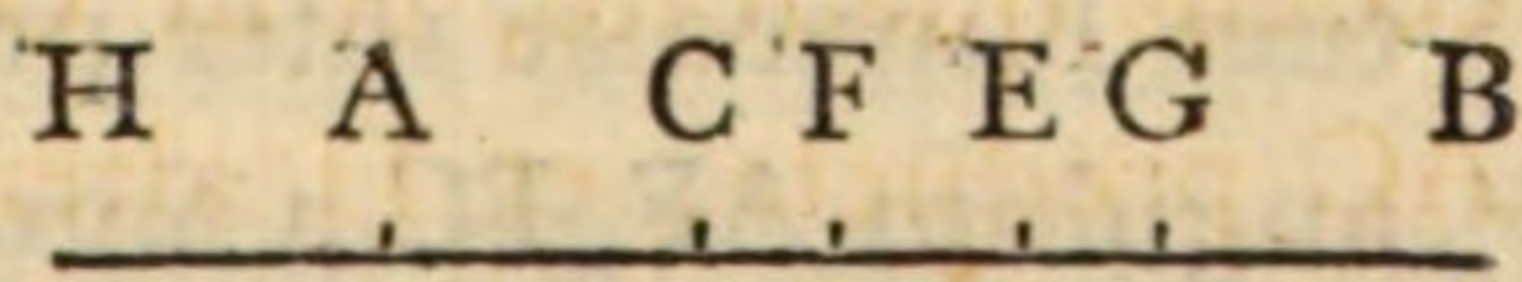
23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC; est igitur rectangulum HF, FG id ad quod rectangulum BF, FE datam, ex hypothesi, habet rationem. Primò, sit rectangulum AG, GC minus ipso AE, EC, et cadet punctum G inter puncta C, E; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveni-

endum est quintum F in segmento extremo HG quod faciet rectangulum BF, FE a segmento FB inter ipsum et extremum B quod ad easdem est partes ad quas sunt puncta media G, E, et segmento FE inter ipsum et punctum medium E ab ipso remotius, in data ratione ad rectangulum HF, FG, quod fiet ope Prop. 62. quae est Prob. 2. Epitagma 3. Lib. 2.

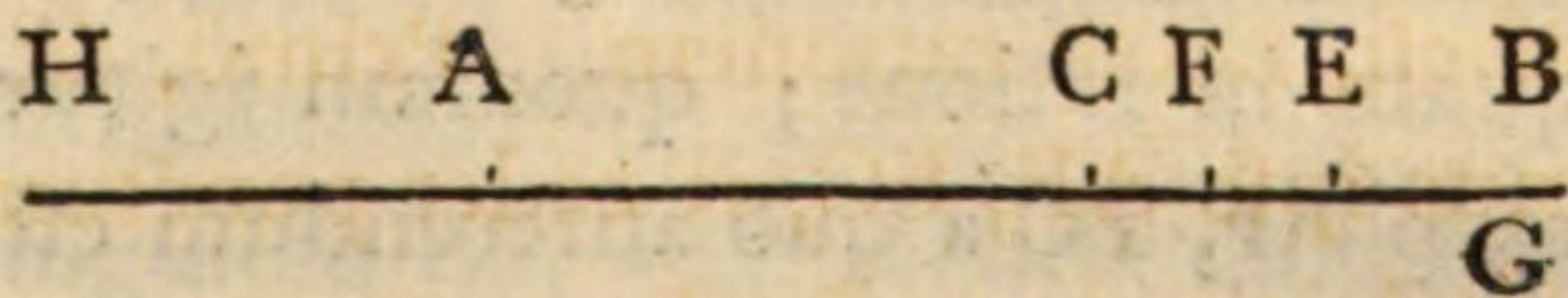
Secundò, sit rectangulum AG, GC aequale ipsi AE, EC, hoc est cadat punctum G in ipsum E; et quoniam data ostensa est ratio HF, FG, sive rectanguli HF, FE ad ipsum BF, FE, data erit ratio HF ad FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F.



Tertiò, sit rectangulum AG, GC majus ipso AE, EC, at minus rectangulo AB, BC, et cadet punctum G inter E et B; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F in segmento extremo HE quod faciet rationem rectanguli BF, FE a segmento FB inter ipsum et punctum extremum B quod est ad easdem ejus partes ad quas sunt puncta media E, G, et segmento FE inter ipsum et punctum medium E ei propius ad rectangulum HF, FG inter ipsum et reliqua puncta H, G datam, quod fiet ope Prop. 61. quae est Prob. 2. Epitagma 2. Lib. 2.

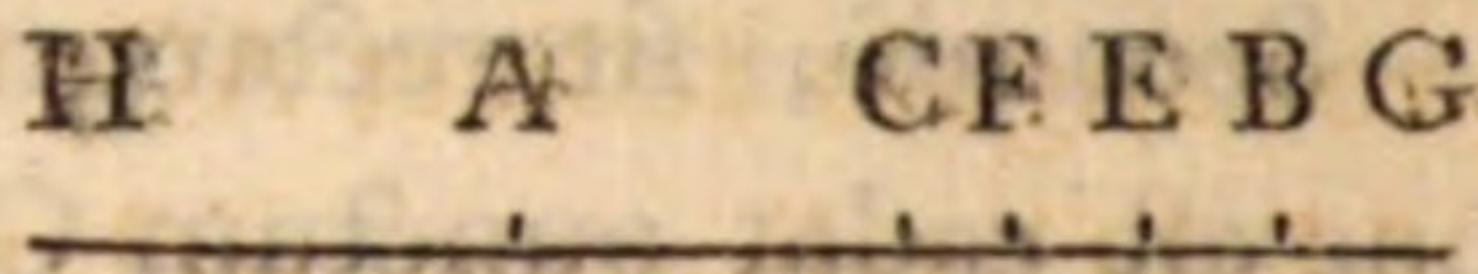


Quartò, sit rectangulum AG, GC aequale ipsi AB, BC, hoc est cadat punctum G in B, et of-



tendetur punctum F datum esse ut in praecedente articulo secundo.

Quintò, denique sit rectangulum AG, GC majus ipso AB, BC, et cadet punctum G in CB producta; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, B, G ad inveniendum quintum F in segmento extremo HE quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 60. quae est Prob. 2. Epitagma 1. Lib. 2.



PROP. LXXXV. PROB. I. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
 “ tum F invenire inter puncta media E, C quod faciet rect-
 “ angulum AF, FC a segmentis inter ipsum et alterum extre-
 “ mum A, mediumque C a puncto A remotius majus, aut
 “ minus rectangulo BF, FE a segmentis inter ipsum et reli-
 “ qua puncta E, B dato, quam in ratione, vel quod faciet rect-
 “ angulum illud datum simul cum eo ad quod rectangulum
 “ hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus ipso BF, FE dato, quam in ratione; quoniam igitur datum minus est rectangulo AF, FC a quo auferendum est, idem minus erit quadrato ex dimidio rectae AC, quare ad datam rectam AC appli-

cari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et sit G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; et quoniam aequales sunt AH, GC, et est punctum F inter H et G, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo AG, GC una cum ipso HF, FG; ablato igitur dato, rectangulo scilicet AG, GC ab ipso AF, FC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG datam habet, ex hypothesis, rationem ad ipsum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B quantum F inveniendum est inter puncta media E, G quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et extremum A mediumque punctum G ab A remotius in data ratione ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta reliqua E, B, quod fiet ope Prop. 58. quae est Prob. 1. Epitagma 2. Lib. 2.

A H E F G C B

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter A et C, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est simul cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypothesis, datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Primò autem, sit rectangulum datum AG, GC minus ipso AB, BC, et cadet

H A E F C G B

punctum G inter C et B. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum est quintum C inter puncta media E, G quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H mediumque ab H remotius in data ratione ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 58.

$$\begin{array}{ccccccc} H & A & E & F & C & G & B \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Secundò, fit rectangulum AG, GC aequale ipsi AB, BC et cadet punctum G in ipsum B; et quoniam rectangulum HF, FG, five HF, FB datam habet rationem ad rectangulum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad rectam FE, et data est recta HE, datum igitur est punctum F.

$$\begin{array}{ccccccc} H & A & E & F & C & B \\ \hline & & & & & & G \end{array}$$

Tertiò, denique fit rectangulum AG, GC majus ipso AB, BC et cadet punctum G in CB producta; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, B, G ad inveniendum quintum F in segmento medio EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 59. quae est Prob. 1. Epitagma 3. Lib. 2.

$$\begin{array}{ccccccc} H & A & E & F & C & B & G \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

PARS 3. Denique fit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio

ipsius AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, fitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; aequales igitur sunt AH, GC, et est punctum F inter G et C quoniam rectangulum AF, FC minus est ipso AG, GC, quare, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale est rectangulo AG, GC, hoc est dato; rectangulum igitur HF, FG est id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem. Primò autem, cadat punctum E inter G, C puncta, et data erunt in recta linea quatuor puncta H, G, E, B ad quintum F inveniendum in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad easdem partes ipsius F ad quas sunt puncta media G, E, et punctum medium G ab ipso F remotius ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data in ratione data, quod fiet ope Prop. 62. Secundò, cadat punctum E in ipsum G, et quoniam data ostensa est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FE ad ipsum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F. Tertiò, cadat punctum E inter H et G; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F inter puncta media E, G quod

A H E G F C B

A H G E F C B

A H G F C B

E

A H E F G C B

faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et punctum extremum B mediumque E a B remotius ad rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 58.

Quartò, eadat punctum E in ipsum H, et punctum F datum ostendetur ut in articulo secundo praecedente.

$$\begin{array}{ccccccc} A & E & & G & C & B \\ \hline & & & H & & \end{array}$$

Quintò, cadet punctum E inter A et H, et punctum F poterit vel esse inter G et C, in quo casu data erunt in recta linea quatuor puncta E, H, G, B ad in-

veniendum quintum F in segmento extremo GB quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ip-

$$\begin{array}{ccccccc} A & E & H & & G & F & C & B \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

suum et puncta extrema E, B ad rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 60. vel poterit punctum F esse inter puncta E, H, in quo casu data erunt in recta linea quatuor puncta E, H, G, B ad inveniendum quin-

tum F in segmento extremo EH quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta extre-

$$\begin{array}{ccccccc} A & E & F & H & & G & & C & B \\ \hline & & & & & & & & \end{array}$$

ma E, B ad rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope ejusdem Prop. 60.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio ipsius AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum quadrato ex GF aequale quadrato ex GC, hoc est dato, quadratum igitur ex GF est id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem. Et primò, si punctum

E fuerit inter G, C puncta, data erunt in recta linea tria puncta G, E, B ad inveniendum quartum F inter E et B quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta E, B ad quadratum ex segmento FG inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. Secundò, si cadat punctum E in ipsum G; quoniam data est ratio rectanguli BF, FE, five BF, FG ad quadratum ex FG, data erit ratio rectae BF ad ipsam FG, et data est recta GB, quare datum est punctum F. Tertiò, cadat punctum E inter A et G; et quoniam data est ratio rectanguli BF, FE ad quadratum ex FG, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad inveniendum quartum F inter E et G vel etiam inter G et B quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad quadratum ex segmento FG inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 52.

A G E F C B

A G F C B

 E

A E G F C B

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio ipsius AC; sit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; rectangulum igitur AF, FC simul cum quadratis ex GF, GH aequale est dato, quadrato scilicet ex GC una cum quadrato ex GH, quare, ex hypothese, quadratum ex GF una cum eo ex GH est id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem, et

A G H E F C B

datum est quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF minus est rectangulo BF, FE dato, quam in ratione, et propterea rectangulum BF, FE, per Prop. 14. Dat. majus est quadrato ex FG dato, quam in ratione. Datis

igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum

A G H E F C B

BF, FE a segmentis inter ipsum et ea puncta majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et punctum extremum G quod est ad eas partes puncti F ad quas est punctum medium E, dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 80. quae est Prob. 5. Epitagma 3. scilicet quando punctum E est inter G et C. At quando punctum E cadit in ipsum G, data erunt duo puncta E, B ad inveniendum tertium F inter ea quod faciet rectangu-

lum BF, FE majus quadrato ex FG, five FE dato, quam in ratione, quod

A G H F C B

 E

fiet ope Corollarii Partis 1. Prop. 80. Si vero punctum E fuerit inter A et G, data erunt tria

puncta E, G, B ad inveniendum quartum F in altero ex segmentis BG, GE quod faciet rectangulum BF, FE a

A E G H F C B

segmentis inter ipsum et puncta ex-

A E F G H C B

trema E, B majus quadrato ex FG dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 79.

PROP. LXXXVI. PROB. I. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin-
 “ tum F invenire in segmento medio EB quod faciet rectan-
 “ gulum AF, FC a segmentis inter ipsum et puncta extrema
 “ A, C majus, aut minus rectangulo BF, FE a segmentis in-
 “ ter ipsum et reliqua puncta E, B dato, quam in ratione, vel
 “ quod faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod
 “ rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus ipso BF, FE dato, quam in ratione; quoniam igitur datum minus est rectangulo AF, FC a quo auferendum est, idem minus erit quadrato ex dimidio rectae AC; quare ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, sitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; et quoniam aequales sunt rectae AH, GC, et est punctum F inter H et G, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo AG, GC una cum ipso HF, FG; igitur a rectangulo AF, FC ablato dato, rectangulo scilicet AG, GC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG habet, ex hypothesis, datam rationem ad rectangulum BF, FE. Primò, cadant puncta E, B inter puncta H, G, vel H, G inter ipsa E, B; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E,

A H E F B G C
 —————

A H E F B G C
 —————

A E H F G B C
 —————

B, G in primo casu, vel E, H, G, B in altero, ad invenien-
dum quintum F inter puncta media quod faciet rectangulum
a segmentis inter ipsum et puncta extrema ad rectangulum a
segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta in data ratione,
quod fiet ope Prop. 59. Secundò,

cadat punctum B inter H, G, punc-
tum vero E in ipsum H; et quoni-
am data est ratio rectanguli HF, FG,
five EF, FG ad ipsum BF, FE, data
erit ratio rectae FG ad ipsam FB, et
data est recta BG, datum igitur est

A H F B G C

E

A H E F G C

B

punctum F. Et similiter invenietur punctum F in casu in quo
punctum B cadit in punctum G. Tertiò, cadat punctum B
inter H, G, punctum vero E inter A, H puncta; et quoniam

data est ratio rectanguli HF, FG ad
ipsum BF, FE, data erunt in recta
linea quatuor puncta E, H, B, G
ad invenendum quintum F inter

A E H F B G C

puncta media H, B quod faciet rationem rectanguli HF, FG
a segmentis inter ipsum et punctum extremum G medium-
que H quod ab ipso G remotius est ad rectangulum BF, FE a
segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B in ratione data,
quod fiet ope Prop. 58. Quartò, cadat punctum E inter H,

G puncta, punctum vero B cadat
inter G, C; et quoniam data est ra-
tio rectanguli HF, FG ad ipsum BF,

A H E F G B C

FE, data erunt in recta linea qua-
tuor puncta H, E, G, B ad invenendum quintum F inter puncta
media E, G quod faciet rationem rectanguli HF, FG a seg-

mentis inter ipsum et punctum extremum H mediumque G ab ipso H remotius ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta B, E, quod fiet ope ejusdem Prop. 58.

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipso BF, FE dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, fitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; et quoniam aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter A et C, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est simul cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypothesi, datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F inter puncta media E, B quod faciet rationem rectanguli HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 59.

H A E F B C G

PARS 3. Denique fit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale deficiens quadrato, fitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; et quoniam aequales sunt AH, GC, et

A H G E F B C

est punctum F inter G et C, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo AG, GC, hoc est dato; rectangulum igitur HF, FG est id ad quod rectangulum BF, FE datam, ex hypothese, habet rationem. Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C, et data erunt in recta linea quatuor puncta H, G, E, B ad inveniendum quintum F in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad eas partes ipsius F ad quas sunt puncta media G, E, punctumque medium G quod ipsi H propius est ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum F et reliqua puncta data in ratione data, quod fiet ope Prop. 62. Secundò, sit punctum B inter ipsa G, C, punctum vero E in ipso G; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FE ad ipsum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, quare datum erit punctum F. Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter H et G; et quoniam, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale est dato, rectangulo scilicet AG, GC, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum inter G et B quintum F quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad eas partes ipsius F ad quas sunt puncta media E, G mediumque

A H G E F B C

A H E F B C

 G

A H E G F B C

G ab ipso H remotius ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 61. Quartò, cadat punctum E in ipsum H, et datum ostendetur punctum F, ut in articulo secundo praecedente. Quintò, sit punctum E inter A et H, et data erunt in recta linea quatuor puncta E, H, G, B ad inveniendum quintum F in segmento extremo GB quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 60.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum quadrato ex FG aequale dato, quadrato scilicet ex GC; quadratum igitur ex FG est id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem. Primò, sit punctum E inter G et B; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum BF, FE inter ipsum et ea puncta ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum extremum G quod est ad easdem partes ipsius F ad quas est medium E in data ratione, quod fiet ope Prop. 53. Secundò, sit punctum E in G; et quoniam data est ratio rectanguli BF, FE ad quadratum ex FG, five FE, data erit ratio rectae BF ad ipsam FE, et data est recta BE, datum igitur erit punctum F. Tertiò,

A E H G F B C

A G E F B C

A G F B C
 E

fit punctum E inter A et G; et quoniam data est ratio rectanguli BF, FE ad quadratum ex FG, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad inveniendum quartum F inter G et B quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 52.

A E G F B C

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio rectae AC; fit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; et quoniam rectangulum AF, FC simul cum quadratis ex GF, GH aequale est quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, hoc est dato, erit quadratum ex GF una cum quadrato ex GH id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem; et

A G E H F B C

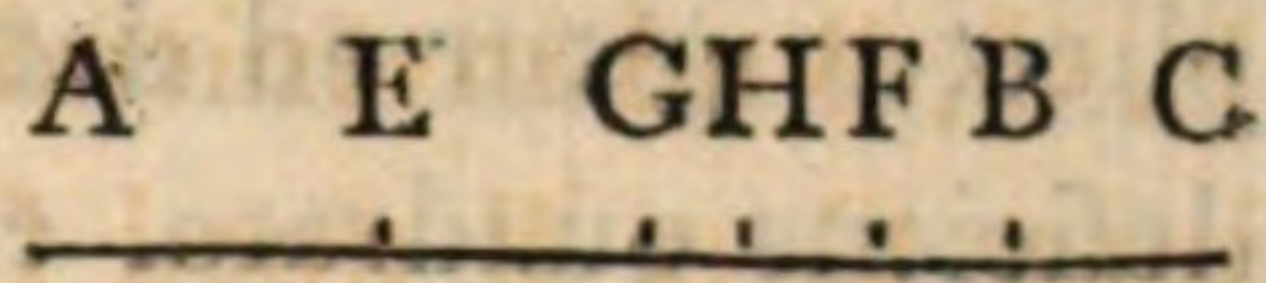
quoniam datum est quadratum ex GH, erit quadratum ex GF minus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione, et propterea rectangulum BF, FE, per 14. Dat. majus erit quadrato ex FG dato, quam in ratione. Primò, fit punctum E inter G, B puncta, et data erunt in recta linea tria puncta G, E, B ad inveniendum quartum F inter E et B quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta E, B majus quadrato ex FG dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop.

80. Secundò, cadat punctum E in ipsum G, et data erunt duo puncta E, B ad inveniendum tertium F inter ea quod faciet rectangulum BF, FE majus quadrato ex FE, five

A G H F B C

 E

FG dato, quam in ratione, quod fiet ope Cor. Partis 1. Prop. 80. Tertiò, cadat E inter puncta A, G, et data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad invenien-
 dum quartum F inter G et B quod fa-
 ciet rectangulum BF, FE a segmentis
 inter ipsum et puncta extrema E, B
 majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et reliquum
 punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1.
 Prop. 79.



LIB. IV. PROB. II.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis quintum invenire
 “ in altero ex segmentis extremis quod faciet rectangulum a
 “ segmentis inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis ma-
 “ jus, aut minus rectangulo a segmentis inter ipsum et reli-
 “ qua duo puncta data dato, quam in ratione, vel quod fa-
 “ ciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod rect-
 “ angulum hoc datam habet rationem.”

PROP. LXXXVII. PROB. II. EPITAGMA 1.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin-
 “ tum F invenire in altero ex segmentis extremis AE quod
 “ faciet rectangulum AF, FC a segmentis inter ipsum et punc-
 “ ta extrema A, C majus, aut minus rectangulo EF, FB a seg-
 “ mentis inter ipsum et reliqua puncta E, B dato, quam in
 “ ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
 “ eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; et quoniam datum minus est rectangulo AF, FC minus erit quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur igitur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, et sit G punctum applicationis quod propius est puncto C, et H alterum. Et quoniam aequales sunt rectae AH, GC, et est punctum F inter H et G, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo AG, GC una cum ipso HF, FG; ablato igitur dato rectangulo AG, GC ab ipso AF, FC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG est, ex hypothesi, id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, sint puncta E, B inter G, C, et data erunt quatuor puncta H, G, E, B in recta linea ad inveniendum quintum F inter H et G quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et punctum extremum B quod est ad easdem partes ipsius F ad quas sunt puncta media G, E et punctum medium E quod ipsi B est propius in data ratione ad rectangulum HF, FG a segmentis inter idem punctum F et duo reliqua puncta H, G, quod fiet ope Prop. 62. Secundò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E cadat in ipsum G; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FE ad ipsum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, quare datum erit punctum F. Et similiter invenietur punctum F si B cadat in G, vel E in H. Tertiò, cadat punctum B inter G et C, et punctum E inter H et G; data igitur erunt in recta li-

A H F G E B C

A H F E B C

 G

A H F E G B C

A H F E B G C

H A F E B C G

quintum F in segmento extremo HE quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 60.

PARS 3. Denique sit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem.

CAS. I. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur igitur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, fitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; et quoniam aequales sunt AH, GC, et est punctum F inter G et C, (quoniam datum rectangulum AG, GC majus est ipso AF, FC,) erit, per Prop. 23. Lib. 7.

A H G F E B C

Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo AG, GC, hoc est dato; igitur rectangulum HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C; data igitur sunt in recta linea quatuor puncta H, G, E, B ad inveniendum quintum F inter puncta media G, E quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G quae sunt ad easdem ejus partes in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 57. Vel poterit punctum F inveniri inter A et H, et tum data erunt quatuor puncta H, G, E, B ad inveniendum quintum F extra ipsa ad partes H quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter

A F H G E B C

ipsum et duo puncta H, G ipsi propiora ad rectangulum EF, FB inter ipsum et reliqua duo puncta in data ratione, quod fiet ope Prop. 63. Secundò, sit punctum B inter G et C, et punctum E inter H et G; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum EF, FB, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum extra ipsa ad partes H quintum F quod faciet rationem rectanguli HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum H ipsi proximum mediumque G ab ipso remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta, quod fiet ope Prop.

$$\begin{array}{ccccccc} A & F & H & E & G & B & C \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

64. Tertiò, sit punctum B inter G, C, et punctum E in H; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG, siue EF, FG ad ipsum EF, FB, data erit ratio rectae FG ad ipsam FB, et data est recta GB, datum igitur est punctum F. Et similiter invenietur punctum F si punctum B cadat in H, aut in G. Quartò, sint puncta

$$\begin{array}{ccccccc} A & F & H & & G & B & C \\ \hline & & & E & & & \end{array}$$

E, B inter ipsa H, G; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum EF, FB, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, B, G ad inveniendum quintum

$$\begin{array}{ccccccc} A & F & E & H & G & & C \\ \hline & & & & & B & \end{array}$$

F extra ipsa ad partes H quod faciet rectangulum HF, FG a seg-

$$\begin{array}{ccccccc} A & F & H & E & B & G & C \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

mentis inter ipsum et puncta extrema H, G in data ratione

ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta reliqua E, B, quod fiet ope Prop.

65. Et eodem modo invenietur punctum F si puncta H, G fuerint inter ipsa E, B. Quintò, sint puncta E, B, inter ipsa A, H, et data erunt in recta linea quatuor puncta E, B, H, G ad inveniendum quintum F extra ipsa ad partes E quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G ab ipso remotiora ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 63.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur sectâ AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum quadrato ex GF aequale quadrato ex GC, hoc est dato; quadratum igitur ex GF est id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, sint puncta E, B inter G et C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter G et E quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B quae sunt ad eadem ejus partes ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 51. Vel potest inveniri F inter A et G; in quo casu data erunt in recta linea tria puncta G, E, B ad inveniendum quartum F extra ipsa

A F E H G B C

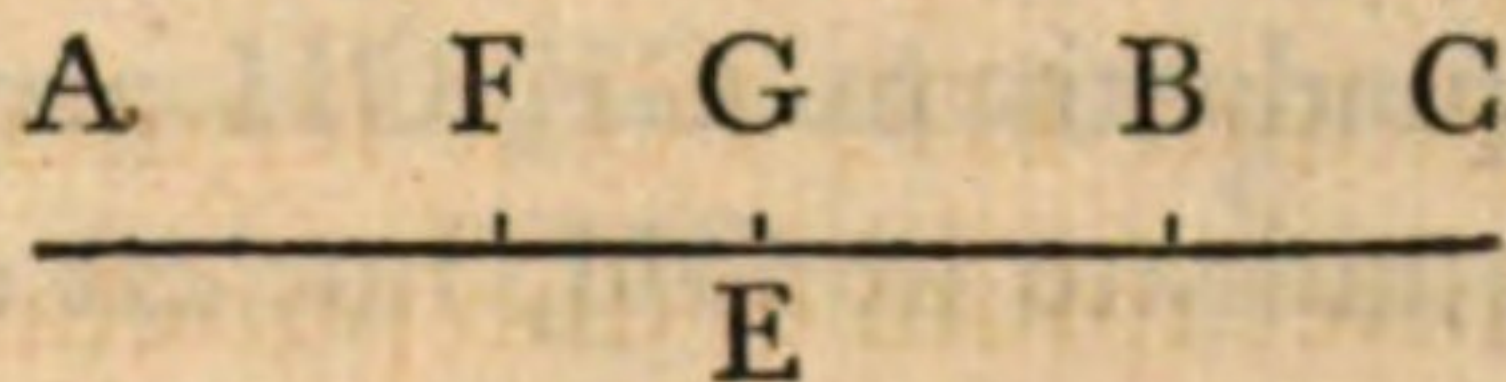
A F E B H G C

A G F E B C

A F G E B C

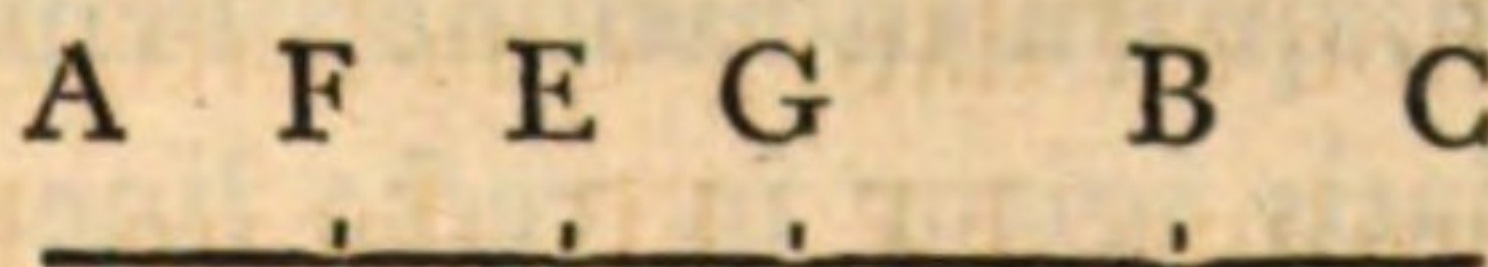
quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ab ipso remotiora in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 54. in qua ostenditur puncta ipsi G propiora, ut F, facere majorem rationem rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora, ut A; debet igitur data ratio rectanguli EF, FB ad quadratum ex FG major esse ratione rectanguli EA, AB ad quadratum

ex AG. Secundò, fit punctum B inter G et C, punctum vero E in



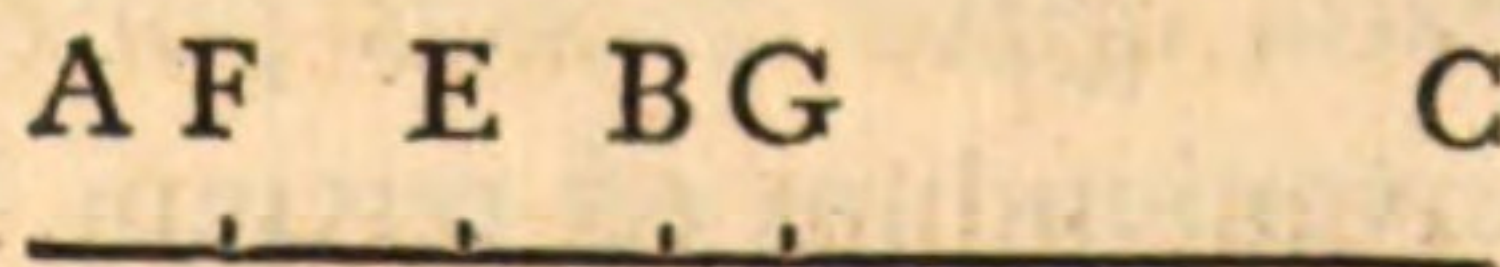
G; quoniam igitur data est ratio rectanguli EF, FB, hoc est GF, FB ad quadratum ex FG, data erit ratio rectae FB ad ipsam FG, et data est recta GB, datum igitur est punctum F. Tertiò, fit punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; quoniam igitur data est ratio rectanguli EF, FB ad quadratum

ex FG, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B et invenien-



dum est quartum F extra ipsa ad partes E quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad quadratum ex segmento FG inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 56. Quartò, sint puncta E, B inter ipsa A, G; datis igitur in recta linea tribus

punctis E, B, G invenendum est quartum F extra ipsa quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis



inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum reli-

quum G, quod fiet ope Prop. 55. in qua ostenditur puncta ipsi E propiora, ut F, minorem facere rationem rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora, ut A; igitur ratio data rectanguli EF, FB ad quadratum ex FG minor debet esse ratione rectanguli EA, AB ad quadratum ex AG.

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio ipsius AC; fit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; et quoniam rectangulum AF, FC simul cum quadratis ex GF, GH aequale est quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, hoc est dato, erit

quadratum ex GF una cum eo ex $\text{A} \quad \text{GHFEBC}$
 GH id ad quod rectangulum EF, -----
 FB datam habet rationem; et da-

tum est quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF minus est rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; quare, per Prop.

14. Dat. rectangulum EF, FB majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione. Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B invenendum est quartum F inter G et E quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B quae sunt ad easdem ejus partes majus quadrato ex GF segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 78. partis scilicet ejus 1. Secundò, fit punctum B inter G et C, punctum vero E in G;

dati igitur duobus punctis G, B $\text{A} \quad \text{F} \quad \text{GH} \quad \text{B} \quad \text{C}$
 invenendum est tertium F in BG -----
 E
 producta quod faciet rectangulum

EF, FB, five GF, FB, majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et punctum G ei propius dato, quam in ratione, quod

fiet ope Cor. Caf. 3. Part. 1. Prop. 81. Tertiò, fit punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; quoniam igitur rectangulum EF, FB majus est

quadrato ex GF dato, quam in ratione, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad inveniendum

A F E G H B C

quartum F in BE producta quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B majus quadrato ex FG inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1. Prop. 83. Quartò, fit punctum B in G, punctum vero E inter A et G; et quoniam rectangulum EF, FB majus est quadrato

A F E G H C

B

ex FG, five FB dato, quam in ratione; datis duobus punctis E, B inveniendum est tertium F in BE producta, quod hoc efficiet; fiet vero ope Cor. Partis 1. Prop. 83. Quintò, sint puncta E, B inter ipsa A, G; datis igitur in recta linea tribus punctis

E, B, G inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes E quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora majus

A F E B G H C

quadrato ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1. Prop. 82.

PROP. LXXXVIII. PROB. II. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
 “ tum F invenire in altero ex segmentis extremis CB quod
 “ faciet rectangulum AF, FC a segmentis inter ipsum et punc-
 “ tum extremum A quod est ad easdem ejus partes ad quas
 “ sunt puncta media E, C punctumque medium C ab A re-
 “ motius majus, aut minus rectangulo EF, FB a segmentis
 “ inter ipsum et puncta reliqua E, B dato, quam in ratione,
 “ vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad
 “ quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus ipso EF, FB dato, quam in ratione ; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, fitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum. Est autem datum, rectangulum scilicet AG, GC minus ipso AF, FC a quo auferendum est ; quare cadet punctum G inter C et F ; et
 quoniam aequales sunt HA, CG, H A E C G F B
 et est punctum F in CG producta,
 erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo HF, FG una cum ipso AG, GC ; igitur ablato dato, rectangulo scilicet AG, GC ab ipso AF, FC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypothese, habet rationem. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum est quintum F in segmento extremo GB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad

easdem ejus partes ad quas sunt puncta media E, G punctumque medium G ab H remotius ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta reliqua E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 61.

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipso EF, FB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur igitur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, fitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt AH, GC, et est punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est

A H G E C F B

simul cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea est id ad quod, ex hypothese, rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, fit punctum E inter G et C; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad easdem ejus partes ad quas sunt puncta media G, E punctumque medium G quod ipsi H est propius, in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum F et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope

Prop. 62. Secundò, fit punctum E in G; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, five HF,

A H G C F B

E

FE ad ipsum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F. Tertiò, fit punctum E inter H et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum est quintum F in segmento extremo GB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad easdem ejus partes ad quas sunt puncta media E, G punctumque medium G quod ab ipso H est remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 61. Quartò, fit punctum E inter A, H puncta; datis igitur in recta linea quatuor punctis E, H, G, B inveniendum est quintum F in segmento extremo GB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta media H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B, quod fiet ope Prop. 60.

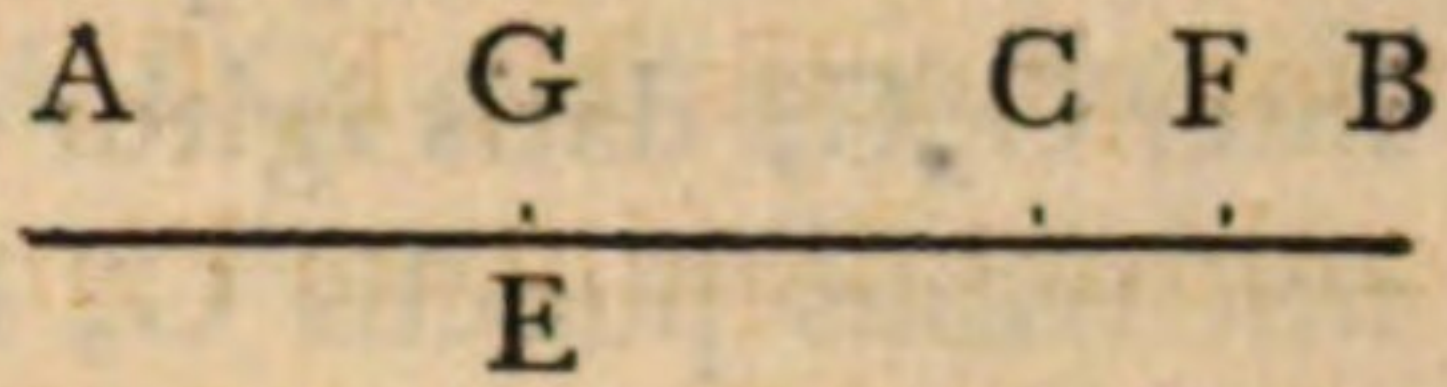
A H E G C F B

A E H G C F B

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB. Primò, fit punctum E inter G et C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta E, B ad quadratum ex FG

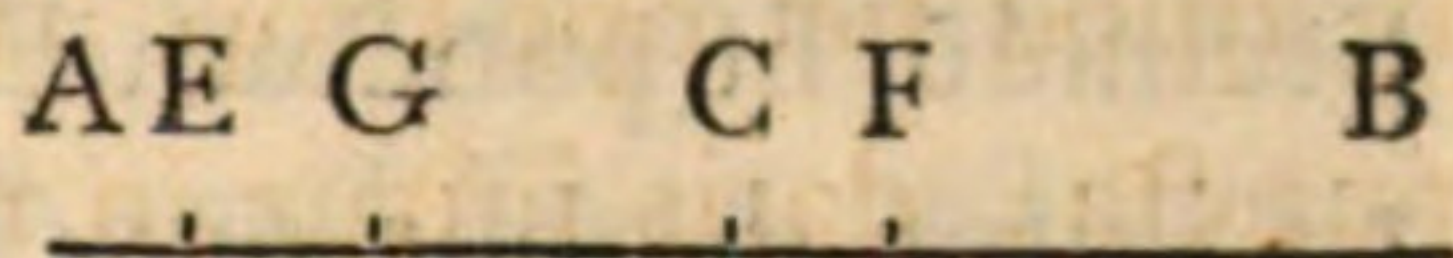
A G E C F B

segmento inter ipsum et punctum extremum G quod est ad eandem ejus partes ad quas est punctum medium E in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. Secundo, fit punctum E in G; datis igitur in recta linea duobus punctis G, B inveniendum est tertium F



inter ipsa quod faciet rectangulum EF, FB, five GF, FB ad quadratum ex GF in data ratione; data igitur est ratio rectae FB ad ipsam GF, et data est GB, igitur datum est punctum F.

Tertiò, fit punctum E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quartum F inter G et B

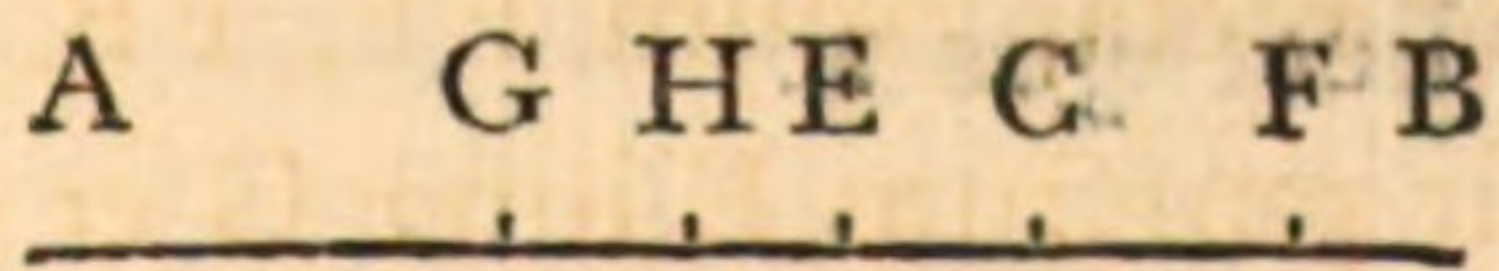


quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta ex-

trema E, B in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G, quod fiet ope Prop. 52. in qua ostenditur puncta ipsi G propiora majorem facere rationem rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora; ratio igitur data rectanguli EF, FB ad quadratum ex FG minor debet esse ratione rectanguli EC, CB ad quadratum ex CG.

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio ipsius AC; fit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; est igitur rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC una cum

eo ex GH aequale quadrato ex GF una cum quadrato ex GH quae simul propterea datam habent ra-



tionem ad rectangulum EF, FB, ex hypothesi; et quoniam datum est quadratum ex GH, erit quadratum ex GF mi-

nus rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; et propterea, per Prop. 14. Dat. rectangulum EF, FB majus erit quadrato ex FG dato, quam in ratione. Primò, fit punctum E inter G, C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB

$$\begin{array}{ccccccc} A & & G & H & E & C & F & B \\ \hline & & | & | & | & | & | & \end{array}$$

a segmentis inter ipsum et puncta E, B majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et extremum G quod est ad eadem partes ipsius F ad quas est punctum medium E dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 80. ejus scilicet partis 2.

Secundò, fit punctum E in G; datis igitur duobus punctis E, B inveniendum est tertium F inter ipsa quod faciet rectangulum EF, FB

$$\begin{array}{ccccccc} A & & G & H & & C & F & B \\ \hline & & & & E & & & \end{array}$$

majus quadrato ex FG, five FE dato, quam in ratione, quod fiet ope Cor. Partis 2. ejusdem Prop. 80. Tertiò, fit punctum

E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quartum F inter G

$$\begin{array}{ccccccc} A & & E & G & H & & C & F & B \\ \hline & & | & | & | & & | & | & \end{array}$$

et B quod faciet rectangulum EF,

FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et punctum reliquum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 79. Partis scilicet ejus 1.

PARS 3. Denique fit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale ex-

cedens quadrato, fitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; et quoniam datum rectangulum scilicet AG, GC majus est ipso AF, FC cadet punctum F inter C et G. Aequales autem sunt rectae HA, CG, et est punctum F inter C et G, igitur, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG

aequale est rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC; et propterea est rect-

H A E C F B G

angulum HF, FG id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, fit punctum G in AB producta; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F in segmento medio EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 59. Secundo, cadat punctum G in ipsum B;

et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FB ad ipsum EF, FB, data erit ratio rectae

H A E C F G

B

HF ad ipsam FE, et data est recta HE, datum igitur est punctum F. Tertiò, fit punctum G inter C et B; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E,

G, B inveniendum est quintum F in segmento medio EG quod faciet rectangulum HF, FG a seg-

H A E C F G B

mentis inter ipsum et punctum extremum H punctumque medium G quod est ad contrarias partes puncti F in data ra-

tione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, quod fiet per Prop. 58.

PROP. LXXXIX. PROB. II. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
 “ tum F invenire in altero ex segmentis extremis EB quod
 “ faciet rectangulum AF, FC a segmentis inter ipsum et punc-
 “ tum extremum A quod est ad easdem ejus partes ad quas
 “ sunt puncta media C, E punctumque medium C quod ipsi
 “ A est propius majus, aut minus rectangulo EF, FB a seg-
 “ mentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B dato, quam
 “ in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul
 “ cum eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus ipso EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F in CG producta, (rectangulum enim AG, GC, datum scilicet quod ab ipso AF, FC auferendum est, minus est quam

AF, FC,) erit, per Prop. 24. Lib. 7. $\text{H} \quad \text{A} \text{C} \text{E} \text{G} \text{F} \text{B}$
 Pappi, rectangulum AF, FC aequale -----
 rectangulo HF, FG una cum ipso

AG, GC; ablato igitur dato, rectangulo scilicet AG, GC ab ipso AF, FC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypothesi, habet rationem. Primò, sit punctum G in AE producta; datis igitur in

recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum est quintum F in segmento extremo GB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad easdem ejus partes ad quas sunt puncta media E, G, punctumque medium G ab ipso H remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 61. Se-

cundò, cadat punctum G in ipsum $\text{H} \quad \text{A} \quad \text{C} \quad \text{G} \quad \text{F} \quad \text{B}$
 E

E; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FE ad ipsum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F. Tertiò, sit punctum G inter C et E; data igitur sunt quatuor puncta H, G, E, B in recta linea ad inveniendum quintum F in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod

est ad easdem ejus partes ad quas sunt puncta media G, E punctumque medium G quod ipsi H est propius in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 62.

$\text{H} \quad \text{A} \quad \text{C} \quad \text{G} \quad \text{E} \quad \text{F} \quad \text{B}$

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipso EF, FB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, fitque G punctum applicationis quod ipsi C est propius, et H alterum. Quoniam igitur ae-

quales sunt AH, GC, et est punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est simul cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG,

quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB. Datis igitur in recta linea

A H G C E F B

quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad easdem ejus partes ad quas sunt puncta media G, E punctumque medium G quod ipsi H est propius, in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 62.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC, aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB.

Datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et ea puncta

A G C E F B

in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum extremum G, quod est ad easdem ejus partes ad quas est punctum medium E, quod fiet ope Prop. 53.

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio rectae AC; sit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, rectangulum igitur AF, FC una cum quadratis

ex GC, GH, hoc est quadratum ex GF una cum quadrato ex GH habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum EF, FB; et datum est quadratum ex GH, quadratum igitur ex FG minus est rectangulo EF, FB

dato, quam in ratione, et propterea rectangulum EF, FB, per 14.

A G H C E F B

Dat. majus est quadrato ex FG dato, quam in ratione.

Datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta E, B, majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et extremum G quod est ad easdem partes ipsius F ad quas est punctum medium E dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1. Prop. 80.

PARS 3. Denique sit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et sit G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter C et G, minus enim est rectangulum AF, FC ipso AG, GC a quo auferendum est, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC;

H A C E F B G

rectangulum igitur HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam habet, ex hypothesi, rationem. Primò, fit G in AB producta; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F in segmento medio EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extre-

ma H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta reliqua E, B, quod fiet ope Prop. 59. Secundò, cadat punctum G in ipsum B; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FB ad ipsum EF, FB, data erit ratio

$$\begin{array}{ccccccc} H & & A & & C & E & F & B \\ \hline & & & & & & & G \end{array}$$
rectae HF ad ipsam FE, et data est recta HE, datum igitur est punctum F. Tertiò, sit punctum G inter E et B; et quoniam est punctum G inter F et B, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F in segmento medio EG quod

$$\begin{array}{ccccccc} H & & A & & C & E & F & G & B \\ \hline & & & & & & & & \end{array}$$
faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H et punctum medium G quod est ad contrarias partes ipsius F ad quas est H, in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 58.

LIB. IV. PROB. III.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis invenire quintum
 “ extra ipsa ad utraque partes quod faciet rectangulum a
 “ segmentis inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis ma-
 “ jus, aut minus rectangulo a segmentis inter ipsum et duo
 “ reliqua puncta dato, quam in ratione, vel quod faciet rect-
 “ angulum illud datum simul cum eo ad quod rectangulum
 “ hoc datam habet rationem.”

PROP. XC PROB. III. EPITAGMA I.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
 “ tum F invenire extra ipsa ad partes B quod faciet rectan-

“ gulum AF, FC a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C
 “ ab ipso remotissima majus, aut minus rectangulo EF, FB a
 “ segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta dato, quam in
 “ ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
 “ eo ad quod rectangulum hoc habet datam rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus ipso EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; et quoniam aequales sunt HA, CG, et est punctum F in CG producta, erit rectangulum AF, FC aequale rectangulo HF, FG una cum ipso AG, GC; ablato igitur dato, rectangulo scilicet AG, GC ab ipso AF, FC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypothesi, habet rationem. Primò, sint puncta

E, B inter G et F; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F

H A C G E B F
 —————

extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G ab eo remotissima in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 63.

Secundò, sit punctum B inter G et

F, punctum vero E in G; et quo-

H A C G B F
 —————
 E

niam data est ratio rectanguli HF, FG, sive HF, FE ad ipsum EF, FB,

data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F. Et similiter inveniatur punctum F quando B est in G. Tertiò, sit punctum B inter G et F,

punctum vero E inter C et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H

H A C E G B F

ab ipso remotissimum punctumque medium B ipsi propius in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 64. Quartò, sint puncta E, B inter C et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes G quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 65.

H A C E B G F

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipso EF, FB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato deficiens quadrato, sitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt AH, GC, et est punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC una cum ipso HC, CG, hoc est una cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypothese, datam habet ratio-

A H G C E B F

nem ad rectangulum EF, FB. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta ab ipso remotissima H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 63.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC una cum dato quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypothefi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum reliquum G in data ratione, quod fiet ope Prop. 55.

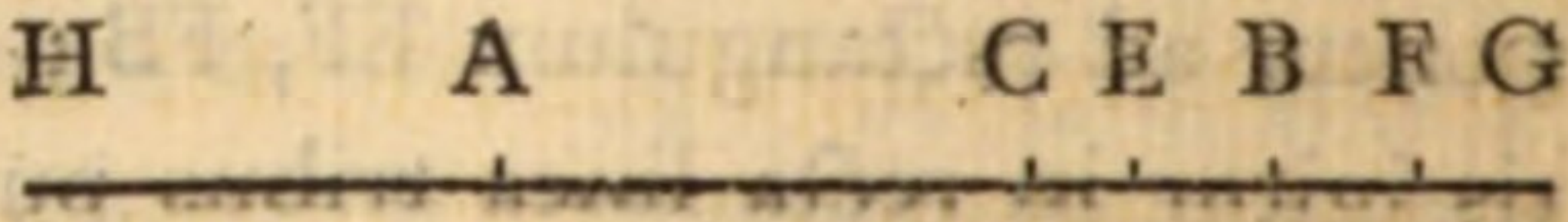
A G C E B F

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio rectae AC; fit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, et rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC una cum eo ex GH, aequale erit quadrato ex GF una cum quadrato ex GH, quae propterea simul datam habent, ex hypothefi, rationem ad rectangulum EF, FB; igitur quadratum ex GF minus est rectangulo EF, FB dato, quam in ratione, et propterea rectangulum EF, FB majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione [14. Dat.] Datis igitur in recta linea tribus punc-

A G H C E B F

tis G, E, B inveniendum est quantum F in GB producta quod hoc efficiet, quod fiet ope Partis 1. Prop. 82.

PARS 3. Denique fit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, fitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; et quoniam rectangulum AG, GC majus est ipso AF, FC erit punctum G in AF producta; et quia aequales sunt HA,

CG, et est punctum F inter C et G, erit, per

 Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC; rectangulum igitur HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypothesi, habet rationem. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quantum F in segmento extremo BG quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 60.

PROP. XCI. PROB. III. EPITAGMA 2.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
 “ tum F invenire extra ipsa ad partes B quod faciet rectan-
 “ gulum AF, FC a segmentis inter ipsum et punctum A ab
 “ ipso remotissimum punctumque medium C quod ipsi F pro-

“pius est majus, aut minus rectangulo EF, FB a segmentis
 “inter ipsum et puncta duo reliqua E, B dato, quam in ra-
 “tione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
 “eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus ipso EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F in CG producta, est enim rectangulum AF, FC majus ipso AG, GC quod ab eo auferendum est, erit rectangulum AF, FC aequale, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulo HF, FG una cum ipso AG, GC; igitur ablato dato, rectangulo scilicet

H A E C B G F
 —————

AG, GC ab ipso AF, FC, erit reliquum, rectangulum scilicet HF, FG id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypothese, habet rationem. Primò, sit punctum G inter B et F; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes G quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 65. Secundò, ca-

dat punctum G in ipsum B; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FB ad ipsum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipsam FE, et data est recta HE, quare datum est punctum F. Tertiò, cadat punctum G inter C

H A E C G F
 —————
 B

et B; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B
inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes B quod fa-
ciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum H ab ipso
remotissimum punctumque medium H A E C G B F
G ab H remotius in data ratione ad
rectangulum EF, FB a segmentis inter F et reliqua duo punc-
ta E, B, quod fiet ope Prop. 64.

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipso EF, FB dato,
quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rec-
tae AC; applicetur ad datam rectam AC rectangulum dato
aequale deficiens quadrato, fitque G punctum applicationis
quod propius est ipsi C, et H alterum; et quoniam aequales
sunt rectae AH, GC, et est punctum F in GC producta, erit
rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est simul
cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale, per Prop. 24.
Lib. 7. Pappi, rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypo-
thesi, datam habebit rationem ad rectangulum EF, FB. Primò,
fit punctum E inter puncta G, C; da-
tis igitur in recta linea quatuor punc- A H G E C B F
tis H, G, E, B inveniendum est quin-
tum F extra ipsa ad partes B quod fa-
ciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo
puncta H, G ab ipso remotissima in data ratione ad rectan-
gulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta
E, B, quod fiet ope Prop. 63. Secundò, fit punctum E in
ipso G; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, five

HF, FE ad ipsum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F; et similiter invenietur F si punctum E cadat in H. Tertiò, sit punctum E inter H et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum H ab ipso remotissimum punctumque medium G ab H remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 64. Quartò, sit punctum E inter A et H; datis igitur in recta linea quatuor punctis E, H, G, B inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 65.

A H G C B F
E

A H E G C B F

A E H C G B F

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypothesis, datam habebit rationem ad rectangulum EF, FB. Primò, sit punctum E inter G et C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum

A G E C B F

F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G, quod fiet ope Prop. 55. Secundo, fit punctum E in ipso G; quoniam igitur data

est ratio rectanguli EF, FB ad quadratum ex GF, five EF, data erit ratio rectae BF ad ipsam FE, et data

A G C B F
 E

est recta EB, quare datum est punctum F. Tertiò, fit punctum E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quartum

F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum reliquum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 56.

A E G C B F

CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio ipsius AC; fit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; igitur rectangulum AF, FC una cum dato, quadrato scilicet ex GC simul cum eo ex GH, hoc est quadratum ex GF una cum eo ex GH datam, ex hypothese, habet rationem ad rectangulum EF, FB; et datum est quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF

minus est rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; et propterea, per Prop. 14. Dat. rectangulum EF, FB

A G H E C B F

majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione. Primò, fit punctum E inter G et C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes B

quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta E, B ipsi propiora majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 82.

A G H C B F
 E

Secundò, cadat punctum E in ipsum G; igitur rectangulum EF, FB majus est quadrato ex FG, five FE dato, quam in ratione; et punctum F, quod hoc efficiet, invenietur per Cor. Partis 1. Prop. 83.

Tertiò, sit punctum E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B invenendum est quartum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema E, B majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 83.

A E G H C B F

PARS 3. Denique datum sit rectangulum AF, FC simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato excedens quadrato, fitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter C et G, rectangulum enim AF, FC minus est dato rectangulo AG, GC, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC; quare rectangulum HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam habet ra-

H A E C B F G

tionem, ex hypothesi. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F in segmento extremo BG quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema H, G ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 60.

PROP. XCII. PROB. III. EPITAGMA 3.

“ DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin-
 “ tum F invenire extra ipsa ad partes C quod faciet rectan-
 “ gulum AF, FC a segmentis inter ipsum et duo puncta ex-
 “ trema A, C majus, aut minus rectangulo EF, FB a segmen-
 “ tis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B dato, quam in
 “ ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum
 “ eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem.”

PARS I. Sit rectangulum AF, FC majus ipso EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato excedens quadrato, fitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F in CG producta, rectangulum enim AF, FC majus est ipso AG, GC quod ab eo auferendum est, erit, per Prop. 24. Lib. 7.

H A E B C G F
 —————

Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo HF, FG una cum ipso AG, GC; ablato igitur dato, rectangulo scilicet AG, GC ab ipso AF, FC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG ad rectangulum EF, FB datam, ex hypothesi, habet rationem. Datis igitur in recta linea qua-

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipso EF, FB dato,
quam in ratione.

C A S. I. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato deficiens quadrato, fitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt AH, GC, et est punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est simul cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypothefi, datam habebit rationem ad rectangulum EF, FB. Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G ab ipso remotissima ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 63. in qua, ad finem ejus, ostenditur puncta propiora ipsi B majores facere rationes rectanguli HF, FG ad ipsum EF, FB quam puncta remotiora; igitur, quoniam punctum F debet esse in AC producta, ratio data rectanguli HF, FG ad ipsum EF, FB minor debet esse ratione rectanguli HC, CG ad ipsum EC, CB. Secundò, fit punctum

B inter G et C, punctum vero E cadat in ipsum G; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG, five HF, FE ad ipsum EF, FB, $\begin{array}{ccccccc} A & H & G & B & C & F \\ \hline & & E & & & \end{array}$ data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F. Similiter invenietur punctum F si B cadat in G, vel E aut B cadat in H. Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter H et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum est quintum F $\begin{array}{ccccccc} A & H & E & G & B & C & F \\ \hline & & & & & & \end{array}$ extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter F et punctum H ab ipso remotissimum punctumque medium G ipsi propius ad rectangulum EF, FB a segmentis inter idem punctum F et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 64. Quartò, sint puncta E, B inter ipsa H, G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes G quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter F et duo puncta extrema H, G ad rectangulum EF, FB a segmentis inter idem punctum F et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 65. Quintò, si punctum B sit inter G et C, punctum vero E inter A et H, solutio erit ut in articulo quarto praecedente. Sextò, si punctum B sit inter H, G puncta, punctum autem E inter ipsa A, H, solutio erit ut in articulo tertio praecedente. Et septimò, si puncta E, B fuerint inter A, H puncta, solutio erit ut in articulo primo praecedente.

CAS. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio

rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea datam, ex hypothesi, habebit rationem ad rectangulum EF, FB.

Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum

A G E B C F

est quartum F extra data puncta ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex GF segmento inter ipsum et reliquum punctum G, quod fiet ope Prop. 55.

Secundò, sit punctum B inter G, C,

punctum autem E in ipso G; et quoniam rectangulum EF, FB, hoc est

A G B C F

 E

GF, FB datam habet rationem ad

quadratum ex GF, recta FB datam habebit rationem ad ipsam GF, et data est recta GB, datum igitur est punctum F.

Similiter inveniatur punctum F si punctum B cadat in G.

Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum

A E G B C F

est quartum F extra ipsa ad partes

B quod faciet rectangulum EF, FB

a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B in data ratione ad quadratum ex FG, segmento inter ipsum et punctum reliquum G, quod fiet ope Prop.

56. Quartò, sint puncta E, B

A E B G C F

inter ipsa A, G; datis igitur in

recta linea tribus punctis E, B,

G inveniendum est quartum F extra data puncta ad partes G quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ab ipso remotiora ad quadratum ex GF segmento inter ipsum et punctum reliquum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 54.

Cas. 3. Quando datum majus est quadrato ex AG dimidio rectae AC; fit datum aequale quadrato ex AG una cum quadrato ex GH, igitur rectangulum AF, FC una cum dato, quadrato scilicet ex AG simul cum eo ex GH, hoc est quadratum ex GF una cum quadrato ex GH datam, ex hypothese, habet rationem ad rectangulum

EF, FB; et datum est quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF minus est rectangulo EF,

A G H E B C F
—————

FB dato, quam in ratione, et propterea, per Prop. 14. Dat. rectangulum EF, FB majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione. Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C; igitur datis in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora majus quadrato ex GF segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1.

Prop. 82. Secundò, fit punctum B inter G, C puncta, E autem fit in ipso G; datis igitur in recta

linea duobus punctis G, B inveniendum est tertium F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum GF, FB, hoc est EF,

A G H B C F
—————
 E

FB majus quadrato ex GF segmento inter ipsum et punctum remotius G dato, quam in ratione, quod fiet ope Cor. Part. 1.

Prop. 83. Et similiter inveniatur punctum F si B cadat in G, scilicet per Cor. Part. 1. Prop. 81. Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quantum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et punctum reliquum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 83. Quartò, sint puncta E, B inter ipsa A, G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, G inveniendum est quantum F extra ipsa ad partes G quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ab ipso remotiora majus quadrato ex GF segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 81.

A E G H C F
 B

A E G H B C F

A E B G H C F

PARS 3. Denique sit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Legatur demonstratio partis 3. Prop. 91. quae huic parti etiam convenit.

H A E B C F G

F I N I S.

R r

P R A E F A T I O

ROBERTI SIMSON, M.D.

D E

PORISMATIBUS

TRACTATUS;

Q U O

DOCTRINAM PORISMATUM SATIS EXPLICATAM,

ET IN POSTERUM AB OBLIVIONE TUTAM

FORE SPERAT AUCTOR.

R r 2

PREFATIO

ROBERTI SIMSON, M.D.

PORISMATIBUS

TRACTATUS;

DOCTRINAM PORISMATUM SATIS EXPLICATAM

ET IN POSTERUM AB OBLIVIONE TUTAM

FORE SPERAT AUCTOR

1753

P R A E F A T I O.

DE Porismatibus nihil, praeter ea quae Pappus servavit, apud Geometras veteres invenitur. Et Fermatius in var. Oper. Math. pag. 116. asserit, Recentiores ea ne vel nomine cognovisse, aut quid essent solummodo suspicatos fuisse. Invenio tamen ante Fermatium de iis explicandis et restituendis cogitasse Albertum Girardum, qui, in Trigonometria sua, Gallice scripta, et Hagae Comitum anno 1629 edita, post enumeratas formas figurarum rectilinearum quae quatuor, quinque, aut sex latera habent, haec addit, “ Le tout, quand
“ il n’y a que deux lignes qui passent par un point, comme
“ jadis estoient les Porismes d’Euclid, qui sont perdus, les-
“ quelles j’espere de mettre bien tost en lumiere, les ayant re-
“ stituez il y a quelques années en ça.” Et rursus, in Operibus Mathematicis Simonis Stevini, quae emendata et aucta edidit Girardus Lugd. Batav. anno 1634, postquam in pag. 459. dixerat Euclidem raro admodum usum fuisse ratione composita, subjungit, “ Mais il est a estimer qu’il en a plus
“ escrit en ses trois livres de Porismes qui sont perdus, les-
“ quelles, Dieu aidant, j’espere de mettre en lumiere, les ay-
“ ant inventez de nouveau.” Ex quibus patet Girardum, virum certe matheos haud vulgariter peritum, putasse se Porismata restituisset; nunquam tamen quae de iis scripserat edita fuerunt, et, ni forte in bibliotheca aliqua in Hollandia delitecant, pro deperditis sunt habenda. Ex primâ autem citatione videtur eum propositiones quasdam de figuris quadrilateris, aliisque, earumque affectionibus pro Porismatibus habuisse, et propterea eorum naturam non cognovisse.

Post Girardum Ismael Bullialdus, in Exercitatione sua Geometrica tertia, quae, una cum duabus prioribus, edita fuit Parisiis anno 1667, conatus est Porismata explicare; verum quamvis quaedam de iis a Fermatio acceperat, citat enim verba Fermatii, quae postea in renovata Porismatum doctrina inter opera ejus varia mathematica Tolosae anno 1679 impressa fuerunt; ea tamen Bullialdus enodare minime potuit. In hoc autem Fermatii libro, qui post mortem ejus editus fuit, habentur paucula, sed, ut videtur, omnia quae de Porismatum doctrina scriptis tradiderat. Ex quibus apparet soli viro huic sagacissimo aliquid de eorum natura a tempore quo vixit Pappus innotuisse. Cum autem fateatur se in abdita hujus materiae penetrasse nullo fere alio auxilio quam eo quod subministrarunt verba vitiosae definitionis quam Porismatis dedisse juniores Geometras merito culpat Pappus, Porisma scilicet esse quod hypothesei deficit a theoremate locali; certum est eum quid sint Porismata non fatis intellexisse. Etenim minime recte affirmat Fermatius definitionem hanc, Porismatis naturam specificè revelare, cum innumera sint Porismata quae ex theoremate locali nullo modo pendent, nihilque cum locis habent commune. Promittit quidem Fermatius, in eodem scripto, se totos tres Porismatum libros aliquando restitutum, et alia mirabilia et ignota (sunt ipsius verba) detecturum; verum nimis temere haec dicta sunt, multa enim sunt Euclidis Porismata quorum nec vola nec vestigium exstat; at Fermatius ne vel primum primi libri enucleavit, quod unicuique integrum servavit Pappus.

Non opus est referre quae de hac re habet Carolus Renaldinus in libro suo de Resolutione et Compositione Mathema-

tica, nullo enim modo cognitioni Porismatum inserviunt. Atque hi soli sunt auctores, quantum novi, qui Porismatum mentionem fecerunt, saltem qui ea aliquo modo explicare conati sunt. Et quamvis vir clariss. David Gregorius in praefatione sua Euclidis Operibus praefixa ratus fuerit “ non difficile futurum Porismata quodammodo restituere, ubi textus Graecus Pappi lucem aspexerit,” tamen collega ejus doctissimus Halleius, Gregorio in veterum Geometria non parum exercitior, post editum a se textum Graecum quantum potuit emendatum, ingenuè Pappi Porismatum descriptioni sequentia subjungit, “ Haecenus Porismatum descriptio nec mihi nec lectori profutura, neque aliter fieri potuit: tam ob defectum schematis cujus fit mentio; unde rectae satis multae, de quibus hic agitur, absque notis alphabeticis, ullove alio distinctionis charactere inter se confunduntur: quam ob omissa quaedam et transposita, vel aliter vitiata, in propositionis generalis expositione; unde quid sibi velit Pappus haud mihi datum est conjicere. Hisce adde dictionis modum nimis contractum, ac in re difficili, qualis haec est, minime usurpandum.”

Postquam vero apud Pappum legeram Porismata Euclidis collectionem fuisse artificiosissimam multarum rerum, quae spectant ad analyfin difficiliorum et generalium problematum, magno desiderio tenebar, aliquid de iis cognoscendi; quare saepius et multis variisque viis tum Pappi propositionem generalem, mancā et imperfectam, tum primum lib. i. Porisma, quod, ut dictum fuit, solum ex omnibus in tribus libris integrum adhuc manet, intelligere et restituere conabar; frustra tamen, nihil enim proficiebam. Cumque cogi-

tationes de hac re multum mihi temporis consumpserint, atque tandem molestae admodum evaserint, firmiter animum induxi haec nunquam in posterum investigare; praesertim cum optimus Geometra Halleius spem omnem de iis intelligendis abjecisset. Unde quoties menti occurrebant, toties eas arcebam. Postea tamen accidit, ut improvidum et propositi immemorem invaserint, meque detinuerint donec tandem lux quaedam effulserit quae spem mihi faciebat inveniendi saltem Pappi propositionem generalem, quam quidem multa investigatione tandem restitui. Haec autem paulo post una cum Porismate primo lib. i. impressa est inter Transactiones Philosophicas anni 1723. No. 177.

Quoniam autem eo tempore Porismatum naturam non satis perspectam habebam, lubet nunc eam explicatius tradere, ut hoc genus propositionum, et via qua investigantur, quae Geometras a tempore quo vixit Pappus hucusque latuerunt, Geometriae rursus reddantur, atque ei haud inutile incrementum afferant. Et quoniam Pappi descriptio Porismatum, non facile sine specimine eorum intelligenda est, ideo Porismata quaedam facilia praemittere visum est explanationi eorum quae Pappus affert; dein Pappi descriptioni subjungere quaedam Euclidis Porismata, ea scilicet quae ipsius esse, vel ex Pappi propositione generali, ejusve Porismatum descriptione, vel denique ope lemmatum ejus in Porismata, dijudicare valebam. Haec sequuntur quatuor Fermatii propositiones in formam Porismatum mutatas, reliqua enim ex ejus quinque est de Parabola, et eam in Prop. 19. lib. v. Sect. Conic. ed. 2. demonstravimus. Alia quaedam adjecta sunt quorum praecipua mihi proposuit, et aliquorum constructionem dedit exi-

mius Geometra Matthaeus Stewart in Academia Edinbur-
genfi Matheſeos Profeſſor, a quo materia haec jam egregie eſt
exculpta, poſtea, ut ſpero, multum excolenda.

His igitur doctrinam Porifmatum ſatis explicatam, et in
poſterum ab oblivione tutam fore ſperare liceat.

S s

and (consequently) the same in the same manner.

But the same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

The same is not true in the same manner.

PORISMATIBUS.

DEFINITIONES.

I. **T**HEOREMA est Propositio in qua aliquid proponitur demonstrandum.

II. Problema est Propositio in qua aliquid proponitur construendum, vel inveniendum.

III. Datum, five Propositio de datis, est Theorema in quo proponitur demonstrare aliquid datum esse (secundum Definitiones Datorum Euclidis) quod propositam quandam relationem habet ad ea quae ex hypothese data sunt.

Datum etiam in forma Problematis enuntiari potest, si nimirum ea quae data esse demonstranda sunt, invenienda proponantur. Quod si fiat, demonstratio Dati, ut Theorema propositi, Analysis erit Problematis; Compositio autem Analyfi respondens erit Constructio et Demonstratio Problematis.

Quoniam Pappi definitio Porismatis nimis generalis est, vice ejus sit haec, viz.

IV. Porisma est Propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt eandem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in Propositione descriptam.

Porisma etiam in forma Problematis enuntiari potest, si nimirum ea quae data demonstranda sunt, invenienda proponantur.

V. Locus est Propositio in qua propositum est datam esse demonstrare, vel invenire lineam aut superficiem cujus quodlibet punctum, vel superficiem in qua quaelibet linea data lege descripta, communem quandam habet proprietatem in Propositione descriptam.

Unde patet, quod Pappus affirmat, Locos speciem esse Porismatis; et communis affectio quae de punctis aut lineis hifce demonstranda proponitur, est ea omnia sita esse in una quadam linea aut superficie, quae quidem invenienda est.

Aliae autem propositiones in quibus proponitur aliquid demonstrare, aut invenire, praeter eas quae Data aut Porismata sunt, simpliciter Theoremata aut Problemata vocantur.

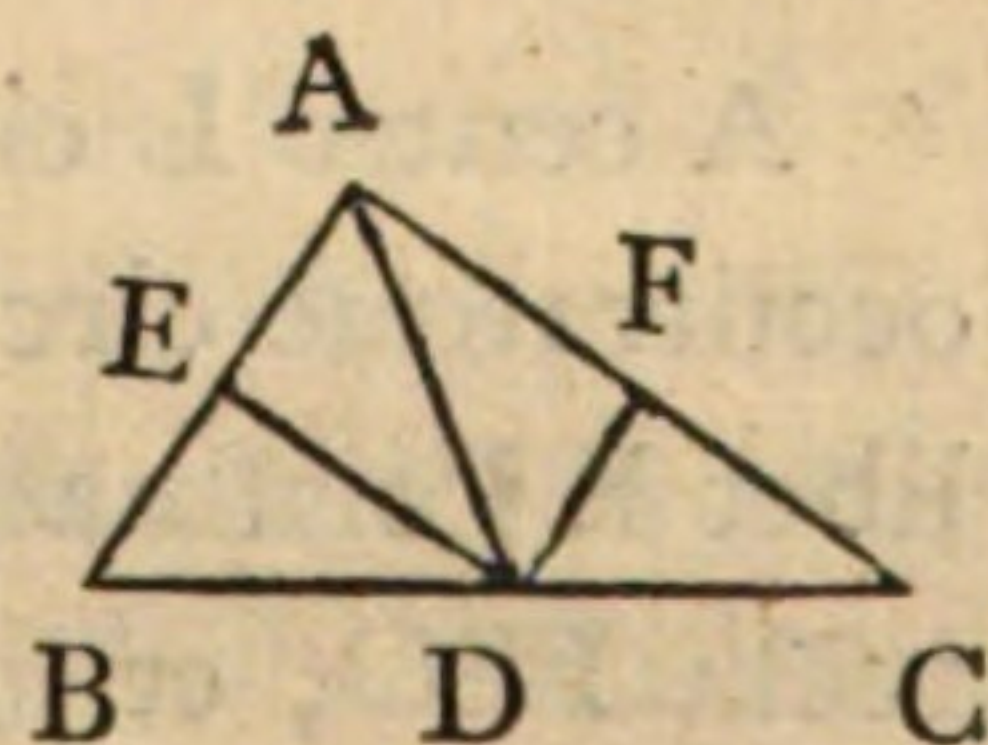
P R O P. I.

“**D**ATA positione recta AB, et circulo CD positione et
 “magnitudine dato, datum erit punctum per quod si duca-
 “tur utcunque recta linea quae rectae AB circuloque occur-
 “rat, datum erit rectangulum contentum segmentis ductae
 “inter punctum inveniendum, et puncta occurfus.”

L E M M A.

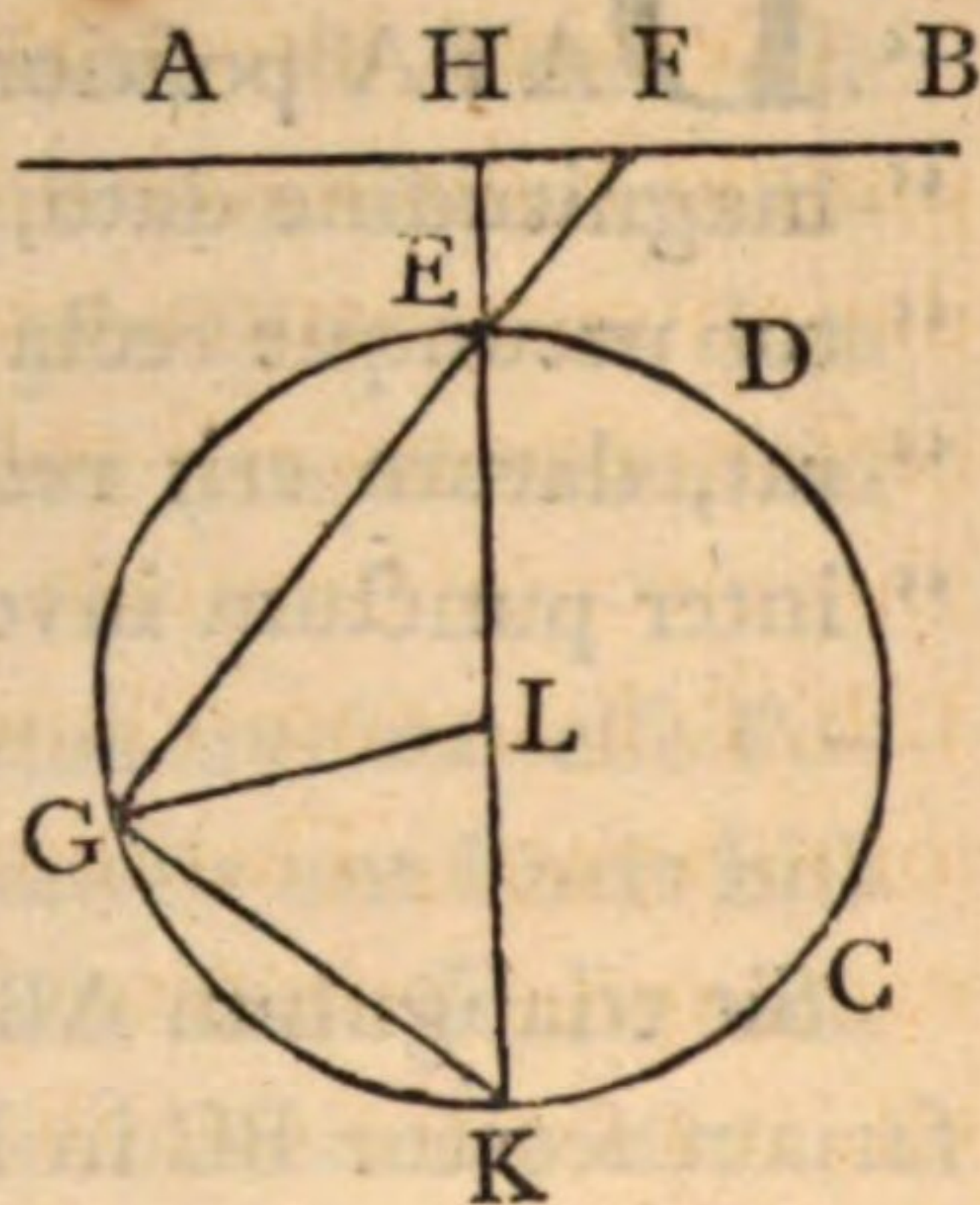
Sit triangulum ABC rectum habens angulum ad A, si bifariam secetur BC in D, et jungatur AD; erit BD aequalis ipsi DA. Est conversa partis primae 31. Prop. 3. Euclidis.

Ducatur enim DE parallela ipsi AC, et DF ipsi AB. Aequalis igitur est angulus DBE angulo CDF, ut et angulus BDE ipsi DCF, et aequalia sunt latera BD, DC quae aequalibus adjacent angulis; aequalis igitur est recta BE rectae DF, hoc est ipsi EA. Et in triangulis BED, DEA communis est DE, et anguli ad E recti, rectus enim est angulus ad A. Basis igitur BD aequalis est basi DA. Hoc etiam sequitur ex Cor. Pr. 5. Lib. 4. Eucl.



Sit jam E punctum in Porismate inveniendum, et ducta utcunque per E recta EF occurrat rectae AB in F, et circulo in G; igitur, ex hypothese, datum est rectangulum FE, EG. Ad AB ducatur perpendicularis EH, occurratque circumferentiae in K, et KG jungatur; igitur, rursus ex hypothese, datum est rectangulum HE, EK, quod propterea aequale est

rectangulo FE, EG. Ut igitur FE ad EH, ita est EK ad EG,
 * 6. 6. et sunt circa aequales angulos, quare ^a angulus KGE aequalis
 est angulo recto EHF. Bifariam se-
 cetur EK in L, et jungatur LG; est
^b Lem. igitur ^b LG aequalis ipsi LK. Simi-
 liter et omnes rectae a puncto L ad
 circumferentiam ductae eidem LK
 aequales ostendentur. Punctum igitur
 L centrum est circuli CD; et est
 LE ipsi LK aequalis, quare punctum
 E est in circumferentia circuli dati.



^c 6. Def. Dat. Datum autem est ^c punctum L, data
 igitur positione est recta LH, et data
 erunt E, H, K puncta; quare rectangulum HE, EK, et ipsi
 aequale FE, EG datum est.

Componetur ita.

A centro L circuli dati ducatur LH perpendicularis ad AB,
 occurratque circumferentiae in punctis E, K; horum utrum-
 libet E Porismati satisfaciet. Ducatur enim utcunque per E
 recta FEG, et jungatur GK; quoniam igitur angulus EGK
 in semicirculo aequalis est angulo recto EHF, aequiangula sunt
 triangula EGK, EHF; ut igitur GE ad EK, ita EH ad EF,
 et propterea rectangulum GE, EF aequale est rectangulo dato
 KE, EH.

In hoc Porismate punctum E datum ostendendum est, et
 res innumerae quae ad punctum E, datamque rectam AB, et
 datum circulum CD eandem habent relationem, sunt segmen-
 ta rectarum inter punctum E et rectam AB, et circulum CD.
 Communis autem affectio quam iisdem segmentis convenire

demonstranda proponitur, haec est, rectangulum ipsis contentum datum esse; quod rectangulum etiam inveniendum fuit.

Conversa hujus Porismatis est hic Locus, viz. Si a dato puncto E ducantur duae rectae lineae EF, EG in eadem recta, datum continentes spatium; tangat autem terminus F unius rectam lineam AB positione datam, tanget terminus G alterius circumferentiam positione datam. Qui Locus est Prop. 8. Lib. 1. Locorum Planorum Apollonii, qui Glasguae editi sunt anno 1749. Theorema autem ex hoc Loco manifeste derivatum, quod propterea Theorema Locale dixerunt veteres, hoc est, si a centro circuli L ad rectam AB ducatur perpendicularis LH circumferentiae occurrens in E, K, et per punctum E utcumque ducatur recta FEG quae occurrat rectae AB in F et circumferentiae rursus in G, rectangulum FE, EG aequale erit rectangulo HE, EK. Si vero hypothesis hujus Theorematidis deficeret, five diminuta esset una conditione, hoc est, si in ea non indicatum esset punctum E per quod rectae ducendae sunt, sed hoc modo propositum esset, viz. Datâ positione rectâ AB, datoque positione et magnitudine circulo CD, datum erit punctum per quod si utcumque ducatur recta quae ipsi AB, et circumferentiae occurrat, datum erit rectangulum a segmentis ductae inter punctum inveniendum et puncta occurfus contentum; patet propositionem jam in Porisma praecedens mutatam esse. Hoc igitur exemplo clare explicatur definitio juniorum quâ Porisma dixerunt esse id quod hypothese deficit a Theoremate Locali. Quam quidem definitionem merito culpât Pappus, utpote ex accidente tantum factam, ut in sequentibus ostendetur.

Ex hoc etiam exemplo patet Locos etiam deficere hypothefi a Theoremate Locali. Si enim hypothefis praecedentis Theorematis Localis ita diminuatur ut nihil de circulo in ea diceretur, fed hoc tantum, viz. Si per datum punctum E utcunque ducatur recta linea FEG cujus alter terminus F tangat rectam positione datam, fueritque rectangulum FE, EG dato spatio aequale, et proponatur invenire lineam quam reliquus terminus G tanget, patet Theorema jam in Locum converti. Unde Pappus hujus generis Porismatum, cui scilicet definitio juniorum convenit, Locos ipsos speciem esse affirmat.

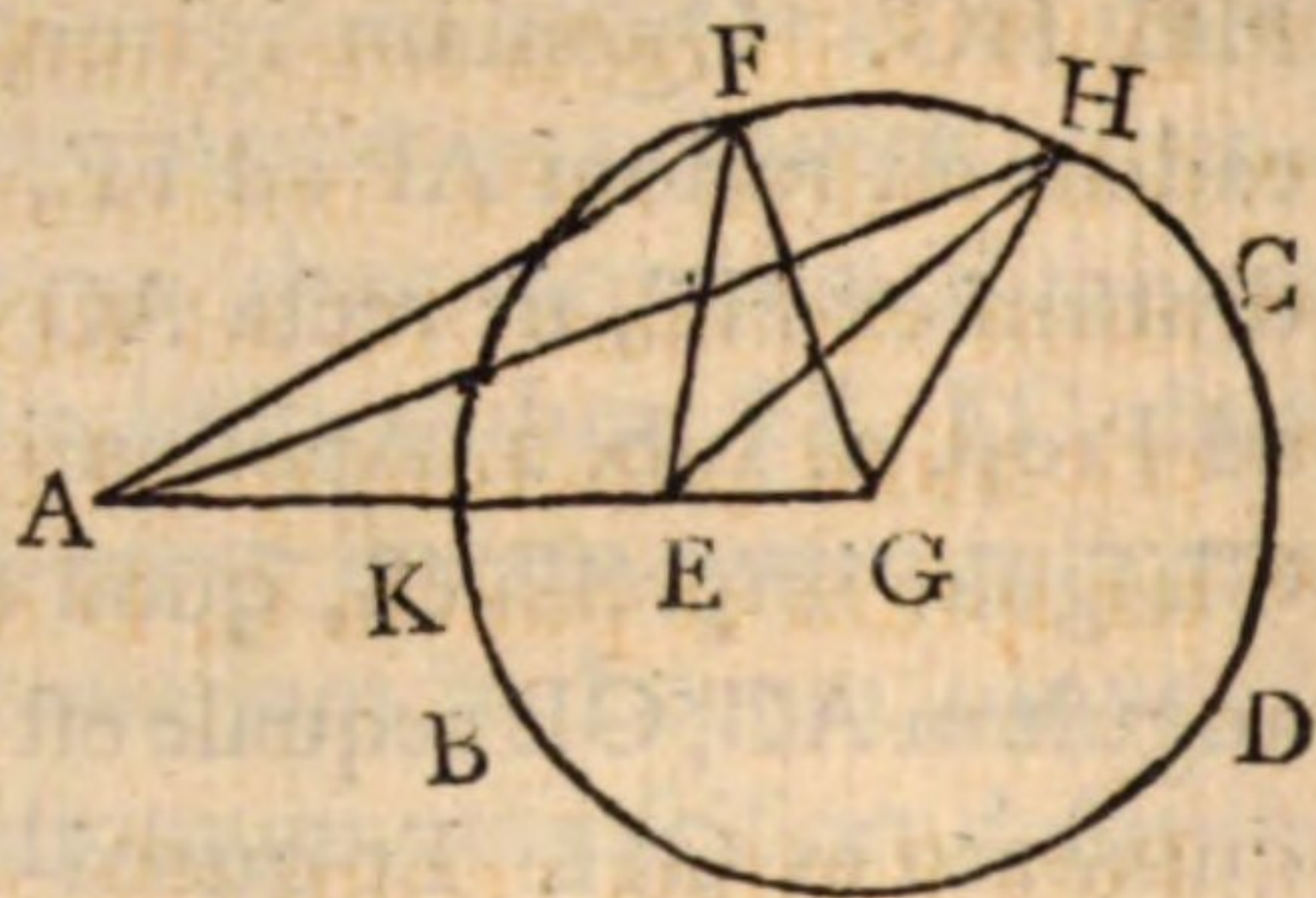
P R O P. II.

“ DATO puncto, datoque positione et magnitudine circulo;
 “ si a quovis in circumferentia puncto ducatur recta ad
 “ punctum datum, datum erit aliud punctum ad quod si ab
 “ eodem in circumferentia puncto ducatur recta linea, ad
 “ hanc primò ducta datam habebit rationem.”

Sit datum punctum A, et circulus datus sit BCD; et puta Porisma verum esse, et punctum E sit illud quod invenendum est. Si igitur a puncto quovis F in circumferentia ducantur FA, FE, data erit, ex hypothefi, ratio quam habet AF ad FE. Jungatur AE, et ad ipsam productam ducatur FG quae faciat angulum EFG aequalem ipsi EAF; quoniam igitur aequiangula sunt GAF, GFE triangula, ut AF ad FE, ita erit AG ad GF, et GF ad GE; proportionales igitur sunt AG, GF, GE, quare ^a ut quadratum ex AG ad quadratum ex GF, ita est recta AG ad ipsam GE; unde et quadratum ex AF est

^a2.cor. 20. 6.

veniendum fuit, et ratio AG ad GK ea quae data fuit ostendenda. A punctis enim A, E utcunque ad circumferentiam inflectantur AF, EF, erit ratio AF ad FE, eadem rationi AG ad GK. Jungatur FG, et quoniam AG, GK, sive GF, et GE sunt proportionales, aequiangula erunt ^b GAF, GFE triangu-
 6. 6. la; ut igitur AF ad FE, ita est AG ad GF, hoc est ad GK.



In hoc Porismate punctum E datum ostendendum, sive inveniendum fuit, innumerae autem rectae quae a punctis A, E ad circumferentiam inflecti possunt, eandem habent relationem ad puncta A, E et circumferentiam. Communis autem affectio, quam hisce rectis convenire demonstranda fuit, est haec, viz. rectas eas datam inter se habere rationem, quae ratio etiam invenienda fuit.

Conversa hujus Porismatis est Locus qui habetur in Prop. 2. Lib. 2. Locorum Planorum Apollonii, ex quo sequens Theorema Locale fluit, viz. Si a puncto A ad centrum G circuli BCD ducatur recta AG, et ipsi AG et semidiametro GK sumatur tertia proportionalis GE quae in recta GA ponatur versus partes A, ab ipsis autem A, E punctis inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae AF, EF, habebunt eae rationem eandem rationi AG ad GK. Si vero ex hypothese hujus Theorematis auferatur ea pars quae docet qua via inveniendum est punctum E, et quae sit ratio ductarum, mutabitur, ut patet, Theorema in praecedens Porisma.

P R O P. III.

“ DATIS in recta linea duobus punctis A, B, et data ratione;
 “ si in eadem recta sumantur alia duo puncta C, D quae fa-
 “ ciunt rationem AC ad BD eandem rationi datae; datum
 “ erit aliud punctum quod faciet rationem segmentorum in-
 “ ter ipsum et puncta C, D datam.”

Puta Porisma verum esse, et punctum E illud esse quod fa-
 ciet rationem EC ad ED datam. Igitur quoniam A, B puncta
 data sunt, si etiam datum sit E, magnitudine datae erunt
 rectae EA, EB, quare et ipsarum ratio data erit. Quoniam
 igitur, in fig. 1. data est ratio totius

AE ad totum EB, et partis AC ad
 partem BD, et reliquae CE ad reli-
 quam ED; at, in fig. 2. data est ra-
 tio totius EC ad totum ED, et par-
 tis AC ad partem BD, et reliquae

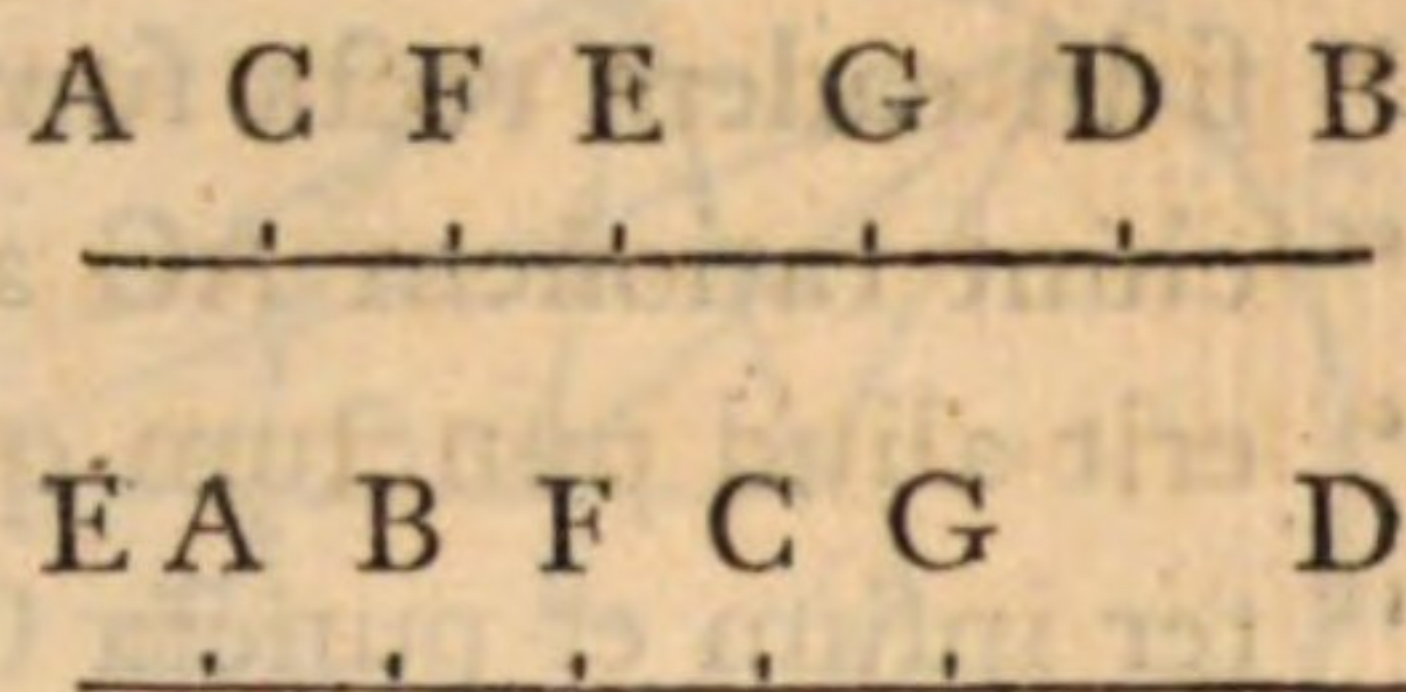
A C F E G D B
 —————

E A B F C G D
 —————

AE ad reliquam EB; datae erunt^a rationes omnium ad om-^a 12. Dat.
 nes, si scilicet rationes datae non eadem fuerint. Igitur si
 eadem non fuerint, data erit ratio AE ad utramque ipsarum
 CE, ED; et quoniam AE data ponitur, datae erunt CE, ED;
 et quoniam punctum E datum ponitur, data essent puncta C,
 D. Non autem data sunt; C enim et D quaelibet sunt puncta
 quae faciunt rationem AC ad BD eandem rationi datae. Igi-
 tur rationes CE ad ED, AC ad BD, et AE ad EB sunt eae-
 dem. Et quoniam data est ratio AC ad BD, ratio AE ad EB,
 quae ipsi eadem est, data erit. Et data est AB, quare et AE,
 datumque erit punctum E.

Componetur ita.

Sumatur punctum E inter puncta A, B, si puncta C, D debent esse ad contrarias partes punctorum A, B, quod faciet rationem AE ad EB eandem rationi datae; si vero puncta C, D debent esse ad easdem partes ipsorum A, B sumatur punctum E in AB producta



ad partes contrarias iis ad quas sunt C, D, quod faciet rationem AE ad EB eandem rationi datae. Erit in utroque casu CE ad ED, ut AE ad EB. Quoniam enim est, ex constructione, AE ad EB, in ratione data quam habet AC ad BD, erit^b CE ad ED, ut AE ad EB.

IDEM ALITER.

Sit E punctum inveniendum quod facit rationem EC ad ED datam. Sumantur autem alia duo puncta F, G quae faciunt rationem AF ad BG eandem rationi AC ad BD; igitur, ex hypothesi, ratio EF ad EG, eadem erit rationi EC ad ED. Quoniam igitur est AF ad BG, ut AC ad BD, erit^b et CF ad DG, ut AC ad BD; et quoniam est EF ad EG, ut EC ad ED, erit^b et CF ad DG, ut EC ad ED, quare est EC ad ED, ut AC ad BD; et propterea^b, ut AC ad BD, ita est AE ad EB. Data autem est ratio AC ad BD, ergo data est ratio AE ad EB; et data est AB, quare punctum E datum est. Et ostensum fuit esse EC ad ED, ut AC ad BD; data igitur est ratio EC ad ED. Compositio eadem est ut in praecedente.

PROP. IV.

“ SI recta AB positione et magnitudine data fuerit, et in ipsa
 “ producta sumatur utcunque punctum C, rectangulum AC,
 “ CB una cum spatio quodam dato, aequale erit quadrato ex
 “ segmento inter punctum C et punctum quoddam datum.”

Sit Porisma verum, et dicatur spatium quod datum ostendendum, five inveniendum est, S; sitque D punctum inveniendum. Igitur, ex hypothesi, rectangulum AC, CB una cum spatio S aequale est quadrato ex DC. Rursus sumatur utcunque in AB producta aliud punctum E, et, ex hypothesi, rectangulum AE, EB una cum spatio S aequale erit quadrato ex DE.

Excessus igitur rectanguli AC, CB supra ipsum AE, EB aequalis erit excessui quadrati ex DC supra quadratum ex DE. Si autem fiat AF aequalis ipsi BE, excessus rectanguli AC, CB supra ipsum AE, EB aequalis ^a est rectangulo FC, CE. Excessus vero ^a Vid. infra. quadrati ex DC supra quadratum ex DE est ^b duplum rectangulum DE, EC una cum quadrato ex EC, quae propterea simul aequalia sunt rectangulo FC, CE. Commune auferatur quadratum ex EC, et rectangulum DE, EC bis aequale erit rectangulo FE, EC. Igitur DE bis aequalis est ipsi FE; quare

^a Est Prop. 24. Lib. 7. Pappi. Bifariam secetur AB in D, et quoniam rectangulum AC, CB una cum quadrato ex DB, aequale est quadrato ex DC, hoc est, rectangulo FC, CE una cum quadrato ex DE, hoc est, una cum rectangulo AE, EB et quadrato ex DB. Commune auferatur quadratum ex DB; reliquum igitur rectangulum AC, CB aequale erit rectangulo FC, CE, et rectangulo AE, EB.

FD aequalis est ipsi DE, quarum aequales sunt FA, BE; reliqua igitur AD reliquae BD est aequalis. Data autem est AB, quare data est AD, punctumque D erit datum. Rectangulum autem AC, CB una cum spatium S aequale est quadrato ex DC, ^c6. 2. hoc est ^crectangulo AC, CB una cum quadrato ex DB; igitur spatium S aequale est quadrato ex DB. Datumque propterea est spatium S.

Componetur ita.

Bifariam secetur AB in D; erit D punctum, et quadratum ex DB spatium inveniendum. Sumatur enim utcunque punctum C in AB producta, erit rectangulum AC, CB una cum quadrato ex DB aequale quadrato ex DC, ut constat ex 6. 2. vel ita ex analysi praecedente ostendi potest. Quoniam rectangulum AC, CB aequale est ^drectangulo AB, BC una cum quadrato ex BC, commune apponatur quadratum ex DB, et rectangulum AC, CB una cum quadrato ex DB aequale erit rectangulo AB, BC, hoc est duplo rectangulo DB, BC, una cum quadratis ex BC, BD, hoc est ^bquadrato ex DC. ^a3. 2. ^b4. 2.

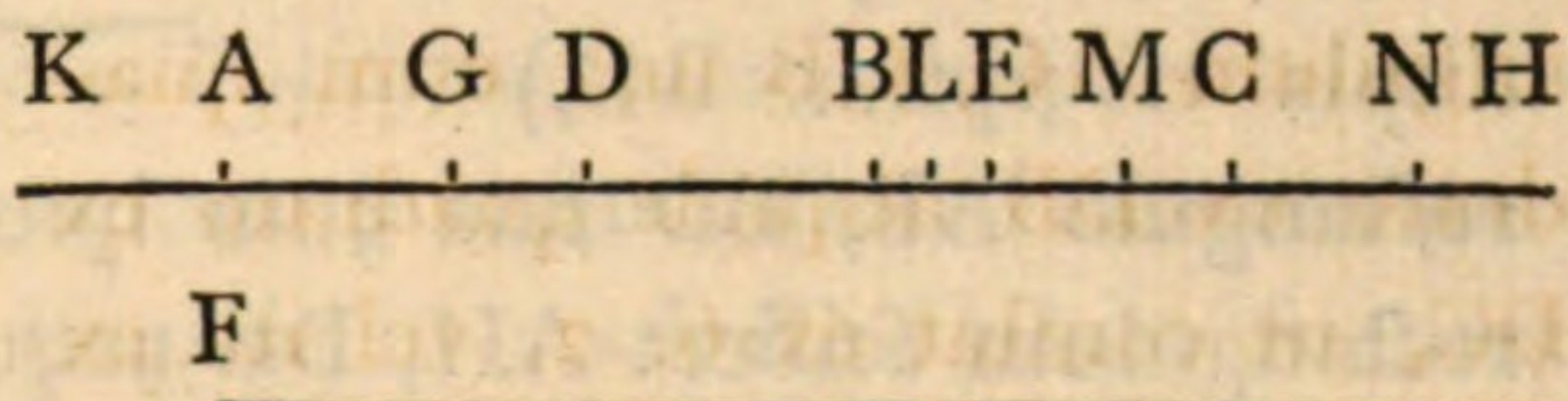
F A D B E C

P R O P. V.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C, si inter A, B
 “ fumatur utcunque punctum D, datum erit in recta AC
 “ punctum quod faciet rectangulum contentum segmento in-
 “ ter ipsum et punctum D, et datâ quâdam rectâ aequale
 “ rectangulo AD, DB una cum quadrato ex segmento inter
 “ D et tertium punctum C.”

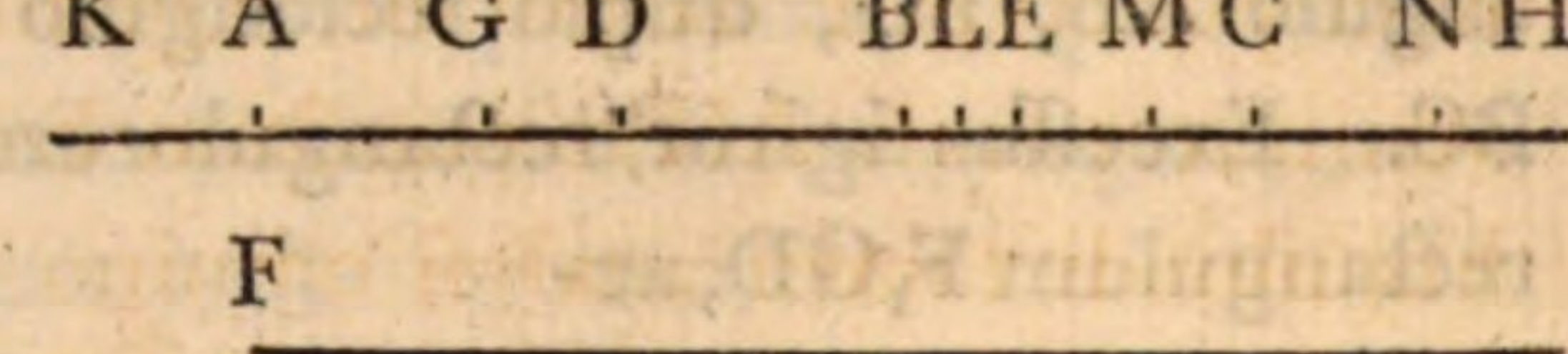
Puta verum esse Porisma, sitque punctum inveniendum E, et recta invenienda F. Quoniam igitur, ex hypothefi, rectangulum F, DE aequale est rectangulo AD, DB una cum quadrato ex DC, hoc est ^a rectangulo AD, DB, quadratis ex DB, ^a 4. 2. BC et duplo rectangulo DB, BC; erit ^b rectangulum F, DE ^b 3. 2. aequale rectangulo AB, BD, duplo rectangulo DB, BC, et quadrato ex BC. Rursus fumatur aliud punctum G inter A et B; et similiter ostendetur rectangulum F, GE aequale rectangulo AB, BG, duplo rectangulo GB, BC, et quadrato ex BC. Excessus igitur rectangulorum F, GE, F, DE, hoc est rectangulum F, GD, ae-

qualis erit excessui rectangulorum AB, BG, AB, BD una cum duplo excessus ipforum



GB, BC, DB, BC, hoc est rectangulo AB, GD una cum ipso BC, GD bis. Recta igitur F aequalis est ipsi AB una cum BC bis, hoc est ipsis AC, CB simul; facta igitur CH aequali ipsi CB, recta F aequalis erit ipsi AH, quare data est recta F. Est igitur rectangulum AH, DE aequale (ipsi F, DE, hoc est, ut ostensum fuit, rectangulo AB, BD, duplo rectangulo DB, BC, et quadrato ex BC; hoc est rectangulo AB, BD, ipsique DB, BH et quadrato ex BC; hoc est) ipsi AH, DB et quadrato ex BC. Auferatur commune rectangulum AH, BD, et reliquum rectangulum AH, BE aequale erit quadrato ex BC. Et datae sunt BC, AH, quare data est BE, datumque erit punctum E. Et data est recta F, ut ostensum fuit. Quae fuerunt ostendenda.

Componetur ita.

Producatur BC ad H ut aequales sint BC, CH, et ipsis AH,
BC tertia proportionalis inveniat BE quae ponatur in AB
producta. Erit AH recta invenienda, quae dicta fuit F, et E
erit punctum inveniendum. Sumatur enim inter A et B ut-
cunque punctum D. Et quoniam rectangulum AH, BE ae-
quale est, ex constructione, quadrato ex BC; est autem rect-
angulum AH, DB ae-
quale (rectangulo AB,
BD una cum ipso HB,
BD, hoc est, quia BH
dupla est ipsius BC,) 

K A G D BLE MC NH
F

sequitur rectangulum F, BE aequale fore quadrato ex BC . Excessus igitur rectangulorum F, AE, F, BE qui quidem est rectangulum F, AB , aequalis est excessui quadratorum ex AC, BC , hoc est quadrato ex AB et duplo rectangulo AB, BC . Recta igitur F aequalis est rectae AB una cum ipsa BC bis, hoc est rectae AH , facta scilicet CH aequali ipsi BC . Et quoniam rectangulum F, BE , hoc est AH, BE aequale est quadrato ex BC , et datae sunt AH, BC rectae, data erit BE , quare et punctum E datum est. Quamvis autem haec via qua inveniuntur recta AH et punctum E brevior est praecedente, ab hujusmodi tamen analyfi omnino cavendum est; non enim ex ea demonstratio generalis Porismatis derivari potest, ut fieri debet, quodcumque sumatur punctum D , sed tantum particularis de punctis A et B quae in analyfi adhibita fuerunt. Semel igitur ad minimum, punctum, recta, angulus, vel quodcumque fuerit de quo in Porismate aliquid generaliter affirmatur, sumendum est utcumque, intra tamen limites, si qui sint, in Porismate praescriptos, ut legitime fiat analyfis. Saepe autem brevius et facilius ea quae investiganda sunt inveniuntur, si tum quaevis ex praedictis rebus sumatur utcumque, tum denuo modo quodam particulari sumatur, quando hoc fieri potest. Ut in praecedente Porismate, puncto D utcumque sumpto, ostensum fuit rectangulum F, DE aequale rectangulo AB, BD , duplo rectangulo DB, BC , et quadrato ex BC ; si denuo sumatur, vice puncti G quod in praecedente prima analyfi sumptum fuit utcumque, punctum B , erit, ex hypothefi, rectangulum F, BE aequale quadrato ex BC ; et hisce ex prioribus aequalibus ablatis, erit reliquum, rectangulum scilicet F, DB aequale reliquo, rectangulo scilicet $AB,$

cum rectangulo AL, LB, hoc est quadratis ex BC, BL una cum rectangulo AB, BL, hoc est,) duplo ^c rectangulo CB, BL, ^c 7. 2. quadrato ex LC, et rectangulo AB, BL; et est AH, BL rectangulum aequale rectangulo AB, BL, (una cum rectangulo BH, BL, hoc est) una cum duplo rectangulo CB, BL. Et ablati hisce aequalibus ex prioribus, erit rectangulum AH, LE una cum ipso AL, LB aequale quadrato ex LC.

COR. 3. Quando punctum, ut M, est inter E et C, erit rectangulum AM, MB aequale rectangulo AH, ME una cum quadrato ex MC.

Est enim rectangulum AM, MB una cum quadrato ex BC aequale (rectangulo AB, BM una cum quadratis ex BM, BC, hoc est rectangulo AB, BM, duplo rectangulo ^c CB, BM, et quadrato ex MC, hoc est, quia BH dupla est ipsius BC, rectangulo AB, BM una cum ipso HB, BM et quadrato ex MC, hoc est) rectangulo AH, BM una cum quadrato ex MC; quorum quadratum ex BC aequale est rectangulo AH, BE; reliquum igitur rectangulum AM, MB aequale est reliquo, rectangulo scilicet AH, ME una cum quadrato ex MC.

COR. 4. Quando punctum, ut N, sumptum est in AC producta; erit rectangulum AN, NB aequale rectangulo AH, NE una cum quadrato ex NC. Ostendetur hoc ut Corollarium 3.

Denique si sumatur punctum A vice ipsius D, rectangulum AH, AE aequale erit quadrato ex AC. Si sumatur punctum B, erit rectangulum AH, BE aequale quadrato ex BC.

Et si fumatur in E, rectangulum AE, EB erit aequale quadrato ex EC. Si autem fumatur punctum C, erit rectangulum AH, CE aequale rectangulo AC, CB.

Haec autem omnia numeris illustrari possunt, ponendo, ex. gr. AB, 24; BC, 12; erit enim F, five AH, 48; BE, 3. Et si fumatur AD, 10, erit F, DE, 816; AD, DB, 140; et quadratum ex DC erit 676. et ita in reliquis casibus.

P R O P. VI.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quorum C est
 “ inter A, B; datum erit in AB producta ad partes A, punc-
 “ tum D, ita ut si fumatur utcunque, in AB producta ad
 “ easdem partes, punctum E, rectangulum BC, CE aequale
 “ erit rectangulo DA, AE una cum rectangulo contento recta
 “ EB, et datâ quâdam rectâ.”

Putâ Porisma verum esse, sitque D punctum, et F recta quae inveniendâ sunt. Igitur, ex hypothesi, si fumatur utcunque punctum E in BA producta, rectangulum BC, CE aequale erit rectangulo DA, AE una cum rectangulo F, EB. Sumatur nunc punctum A, vice ipsius E, et rursus, ex

hypothesi, rectangulum $\overline{E \quad D \quad A \quad G \quad C \quad H \quad B \quad K}$
 BC, CA aequale erit rectangulo F, AB. Et hisce

ex praecedentibus aequalibus ablatis, erit reliquum rectangulum BC, AE aequale reliquo, rectangulo scilicet DA, AE una cum rectangulo F, AE. Recta igitur BC aequalis est rectis

DA, F simul; quare rectangulum AB, BC aequale est rectangulo DA, AB una cum rectangulo F, AB. Ostensum autem fuit rectangulum BC, CA aequale rectangulo F, AB, et hisce ex proxime praecedentibus aequalibus ablatis, erit reliquum, quadratum scilicet ex CB aequale reliquo rectangulo DA, AB. Data autem est BC, datum igitur est rectangulum DA, AB; et data est AB, quare recta AD et punctum D data sunt. Fuit autem BC aequalis rectis DA, F simul; data igitur est recta F.

Componetur ita.

Inveniatur AD tertia proportionalis ipsis AB, BC, quae ponatur ab A in BA producta. Sumatur autem recta F aequalis excessui ipsarum CB, AD, hoc est, sit CB aequalis ipsis AD, F simul; est igitur quadratum ex BC aequale rectangulo DA, AB; commune addatur rectangulum AC, CB, erit totum rectangulum AB, BC aequale toti, rectangulo scilicet DA, AB una cum ipso AC, CB. Et quoniam recta CB aequalis est ipsis AD, F simul, erit rectangulum AB, BC aequale rectangulo DA, AB una cum rectangulo F, AB. Igitur rectangulum DA, AB uno cum ipso AC, CB aequale est rectangulo DA, AB una cum ipso F, AB; quare AC, CB rectangulum aequale est ipsi F, AB. Rursus quoniam recta BC aequalis est ipsis AD, F simul, erit rectangulum BC, AE aequale rectangulo AD, AE una cum ipso F, AE; additisque hisce proxime praecedentibus aequalibus, erit totum rectangulum BC, CE aequale toti, rectangulo scilicet DA, AE una cum rectangulo F, EB. Q. E. D.

COR. I. Si, vice puncti E sumatur punctum G inter A et C, reliquis manentibus, erit rectangulum DA, AG una cum ipso BC, CG aequale rectangulo F, GB.

Quoniam enim rectangulum DA, AB aequale est quadrato ex CB, commune apponatur rectangulum GC, CB, erit rectangulum DA, AB una cum ipso GC, CB aequale rectangulo GB, BC. Est autem recta CB aequalis ipsis DA, F simul, quare rectangulum GB, BC,

hoc est rectangulum DA, $\begin{array}{ccccccc} E & D & & A & G & C & H & B & K \\ \hline & & & & & & & & \end{array}$
 AB una cum ipso GC, $\hline$
 CB aequale est rectangu- $\begin{array}{c} F \\ \hline \end{array}$
 lo DA, GB una cum ip-

so F, GB. Auferatur commune rectangulum DA, GB, erit rectangulum DA, AG una cum ipso GC, CB aequale rectangulo F, GB.

COR. 2. Si inter C et B fumatur utcunque punctum H, erit rectangulum DA, AH aequale rectangulo BC, CH una cum rectangulo F, HB.

Quoniam enim recta CB aequalis ostensa fuit ipsis DA, F simul, erit rectangulum HB, BC aequale rectangulo DA, HB una cum ipso F, HB. Commune apponatur rectangulum DA, AH, erit rectangulum DA, AH una cum ipso HB, BC aequale (rectangulo DA, AB una cum ipso F, HB, hoc est,) quadrato ex CB una cum rectangulo F, HB. Auferatur commune HB, BC, erit DA, AH rectangulum aequale rectangulo BC, CH una cum rectangulo F, HB.

COR. 3. Si in AB producta fumatur utcunque punctum K, erit rectangulum DA, AK una cum ipso F, KB aequale rectangulo BC, CK.

Quoniam rectangulum DA, AB aequale est quadrato ex

CB, et est rectangulum DA, KB una cum ipso F, KB aequale rectangulo CB, BK, quia recta DA una cum ipsa F, aequalis est rectae CB; erit totum, rectangulum DA, AK una cum ipso F, BK aequale toti, rectangulo KC, CB.

Poterint etiam PORISMATA proponi de numeris, ex. gr. praecedens ita de numeris proponi potest.

DATIS duobus numeris a, b quorum major sit a, dati erunt duo alii numeri x, y, tales, ut si fumatur utcunque quintus numerus c, factus ab excessu primi a et secundi b, et summa secundi b et quinti c, aequalis sit facto a tertio x, et quinto c; una cum facto a summa primi a et quinti c, et quarto y. Igitur ex hypothese erit,

$$a - b \times b + c = cx + ay + cy$$

$$\text{i. e. } ab + ac - bb - bc = cx + ay + cy.$$

Sumatur rursus utcunque numerus d, vice ipsius c, et similiter ostendetur $ab + ad - bb - bd = dx + ay + dy$; et si c major sit quam d, ablatis hisce aequalibus a praecedentibus, erit

$$a \times c - d - b \times c - d = c - d + c - d \times y; \text{ igitur est } a - b = x + y.$$

$$\text{Unde } a - b - y = x, \text{ et } ac - bc - cy = cx. \text{ Et fuit } ab + ac - bb - bc = cx + ay + cy; \text{ igitur est } ab + ac - bb - bc = ac - bc - cy + ay + cy.$$

$$\text{Unde est } ab - bb = ay, \text{ et } \frac{ab - bb}{a} = y. \text{ Et fuit } a - b - y = x, \text{ qua-}$$

$$\text{re } a - b - \frac{ab - bb}{a}, \text{ i. e. } \frac{aa - 2ab + bb}{a} = x = \frac{a - b^2}{a}.$$

Vel brevius ita.

Ostendetur ut prius $ab + ac - bb - bc = cx + ay + cy$, igitur in casu in quo $c = 0$, erit $ab - bb = ay$, et hisce a praecedentibus

ablatis, erit $ac - bc = cx + cy$. Unde erit $a - b = x + y$, et $a - b - x = y$, et $aa - ab - ax = ay$. Fuit autem $ab - bb = (ay =) aa - ab - ax$; igitur est $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$, i. e. $\frac{a - b^2}{a} = x$.

Ex. gr. Sit $a = 9$. $b = 3$. erit $x = \frac{3^2}{9} = 4$. et $y = 2$. fumatur vero utcunque numerus pro c , ex. gr. unitas, erit $a - b \times b + c = 6 \times 4 = 24$. et est $cx = 4$. et $a + c \times y = 10 \times 2 = 20$. et est $24 = 4 + 20$.

Si autem c fuisset 10, reliquis manentibus, erit $a - b \times b + c = 6 \times 13 = 78$. $cx = 40$. $a + c \times y = 38$. et $78 = 40 + 38$.

Ex his exemplis manifestum est multa esse Porisinata quae a Theoremate Locali hypothefi deficiunt, alia autem quae ex Locis nullatenus pendent. Merito igitur juniores Pappus reprehendit, quod Porisma ex accidente definiverunt, ex quadam sc. re quae quibusdam quidem non omnibus Porismatibus inest. Fermatius in pag. 118. var. Oper. Math. sequentem tradit Porismatis definitionem, viz. “ Cum Locum inve-
“ stigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tan-
“ tisper ignotam, donec Locum inveniendae lineae designave-
“ rimus, sed cum ex supposito Loco dato et cognito alium Lo-
“ cum venamur, novus iste Locus Porisma vocatur ab Eucli-
“ de, qua ratione Locos ipsos Porismatum unam speciem et
“ esse et vocari verissime Pappus subjunxit. Exemplo unico
“ definitionem nostram astruimus, in fig. 5ta Porismatis, da-
“ tâ rectâ RC, si quaeratur curva quaelibet RAC cujus ea sit
“ proprietas ut a quolibet ipsius puncto ut A demissa per-
“ pendicularis AD faciat quadratum AD aequale rectangulo
“ RDC, inveniemus curvam RAC esse circuli circumferenti-

“ am; sed si ex dato jam Loco illo alium investigemus, Pro-
 “ blema verbi gratia Porismatis 5ti, novus iste Locus et in-
 “ finiti alii quos periti sagacitas analytæ representabit, et ex
 “ jam cognito eliciet, Porisma dicitur.

“ Cum autem ut jam diximus Porismata ipsa sint Loci &c.

Verum ex hac definitione quid sint Porismata minime intelligi queat, et revera quæ adfert Fermatius vel in definitione sua, vel ad eam adstruendam, Porismatibus nullis conveniunt, nisi iis solis quæ sunt Loci. Locos enim five derivati sint a Loco alio five a nullo alio derivati Pappus et ipse Fermatius speciem esse Porismatum agnoscit, ejus sc. generis Porismatum cui definitio juniorum convenit; unde patet alias vel saltem aliam speciem esse hujus generis quæ non sunt Loci, præter alia genera, de quibus, ut videtur, nihil novérat Fermatius, quæ nihil cum Locis commune habent. Ille vero Porismata cum Locis confundit, cum vocet Porisma ejus 5tum Locum, et postea affirmet Porismata in genere Locos esse. Exemplum autem Loci ad circumferentiam ex quo velit Porisma suum deduci, nihil ad rem facit, neque cum eo particularem aliquem nexum habet. Et quidem melius dixisset Fermatius Porisma illud 5tum conversam esse Loci in pag. 7. libri sui vel deficere hypothese a Theoremate Locali a Loco illo oriundo; atque ita definitionem juniorum exemplo hoc illustrasset.

His præmissis, quæ de Porismatibus tradit Pappus in præfatione ad lib. 7. Math. Collectionum facilius intelliguntur; sunt autem hæc quæ sequuntur.

EX LIBRO SEPTIMO

MATHEMATICARUM COLLECTIONUM

PAPPI ALEXANDRINI

“ DE PORISMATIBUS EUCLIDIS III.

POST Tactiones in tribus libris habentur Porismata Euclidis, collectio artificiosissima multarum rerum quae spectant ad analyfin difficiliorum et generalium problematum, quorum quidem ingentem copiam praebet natura. Nihil vero additum est iis quae Euclides primum scripserat, praeterquam quod imperiti quidam qui nos praecesserunt secundas descriptiones paucis ipforum [sc. Porismatum] apposuerunt. Cum vero unumquodque definitum habeat demonstrationum numerum ^a, ut ostendimus ^b, Euclides unam eamque maxime evidentem in singulis posuit. Habent autem subtilem et naturalem contemplationem, necessariamque et maxime universalem, atque iis quae singula perspicere et investigare valent admodum jucundam. Specie autem haec omnia neque theoremata sunt, neque problemata, sed mediae quodammodo inter haec naturae, ita ut eorum propositiones possunt vel ut theoremata, vel ut problemata formari. Unde factum est ut inter multos Geometras alii haec genere theoremata existiment, alii vero problemata, respicientes ad formam tantum propositionis. Differentias autem horum trium melius intellexisse vete-

^a Forsan intelligit demonstrationes diverforum casuum ejusdem Porismatis; vel propositionum quae sunt ejus conversae.

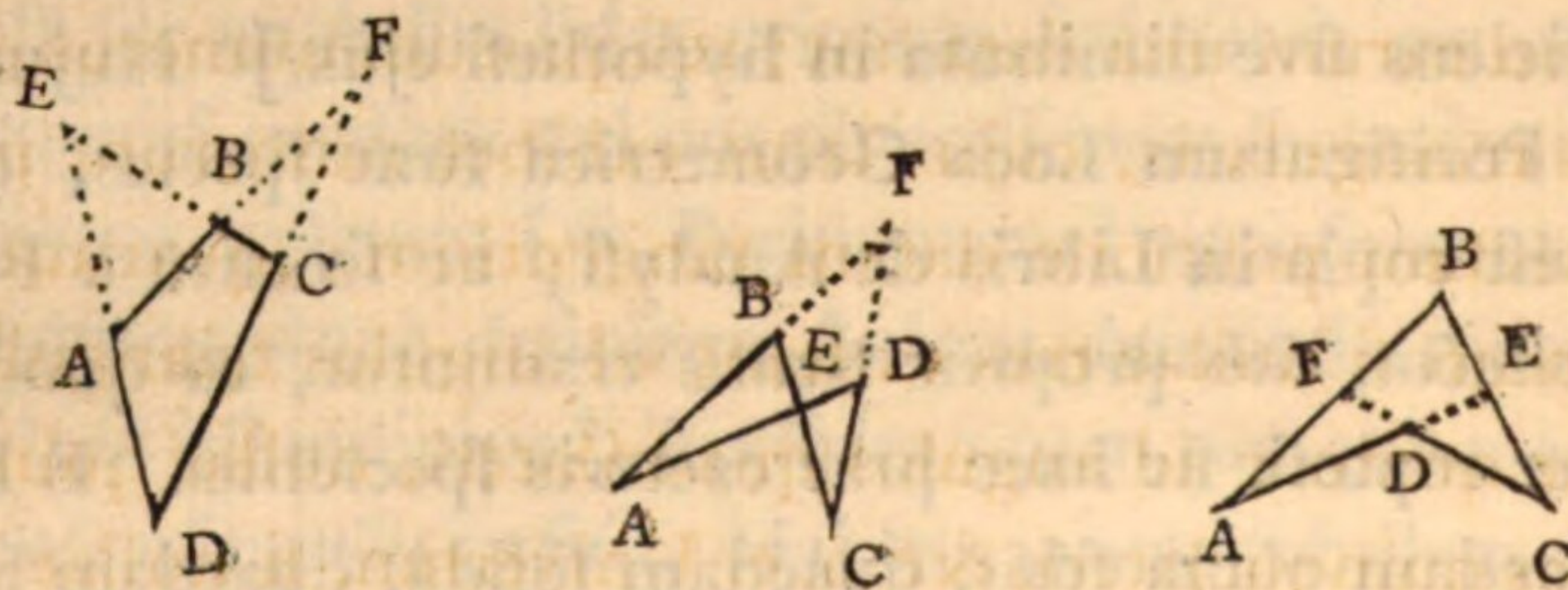
^b In quibusdam ex lemmatibus, ni fallor, ad Porismata.

res manifestum est ex definitionibus. Dixerunt enim Theorema esse quo aliquid propositum est demonstrandum; Problema vero, quo aliquid propositum est construendum; Porisma vero esse quo aliquid propositum est investigandum. A Neotericis autem immutata est haec Porismatis definitio, qui haec omnia investigare haud potuerunt, sed Elementis hisce adhibitis, ostenderunt tantum quid sit quod quaeritur, non autem illud investigaverunt. Et quamvis a definitione et ab ipsis rebus quae traditae sunt redarguerentur, hoc tamen modo, ab accidente, definierunt. Porisma est quod deficit hypothese a Theoremate Locali [hoc est, Porisma est Theorema Locale deficiens sive diminuta in hypothese ejus.] Hujus autem generis Porismatum Loca Geometrica sunt species, quorum magna est copia in Libris de Analyfi; ac seorsim a Porismatibus collecta, sub propriis titulis traduntur, eo quod magis diffusa et copiosa sit haec prae caeteris speciebus. E Locis enim quaedam plana sunt, quaedam solida, quaedam linearia, et praeter haec sunt Loca ad medietates [sive a mediis proportionalibus orta.] Accidit hoc etiam Porismatibus, propositiones habere concisas propter difficultatem multarum rerum quae subintelligi solent; unde evenit Geometras non paucos ex parte tantum rem perspicere, dum ea quae inter ostensa magis necessaria sunt haud capiunt. Multa autem ex iis in una propositione minime comprehendi possunt, quia ipse Euclides non multa in unaquaque specie posuerit, sed ut specimen daret multae copiae, pauca ad principium primi libri posuit ejusdem omnino speciei cum uberrima illa [quae in primo libro habetur] Locorum specie, ut decem sint numero. Quare has [propositiones scilicet hujus speciei] una propo-

fitione comprehendi posse animadvertentes, eam ita describimus.

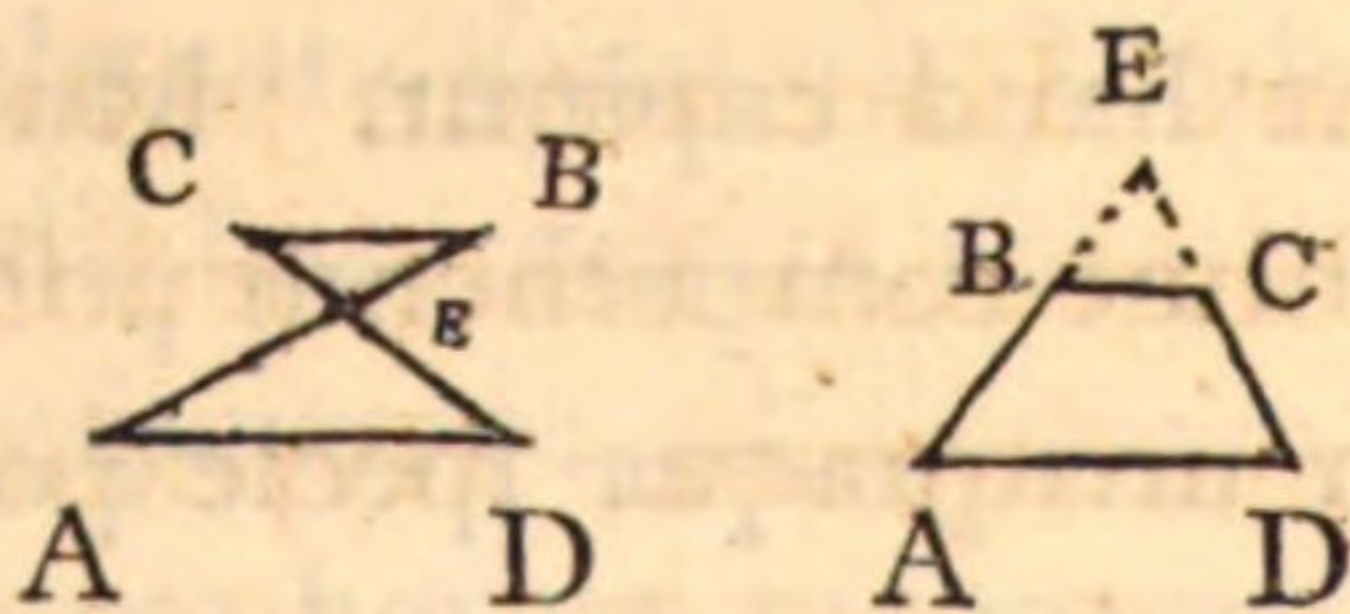
“ Si quadrilateri cujus anguli oppositi vel ex adverfo, vel
 “ ad easdem partes sunt positi^a, [lateribus productis] data
 “ sint in uno ipsorum tria puncta [intersectionum scilicet;]
 “ vel si in quadrilatero cujus duo latera sunt inter se parallela
 “ [data sint duo puncta intersectionum in altera parallelarum;]
 “ caetera vero puncta praeter unam tangant rectam^b

^a Primum horum Pappus vocat ὑπτίον, alterum παρυπτίον; et ita videtur ὑπτίον, scilicet schema, explicandum, quod sit figura quadrilatera in qua duo latera AD, CD vergunt ad partes contrarias iis ad quas vergunt reliqua duo



AB, BC, hoc est vergunt retrorsum ab iis. Παρυπτίον vero schema est figura quadrilatera in qua duo latera AD, CD vergunt juxta latera reliqua AB, CB, sive versus easdem partes. Ita ut hisce duabus figuris comprehenditur quaecvis figura quatuor laterum, quorum nulla sunt inter se parallela.

In quibusdam lemmatibus Pappi in Porismata mentio fit τῶ παραλλήλῳ, scilicet



et schematis, quod est figura quadrilatera cujus duo latera sunt parallela, ut ABCD in appositis figuris.

^b i. e. Unum tangat unam, aliud tangat aliam rectam positione datam, et sic deinceps.

“ positione datam ; etiam hoc tanget rectam positione datam.” Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duae per idem punctum transeunt. In quolibet vero proposito rectarum numero ignoratur, quamvis vera sit huiusmodi propositio, viz.

“ Si quocunque rectae occurrant inter se, nec plures quam
 “ duae per idem punctum ; data vero sint puncta omnia in
 “ earum una, unumquodque autem punctum in alia tangat
 “ rectam positione datam.” Vel generalius sic. “ Si quocun-
 “ que rectae occurrant inter se, neque sint plures quam duae
 “ per idem punctum, omnia vero puncta [intersectionum sci-
 “ licet] in earum unâ data sint ; reliquorum numerus erit nu-
 “ merus triangularis, cujus latus exhibet numerum puncto-
 “ rum rectam positione datam tangentium ; quarum inter-
 “ sectionum si nullae tres existant ad angulos trianguli spatii
 “ [nullae quatuor ad angulos quadrilateri, nullae quinque ad
 “ angulos quinquelateri, &c. i. e. Universim, si nullae harum
 “ intersectionum in orbem redeant] unaquaeque intersectio
 “ reliqua tanget rectam positione datam.”

Euclidem autem hoc nescivisse haud verisimile est, sed principia sola respexisse: nam per omnia Porismata non nisi prima principia, et semina tantum multarum et magnarum rerum sparsisse videtur. Haec autem juxta hypothesium differentias minime distinguenda sunt; sed secundum differentias accidentium et quaesitorum. Hypotheses quidem omnes inter se differunt, cum specialissimae sint: accidentium vero et quaesitorum unumquodque, cum sit unum idemque multis diversisque hypothefibus contingit^a.

^a Ex. gr. Multa sunt Porismata quae diversas hypotheses habent, sed quae

Talia itaque inquirenda offeruntur in primi libri propositionibus: (in principio septimi habetur * diagramma huc spectans) “Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae
 “ ad rectam positione datam, abscindat autem earum una à
 “ rectâ positione data segmentum dato in ea puncto adjacens,
 “ auferet etiam altera ab aliâ rectâ segmentum datam habens
 “ rationem.” i. e. *quod ad alterum segmentum habebit rationem*
 “ *eandem rationi quae ex hypothesis data est.* Deinde in subsequen-
 tibus; “ Quod punctum illud tangit rectam positione datam.
 “ Quod ratio ipsius . . . ad rectam . . . data est. Quod ratio ip-
 “ sius . . . ad partem abscissam data est. Quod haec recta . . .
 “ positione data est. Quod haec ad datum punctum vergit.
 “ Quod data est ratio ipsius . . . ad interceptam inter punc-
 “ tum . . . et datum punctum. Quod data est ratio rectae . . .
 “ ad aliquam a puncto . . . ductam. Quod data est ratio rect-
 “ anguli ** ad rectangulum contentum datâ et ipsâ . . . Quod
 “ hujus rectanguli unum latus datum est, alterum vero rati-
 “ onem habet *datam* ad rectam abscissam. Quod rectangu-
 “ lum hoc vel solum, vel una cum quodam dato spatio est **
 “ illud vero rationem datam habet ad partem abscissam. Quod
 “ recta . . . una cum aliâ ad quam . . . est in ratione data, ra-
 “ tionem habet datam ad interceptam inter punctum . . . et da-
 “ tum punctum. Quod contentum quâdam datâ et rectâ . . .
 “ aequale est contento aliâ datâ et interceptâ inter punctum . . .
 “ et datum . . . Quod data est ratio rectae . . . atque etiam ip-
 “ sius . . . ad interceptam inter punctum . . . et datum. Quod

omnia concludunt punctum aliquod tangere rectam positione datam; vel rec-
 tam aliquam vergere ad punctum datum. &c.

* Non jam habetur.

“ recta ... aufert a positione datis segmenta rectangulum da-
 “ tum comprehendentia.

In secundo libro hypotheses quidem diversae sunt. Inqui-
 renda vero ut plurimum eadem ac in primo : praetereaue
 haec “ Quod rectangulum illud ... rationem habet *datam* ad
 “ partem abscissam, vel per se, vel adjuncto quodam dato rect-
 “ angulo. Quod data est ratio rectanguli contenti ... et ...
 “ ad partem abscissam. Quod data est ratio rectanguli con-
 “ tenti utrâque ... et ... simul sumptâ, et utrâque ipsarum ...
 “ et ... etiam simul sumptarum, ad partem abscissam. Quod
 “ contentum ipsâ ... et utraque ipsarum ... et ... quae ad
 “ rectam ... datam habet rationem ; atque etiam contentum
 “ ... et illâ quae ad ipsam datam habet rationem sunt in da-
 “ ta ratione ad partem abscissam. Quod data est ratio utri-
 “ usque simul sumptae ad interceptam inter punc-
 “ tum .. et datum punctum. Quod datum est rectangulum
 “ contentum ipsis ... et ...

In tertio libro plures sunt hypotheses de semicirculis, paucae
 autem de circulis et segmentis. Inquirendorum vero maxima
 pars affinis est praecedentibus. Insuper vero haec sese offe-
 runt. “ Quod data est ratio rectanguli ... in ... ad rectan-
 “ gulum ... in ... Quod data est ratio quadrati ipsius ... ad
 “ partem abscissam. Quod rectangulum contentum ipsis ...
 “ et ... *aequale* est rectangulo contentum datâ et intercepta in-
 “ ter punctum .. et datum punctum. Quod quadratum ip-
 “ sius ... *aequale* est contento datâ .. et interceptâ inter Cathe-
 “ tum et punctum datum. Quod rectae una cum illa
 “ ad quam ... datam habet rationem, simul sumptae, da-
 “ tam habent rationem ad partem abscissam. Quod datum est

“ punctum aliquod, a quo si ducantur rectae ad puncta quae-
 “ vis ... continebunt illae triangulum specie datum. Quod
 “ datum est aliquod punctum a quo si ducantur rectae ad
 “ puncta quaevis ... abscindunt illae *è circulo* aequales circum-
 “ ferentias. Quod recta ... vel parallela erit positione datae,
 “ *vel verget ad datum punctum*, vel cum quadam alia recta ver-
 “ fus punctum datum vergente datum continebit angulum.”
 Habent autem tres Porismatum Libri Lemmata xxxviii.
 Theoremata vero clxxi. Haecenus Pappus.

Perpicuum est propositiones has omnes, primâ exceptâ, omnino mancas et imperfectas esse. Paucas quidem magno labore enucleavimus, ex quibus praestantiam Porismatum, et quam maxime eorum jactura Geometris deploranda sit, dignoscere licet.

Decem vero Loci qui in prima praecedentium Propositionum generalium continebantur, videntur fuisse hi qui sequuntur.

LOCUS I. PROP. VII.

“ SI fuerint quatuor rectae quarum duae sunt inter se paral-
 “ lelae, et in una harum data sint duo puncta intersectionum,
 “ reliqua vero intersectionum puncta praeter unum tangant
 “ rectas parallelas positione datas; tanget etiam hoc rectam
 “ positione datam.”

CAS. I. Quando duae reliquae ex quatuor rectis sunt etiam inter se parallelae, hoc est quando quatuor rectae paralle-

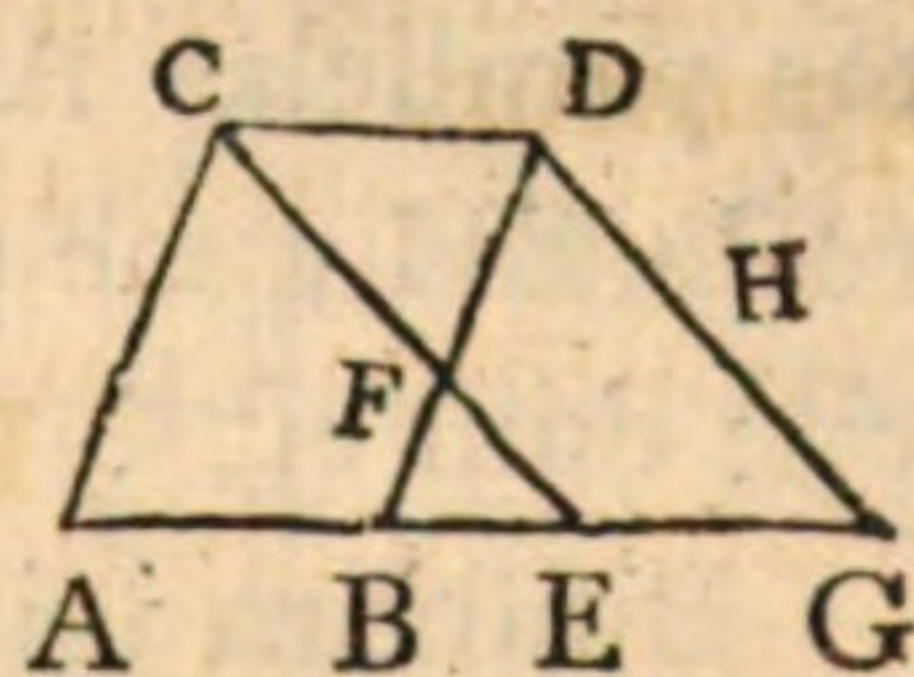
logrammum continent, et duo puncta intersectionum data sunt in uno ex lateribus, unum vero reliquorum tangit rectam positione datam, tanget et alteram rectam positione datam.

Sit ABCD parallelogrammum, et data fit in uno ex lateribus puncta A, B, unum vero C ex reliquis tangat rectam EF positione datam; tanget et alterum D positione datam.

Quoniam enim magnitudine data est recta AB, data erit et CD; et quoniam datus est angulus FEA, data erit ipsi aequalis angulus FCD. A puncto igitur C in recta positione data EF, ducta est recta CD magnitudine data in dato angulo FCD, et propterea punctum D tangit rectam positione datam^a, parallelam scilicet ipsi EF.

^a Prop. 37.
Dat.

Ponatur igitur EG a puncto E aequalis ipsi AB, ita ut puncta B, G sint ad easdem partes punctorum A, E; et ducatur GH parallela ipsi EF; erit GH recta quam tangit punctum D; hoc est si per A, B ducantur quaevis parallelae, quarum prima occurrat rectae EF in C, altera ipsi GH occurrat in D; juncta CD parallela erit ipsi AB. Aequiangula enim sunt EAC, GBD triangu-
la, ut igitur EA ad AC, ita est GB ad BD; est autem EA aequalis ipsi GB, quia AB ipsi EG, igitur est AC aequalis rectae BD; et sunt parallelae; igitur parallela est CD ipsi AB.



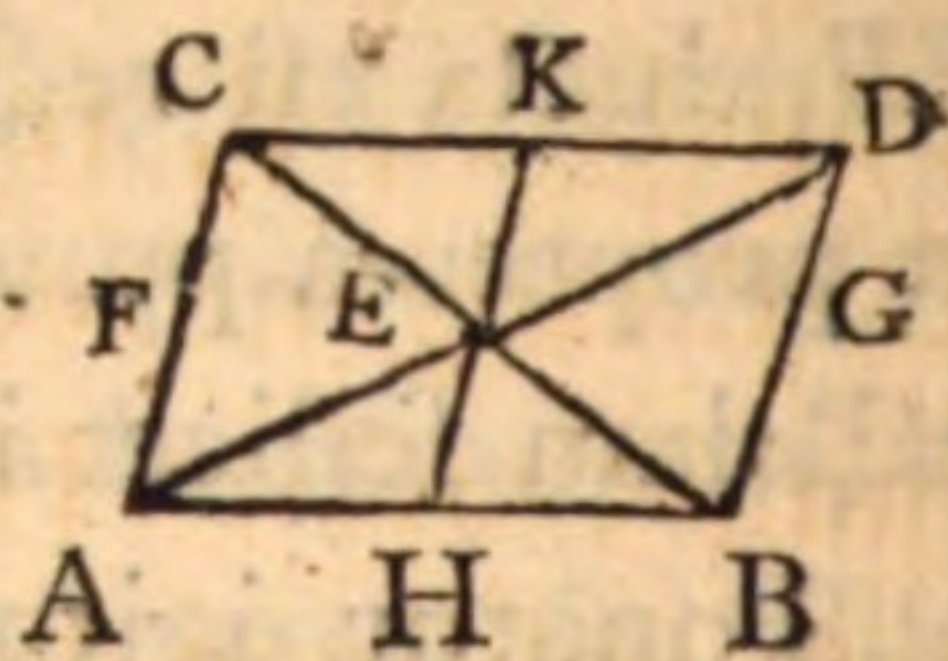
Vel si fiat EG aequalis ipsi AB , ut dictum fuit, et super AB describatur parallelogrammum quodvis $ABDC$, tangat autem angulus ejus C rectam EF ; erit juncta GD parallela

Y y

ipfi EF. Est enim CD aequalis ipfi (AB, hoc est rectae) EG, et sunt parallelae; igitur parallelae sunt EC, GD.

CAS. 2. Quando duae ex quatuor rectis sunt parallelae, non autem reliquae; et data sunt duo intersectionum puncta in una parallelarum per quae transeunt rectae parallelae et positione datae quas tangunt duo ex punctis reliquis; tanget et tertium punctum rectam positione datam.

Sint quatuor rectae AB, CD, AD, BC quarum AB, CD sunt parallelae; et data sint puncta A, B, reliquorum autem C, D, E unum C tangat rectam AF positione datam, aliud D tangat rectam BG positione datam ipfi AF parallelam; tanget et reliquum E rectam positione datam.



Quoniam enim parallelogrammum est ABDC, erit AE aequalis ipfi ED; quoniam igitur AD ducta inter positione datas parallelas AF, BG secta est in data ratione in puncto E, recta EH quae per E ducta est parallela ipsis AF, BG, positione data est ^a.

Bifariam igitur secetur AB in H, recta HK ipfi AF parallela erit ea quam tangit punctum E, hoc est si per quodvis punctum E in ipsa HK ducantur ad ipsas BD, AC rectae AD, BC, erit juncta CD parallela ipfi AB. Est enim ^b ut AH ad HB, ita AE ad ED, et ita CE ad EB; aequales igitur sunt AE, ED, ut et CE, EB. Et quoniam aequales sunt AE, EB ipsis DE, EC altera alteri, et aequales continent angulos, erit ^c angulus ABC aequalis ipfi DCB. Parallela igitur est CD ipfi AB.

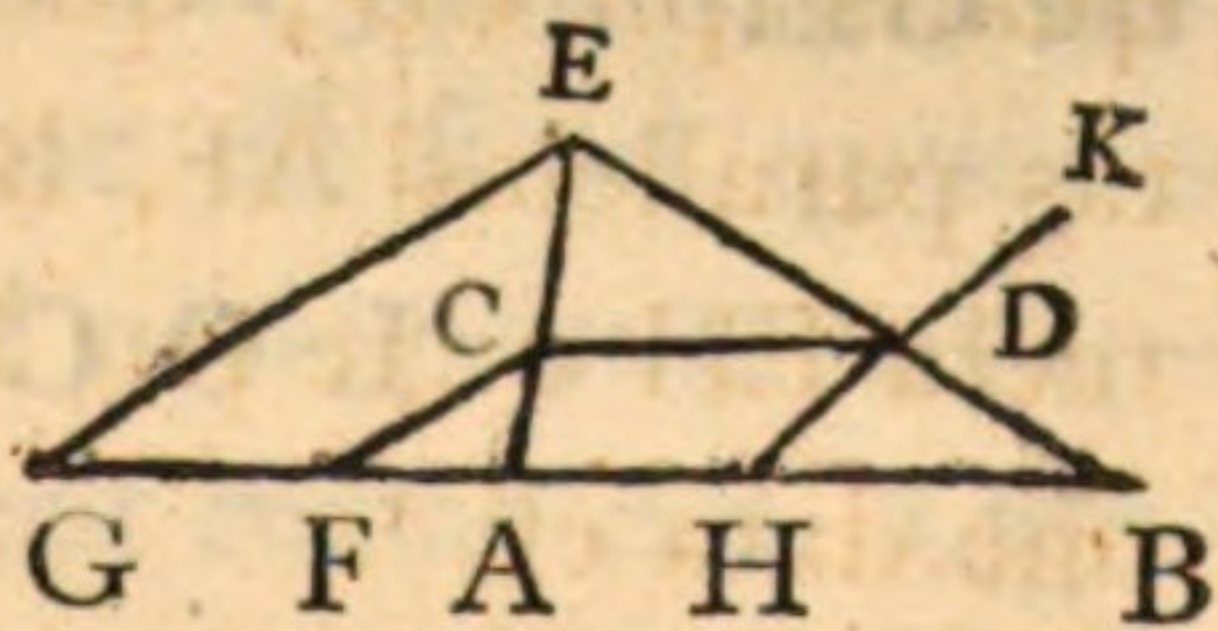
Vel si ducatur CD parallela et aequalis ipsi AB, et jungantur AD, BC sibi mutuo occurrentes in E; juncta EH parallela erit ipsi BD. Est enim AE aequalis ipsi ED quoniam parallelogrammum est ABDC, et est AH aequalis HB; igitur EH parallela^b est rectae AB.

^b 2. 6.

Cas. 3. Reliquis ut in Casu 2. manentibus, non tanseant ambae positione datae per puncta data.

Sint AB, CD, AC, BD quatuor rectae quarum AB, CD sunt parallelae, et in una harum AB data sint duo intersectionum puncta A, B, reliquorum autem trium C, D, E duo quaevis C, E tangant rectas positione datas inter se parallelas, viz. C tangat rectam FC, et E ipsam GE; tanget et reliquum D rectam positione datam.

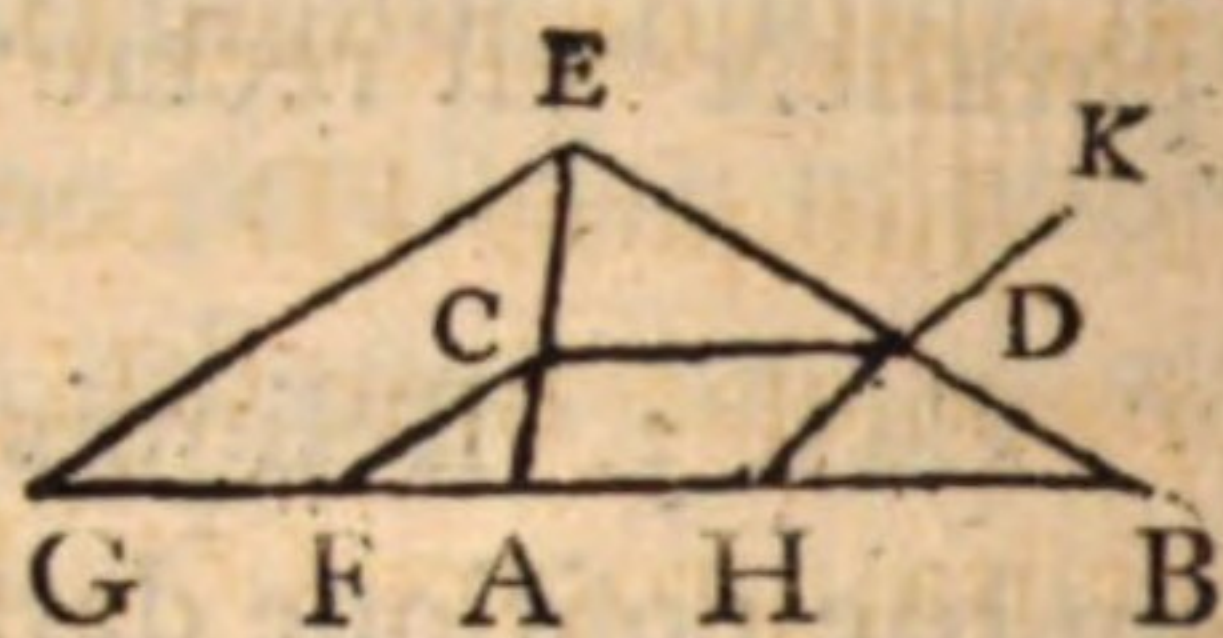
Quoniam enim est AF ad FG, ut AC ad CE, hoc est ut BD ad DE; et data est ratio AF ad FG, ipsae enim rectae datae sunt, data erit ratio BD ad DE. Igitur quoniam a dato puncto B ducta est BE ad rectam GE positione datam, et secta est BE in data ratione in puncto D; recta DH quae per punctum D parallela ducta est ipsi EG positione data erit^d. ^d 39. Dat.



Secetur igitur GB in H ita ut BH sit ad HG, ut AF ad FG, et per H ducatur HK parallela ipsi GE; erit HK recta quam tangit punctum D. Hoc est si ad punctum quodvis E in recta GE ducantur AE, BE quarum AE occurrit ipsi FC in C, BE vero ipsi HK in D; juncta CD parallela erit ipsi AB. Est enim AC ad CE, ut (AF ad AG, hoc est, ex constructione, ut

BH ad HG, hoc est propter parallelas ut) BD ad DE. Igitur est CD parallela ipsi AB.

Vel si ducatur quaevis CD ipsi AB parallela quae occurrat ipsis FC, HK in C, D, et jungatur AC occurratque ipsi GE in E; erunt puncta B, D, E in recta linea. Est enim, ex constructione, BH ad HG, ut AF ad FG, et, componendo, BG ad GH, ut AG ad GF; reliqua igitur AB est ad reliquam FH five CD, ut (AG ad GF, hoc est ut) AE ad EC. In recta igitur linea sunt puncta B, D, E.



Vel si ad quodvis punctum E in recta GE ducantur AE, BE, quarum AE occurrit ipsi FC in C, et ad BE ducatur CD parallela ipsi AB; juncta DH parallela erit ipsis GE, FC. Est enim BD ad DE, ut (AC ad CE, hoc est ut AF ad FG, hoc est, ex constructione, ut) BH ad HG; parallela igitur est DH rectae GE.

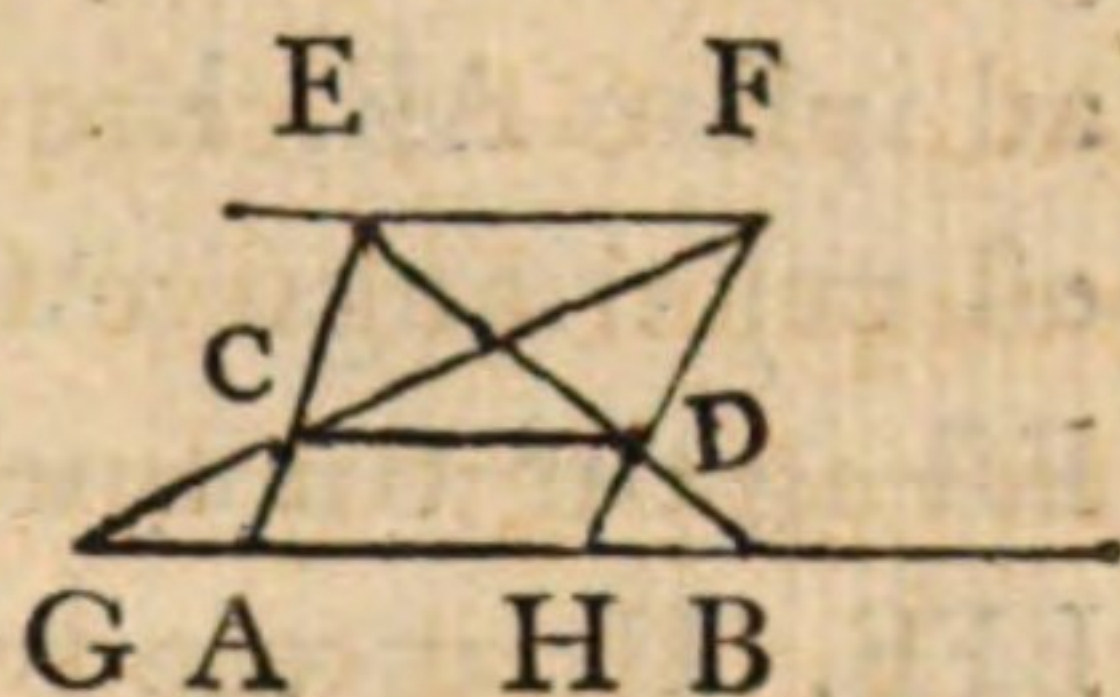
LOCUS II. PROP. VIII.

“ SI sint quatuor rectae quarum duae sint inter se parallelae,
 “ et in harum una data sint duo puncta intersectionum, duo
 “ vero reliquorum tangant rectas positione datas, non autem
 “ inter se parallelas; tanget et tertium punctum rectam po-
 “ sitione datam.”

CAS. I. Quando una ex rectis positione datis parallela est rectae in qua sunt duo puncta data.

Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD sunt inter se parallelae, et data sint puncta A, B; reliquorum autem C, D, E unum C tangat rectam GF positione datam, aliud E tanget rectam EF positione datam et ipsi AB parallelam; tanget et tertium D rectam positione datam.

Jungatur FD occurratque ipsi AB in H; quoniam igitur parallelae sunt GH, CD, ut GH ad CD, ita est (GF ad FC, et ita, propter GA, EF parallelas est AE ad EC, et ita) AB ad CD. Est igitur GH aequalis ipsi AB, data autem est AB, quare et GH; datumque est punctum G, datum igitur est H; et datum est punctum F, positione enim datae sunt GF, EF; igitur recta HF quam tangit punctum D positione data est.



Ponatur igitur GH aequalis rectae AB, ita ut puncta B, H sint ad easdem partes punctorum A, G, et HF jungatur; erit HF recta quam tangit punctum D; hoc est si ad quodvis punctum E in recta EF ducantur AE, BE quae occurrunt ipsis GF, HF in C, D; juncta CD parallela erit rectae AB. Quoniam enim aequales sunt GH, AB, erit GA aequalis ipsi HB; est autem, quia parallelae sunt GB, EF, ut AC ad CE, ita (GA ad EF, hoc est HB ad EF, et ita est) BD ad DE. Parallela igitur est CD ipsi AB. Et reliquae hujus Loci conversae brevius ostendi possunt.

CAS. 2. Quando duae positione datae rectae transeunt per puncta quae data sunt in una parallelarum.

Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD sunt

BFA, et recta EC ad ipsam CA. Quoniam vero aequalia ostensa sunt triangula AEF, BFE, ut AEF ad AFB, ita erit BFE ad idem AFB. Est igitur ED ad DB, ut EC ad CA, et parallelae erunt ^c rectae CD, AB. 2. 6.

Brevior hujus Demonstratio habetur in Prop. 132. Lib. 7. Pappi, quae est ejus Lemma 6. in Porismata. viz. Ponatur GH aequalis ipsi GF, et jungantur AH, HB; erit AHBF parallelogrammum ^d, ac propterea ut AE ad EC, ita (HE ad EF, et ^d 4. 1. ita est) BE ad ED. Igitur est CD parallela ipsi AB. et 29. 1.

Alia hujus Loci conversa haec est; Si ducatur quaevis CD parallela ipsi AB, occurratque positione datis BF, AF in C, D, et junctae AC, BD sibi mutuo occurrant in E, recta erit linea quae per G, F, E transit. Quoniam enim parallelae sunt AB, CD erit triangulum AEF aequale ipsi BEF, ut in Demonstratione Loci ostensum fuit. Est autem AE ad EC, ut (triangulum AFE ad triangulum EFC, hoc est ut triangulum BFE ad idem EFC, hoc est ut recta BF ad ipsam FC, five) HA ad FC. Et parallelae sunt AH, CF, igitur in recta linea sunt puncta G, F, E.

CAS. 3. Quando una tantum positione datarum transit per datum punctum in una parallelarum.

Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD sunt inter se parallelae, et data sint A, B puncta; reliquorum autem C, D, E unum D tangat rectam AF positione datam, aliud E tangat rectam GF positione datam; tanget et punctum C rectam positione datam.

Juncta CF occurrat ipsi AB in H, et GF ipsi CD in K. Et quoniam parallelae sunt AB, CD, ut GB ad KD, ita est AG

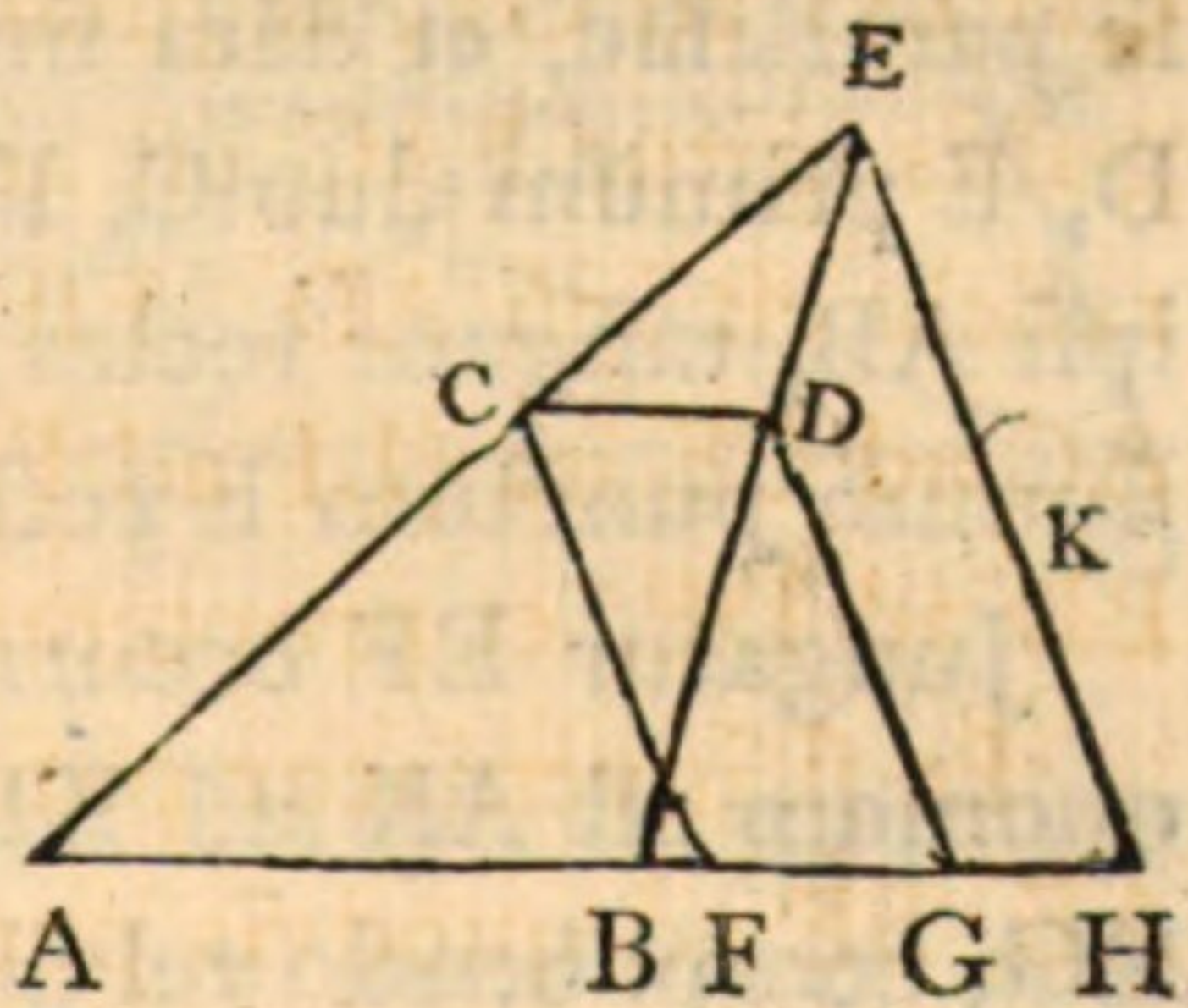
hoc est ut) CK ad GH ; aequiangula igitur sunt triangula CKF , HGF ; quare in recta linea sunt C , F , H puncta.

CAS. 4. Quando neutra positione datarum transit per datum punctum in una parallelarum, nec una ipsarum parallela est rectae in qua data sunt duo puncta.

Sint AB , CD , AC , BD quatuor rectae quarum AB , CD sunt inter se parallelae, et data sint puncta A , B , reliquorum autem C , D , E duo tangant rectas positione datas, tanget et reliquum rectam positione datam.

imo. Sint AB , CD , AC , BD quatuor rectae, ut dictum fuit, et puncta C , D tangant rectas FC , GD positione datas et inter se parallelas, tanget reliquum punctum E rectam positione datam.

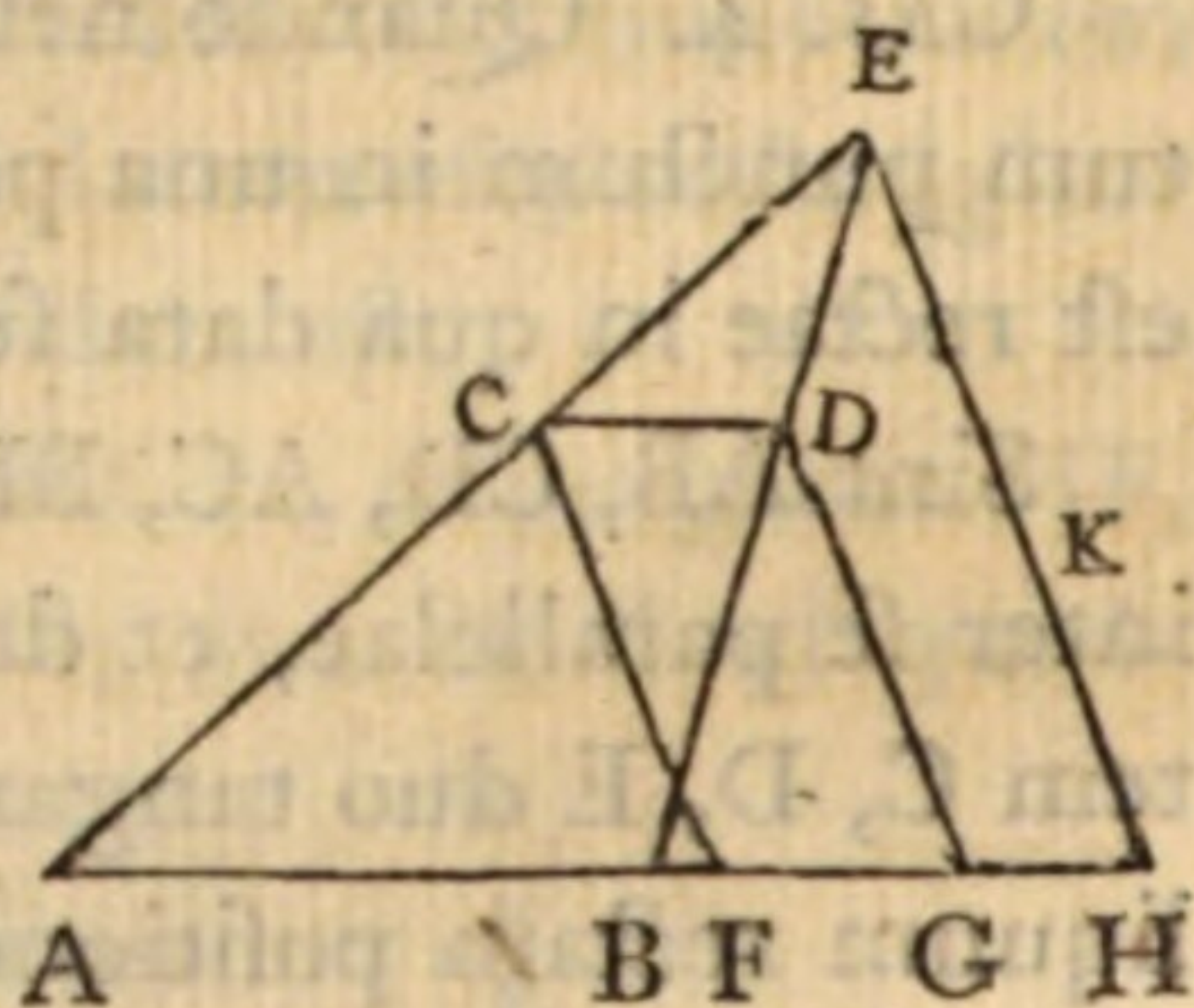
Ducatur EH parallela ipsi DG ; et quoniam $CFDG$ est parallelogrammum, erit CD aequalis ipsi FG ; est autem AB ad CD , hoc est ad FG , ut (BE ad ED , hoc est ut) BH ad HG , et datae sunt AB , FG , data igitur est ratio BH ad HG ; et data est BG , datum igitur est punctum H , et est recta HE parallela positione datae GD , quare recta HE , quam tangit punctum E positione data est.



Fiat igitur ut AB ad FG , ita BH ad HG , et per H ducatur recta HK parallela rectae GD , erit haec recta quam tangit punctum E , hoc est si ad quodvis punctum E in HK ducantur AE , BE quae occurrant rectis FC , GD in C , D punctis, juncta CD parallela erit rectae AB .

Est enim BH ad HG, ut BE ad ED, et quoniam ut AB ad FG, ita facta est BH ad HG, erit per 12. aut 19. 5. AH ad HF, ut BH ad HG; igitur est AE ad EC, ut (BH ad HG, hoc est ut) BE ad ED, et propterea parallela est CD rectae AB.

Et manente eadem Constructione, si scilicet fiat ut AB ad FG, ita BH ad HG, et ducatur utcunque recta CD parallela ipsi AB, occurratque positione datis FC, GD in C, D, et AC, BD sibi mutuo in E, juncta EH parallela erit rectae GD, five FC. Est enim BE ad ED, ut (AB ad CD, hoc est ad FG, et ita est, ex constructione) BH ad HG. Parallela igitur est EH rectae DG.

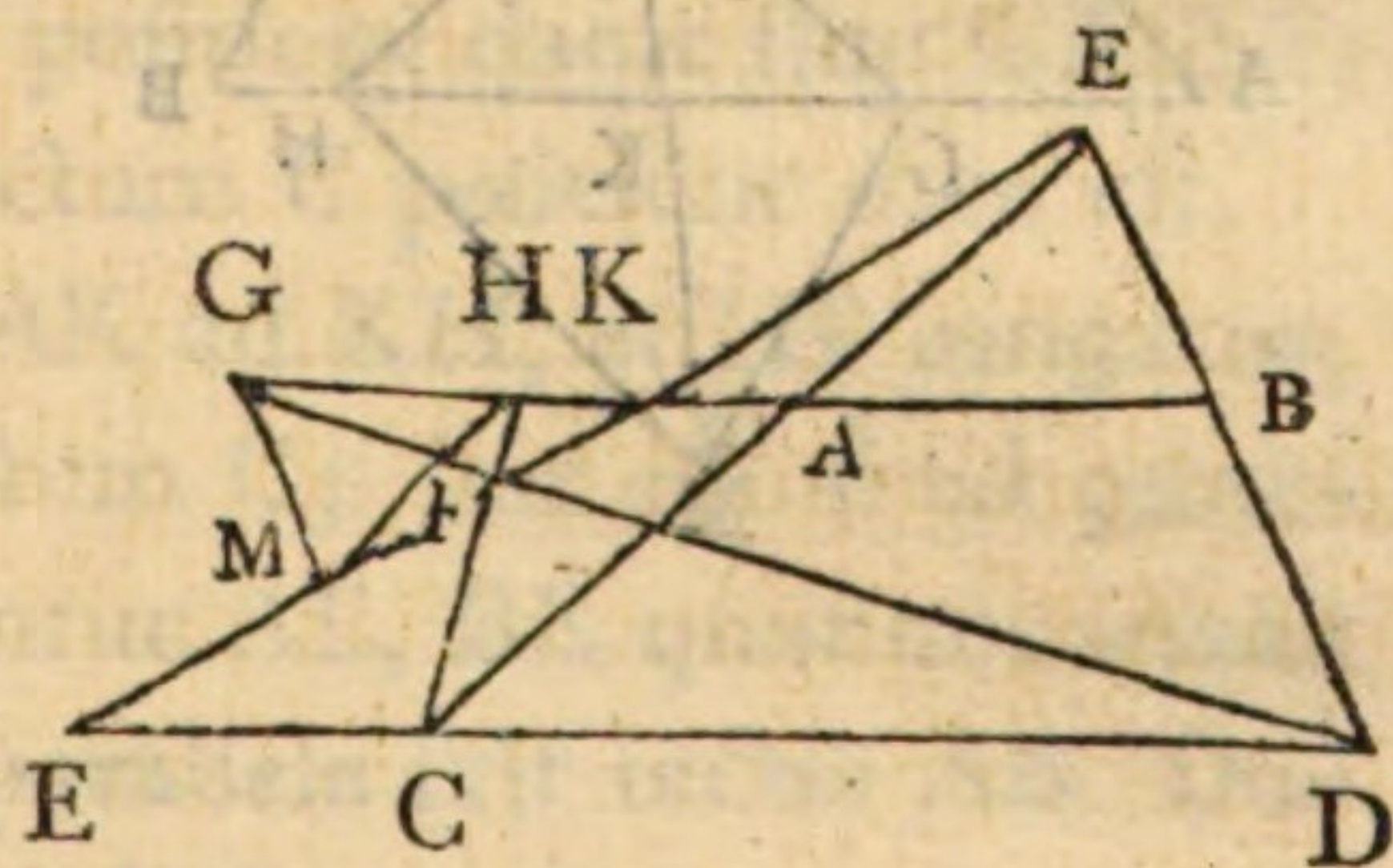
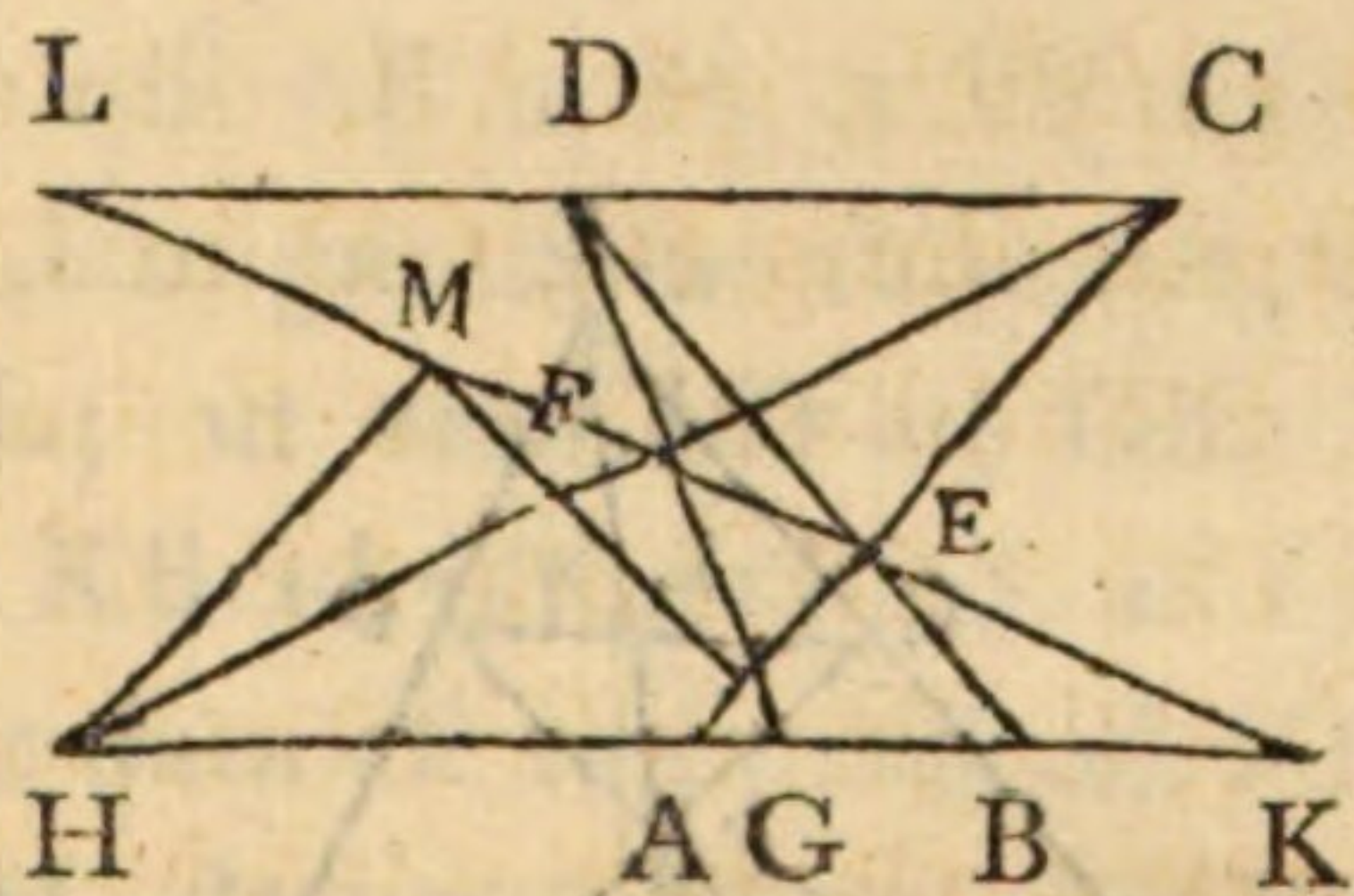
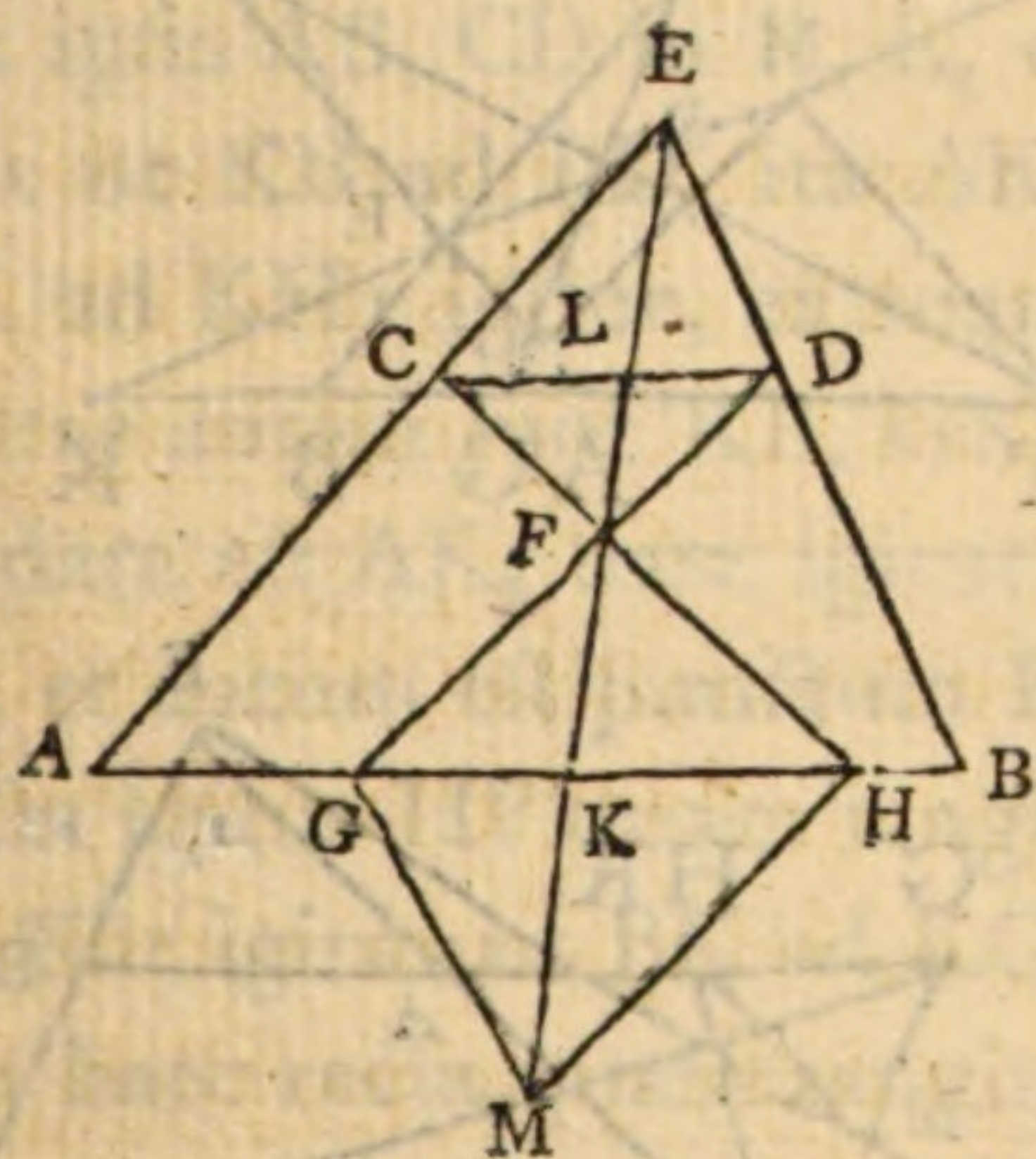


2do. Non sint positione datae inter se parallelae, scilicet sint AB, CD, AC, BD quatuor rectae, quarum AB, CD sunt inter se parallelae, et data sint puncta A, B, reliquorum autem C, D, E primùm duo C, D, quae sunt in recta quae parallela est ipsi AB, tangant rectas positione datas HF, GF; tanget et reliquum punctum E rectam positione datam.

Jungatur EF occurratque ipsis AB, CD in K, L; igitur quoniam est AK ad KB, ut (CL ad LD, hoc est ut) HK ad KG, componendo vel dividendo, aut dividendo inverse, et permutando, erit AB ad GH, ut BK ad KG; datae autem sunt AB, GH, quare data est ratio BK ad KG; et data est GB, datum igitur est punctum K; et datum est F, recta igitur KF quam tangit punctum E positione data est.

Fiat igitur ut AB ad GH, ita BK ad KG, et jungatur KF,

erit haec recta quam tangit punctum E; hoc est si ducantur AE, BE ad punctum quodvis E in recta KF, occurrantque ipsis HF, GF in C, D; juncta CD parallela erit ipsi AB. Ducatur enim ad EK recta GM parallela ipsi BE, et jungatur MH. Quoniam igitur est BE ad GM, ut (BK ad KG, hoc est, ex constructione, ut) AB ad GH, permutando, erit ut BE ad BA, ita MG ad GH, et sunt circa aequales angulos alternos, vel quorum unus est interior et alter exterior ipsi oppositus, igitur



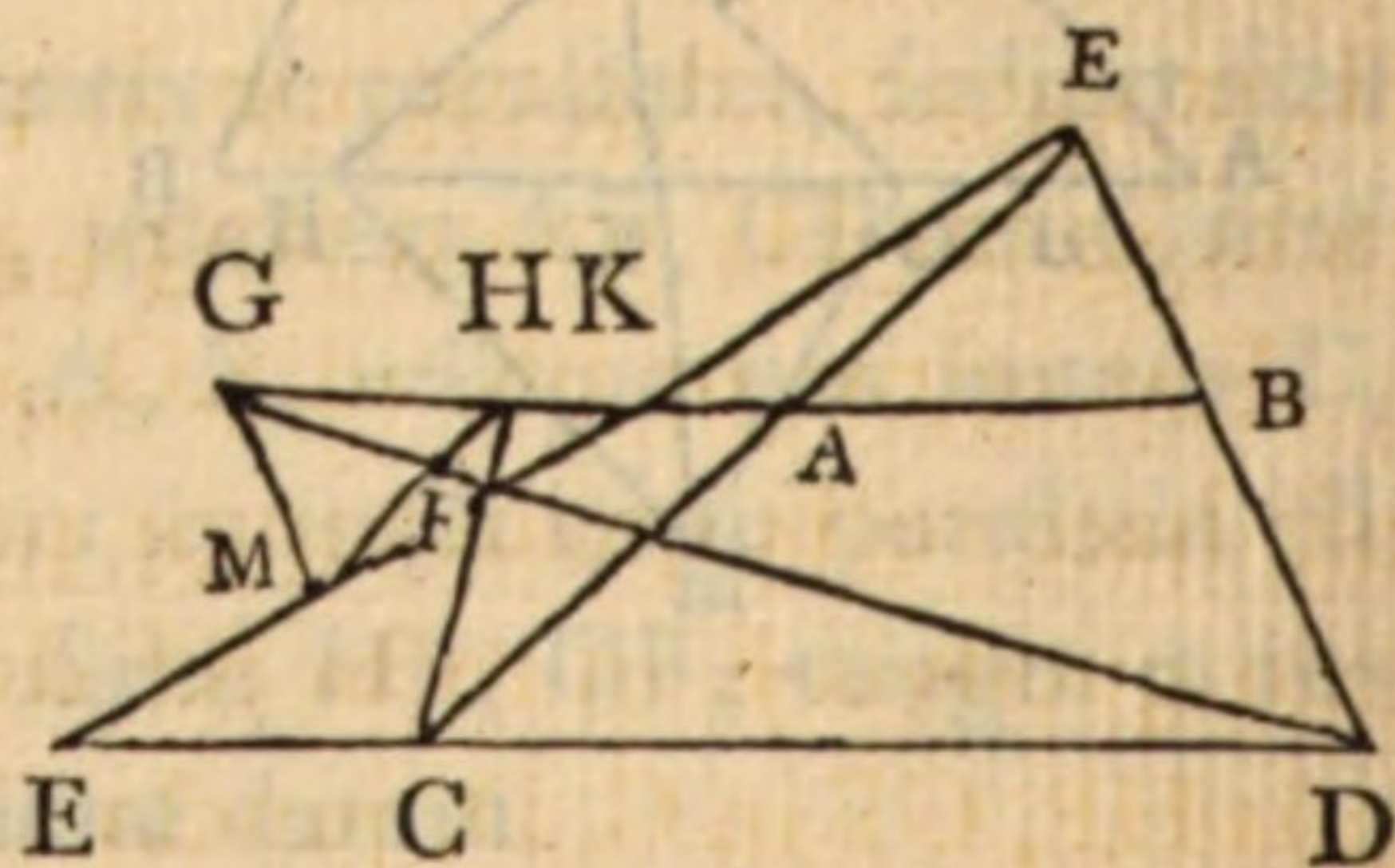
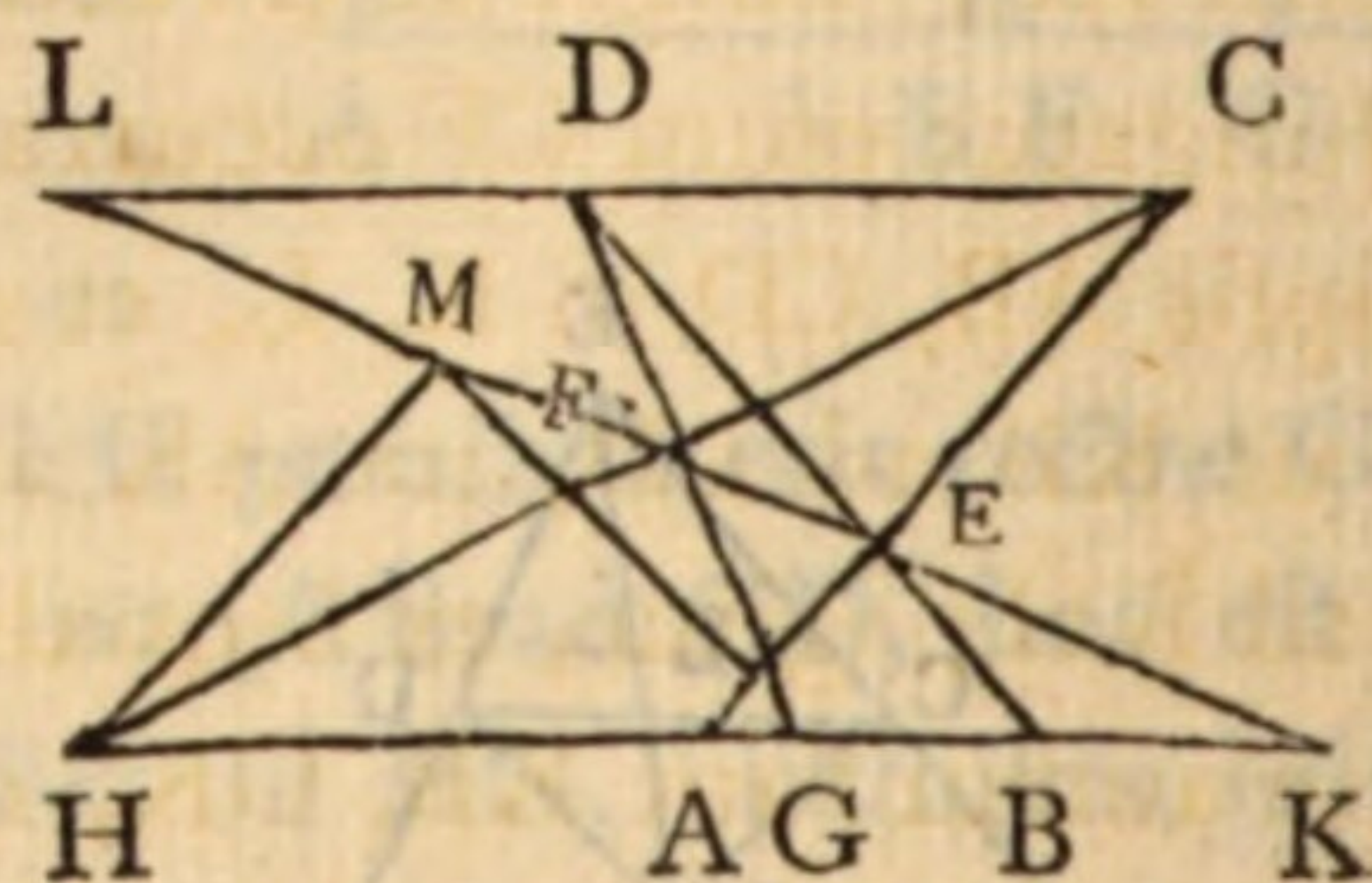
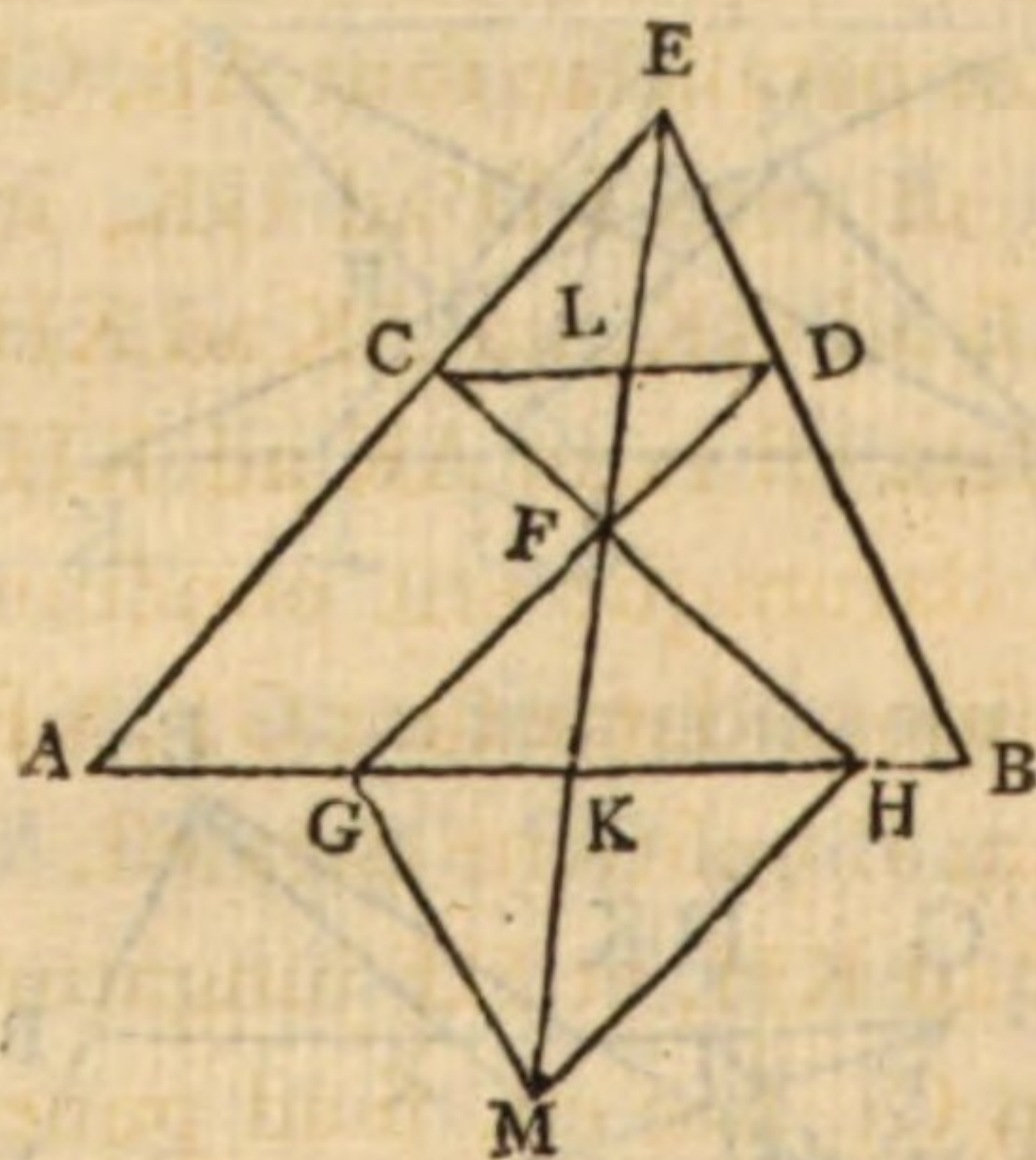
triangulum ABE aequiangulum est ipsi HGM, et propterea angulus BAE aequalis est ipsi GHM, quare parallela est MH rectae AE. Est autem, propter parallelas GM, EB, ut GF ad FD, ita (MF ad FE, hoc est, quia parallelae sunt MH, AE ita) HF ad FC; et, permutando, est GF ad FH, ut FD ad FC; igitur [2. 6.] parallela est CD rectae GH, sive AB.

Et, manente eadem Constructione, qua scilicet facta est ut

AB ad GH, ita BK ad KG, si ducatur quaevis recta CD parallela ipsi AB, occurratque positione datis HF, GF in C, D, et junctae AC, BD sibi mutuo occurrant in E, erunt puncta E, F, K in recta linea.

Haec est Propositio 128. Lib. 7. Pappi, quam demonstrat ut sequitur.

Ducatur per G recta linea GM parallela ipsi DB, et junctae EF ad M producatur. Quoniam igitur est ut AB ad GH, ita BK



ad KG; ut autem AB ad GH, ita est BE ad GM, quod duae duabus sunt parallelae^a; ut igitur BK ad KG, ita BE ad GM;

^a Longa explicatio quam adfert Commandinus in nota sua B in pag. 240. *a* et sequente ad ostendendam hanc proportionem erronea est et inepta. Et in nota C, ad verba "quod duae duabus sint parallelae" veretur ne haec ab aliquo addita sint; sunt autem omnino necessaria, AK enim parallela est ipsi CD ex hypothesis, at GM est parallela ipsi DB ex constructione, et ex primo horum sequitur esse AB ad CD, ut BE ad ED, et ex altero esse CD ad HG, ut

atque est BE parallela ipsi GM, ergo recta linea est quae per E, K, M transit, et est punctum F in recta EM, igitur et puncta E, F, K sunt in recta linea.

Et in Cas. 3. quando puncta C, D tangant rectas positione datas, eadem similiter ostendi possunt.

Sint jam, in articulo 2do Cas. 4. puncta D, E quorum E non est in recta CD quae parallela est ipsi AB, ea quae tangunt rectas positione datas, scilicet tangat D rectam GF, et E rectam KF; tanget et C rectam positione datam.

Jungatur enim CF occurratque ipsi AB in H, et EF occurrat ipsis AB, CD in K, L, et quoniam parallelae sunt AB, CD erit ut KB ad LD, ita AK ad CL; ut vero LD ad GK, ita CL ad KH; igitur, ex aequali, ut KB ad GK, ita AK ad KH. Datae autem sunt KB, GK, quare data est ratio AK ad KH; et data est AK, data igitur est KH, datumque erit punctum H, et datum est punctum F quia positione datae sunt GF, KF, recta igitur HF quam tangit punctum C positione data est.

Fiat igitur ut BK ad KG, ita AK ad KH, et HF jungatur, erit haec recta quam tangit punctum C; hoc est, si ad punctum quodvis E in recta KF ducantur AE, BE quae occurrant ipsis HF, GF in C, D, juncta CD parallela erit rectae AB. Ducatur enim ad FK recta GM ipsi BE parallela, et jungatur MH. Et quoniam est ut BK ad KG, ita AK ad KH, per 12. aut 19. 5. erit AB ad GH, ut (BK ad KG, et ita propter parallelas BE, GM, est) BE ad GM, et permutando, ut AB ad

(DF ad FG, hoc est ut) DE ad GM; igitur, ex aequali, est AB ad HG, ut BE ad GM.

N. B. "Et permutando" ad notam B in textu Commandini debet poni post "AB ad BK, ita HG ad GK.

BE, ita est HG ad GM; et sunt circa aequales angulos ABE, HGM, aequiangula igitur sunt triangula ABE, HGM, et angulus propterea BAE est aequalis ipsi GHM, parallela igitur est MH ipsi AE. Est autem GF ad FD, ut (MF ad FE, quia parallelae sunt GM, BE, et ita est) HF ad FC, et permutando; igitur CD est ipsi AB parallela, [2. 6.]

Et si inveniatur punctum H, ut dictum fuit, et ducantur AE, BE ad quodvis punctum E in recta KF, quarum BE occurrat ipsi GF in D, et ad AE ducatur DC parallela ipsi AB; erunt puncta C, F, H in recta linea.

Quoniam enim parallelae sunt CD, AB, est DL ad LC ut (BK ad KA, hoc est, ex constructione, ut) GK ad KH, et, permutando, DL ad GK, ut LC ad KH. Est autem LF ad FK, ut (DL ad GK, hoc est ut) LC ad KH; aequiangula igitur sunt triangula CLF, HKF, et in recta linea erunt C, F, H puncta.

CAS. 5. Quando punctum in quo sibi mutuo occurrunt duae rectae positione datae, est in recta in qua data sunt duo puncta; caeteris ut in Cas. 4. manentibus.

Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD sunt inter se parallelae, et data sint puncta A, B, et reliquorum C, D, E unum C tangat rectam FC positione datam, aliud E tangat rectam FE positione datam, sitque punctum F in recta AB; tanget et punctum D rectam positione datam.

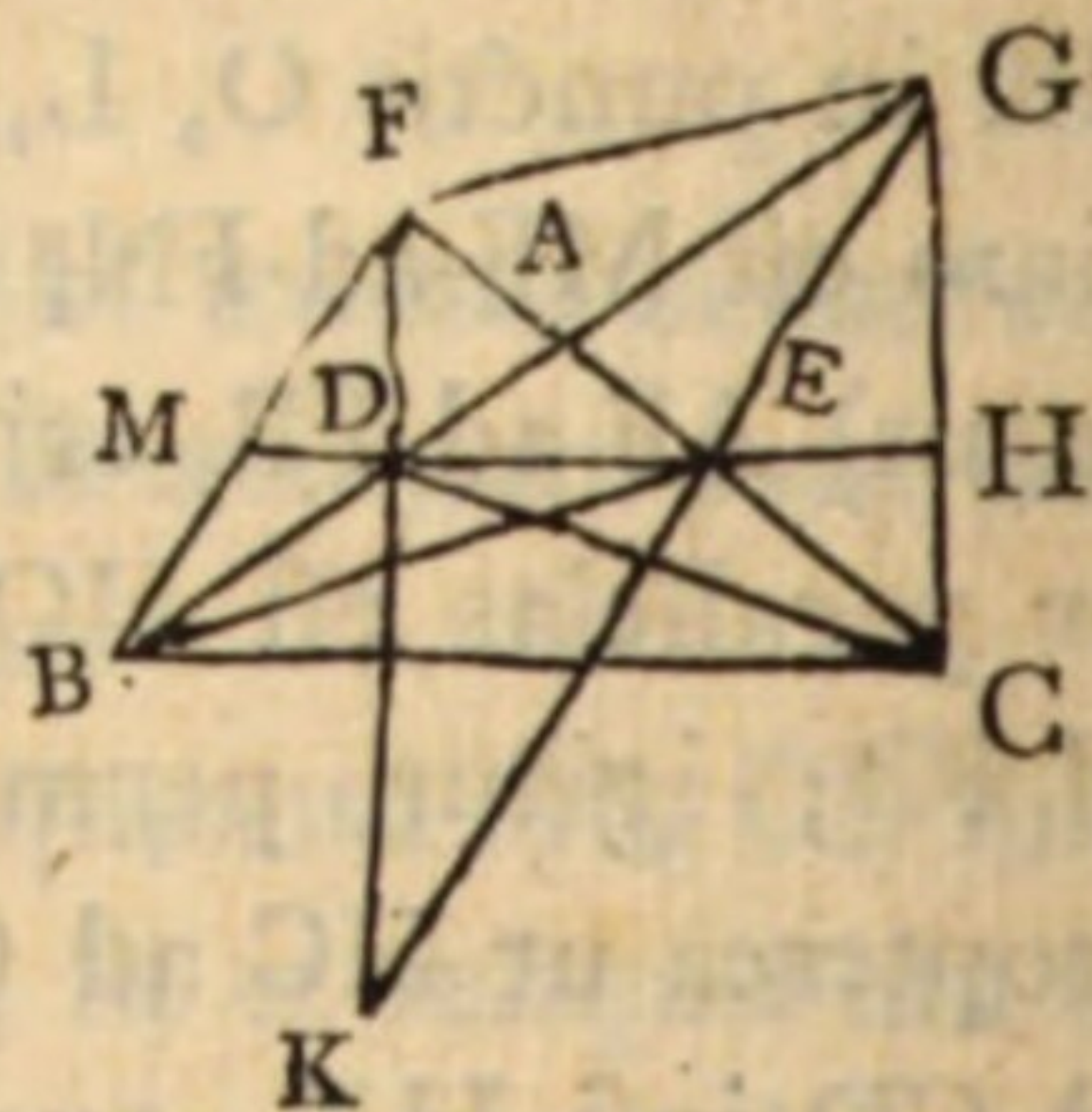
Jungatur DF, et occurrat EF ipsi CD in G. Quoniam igitur positione datae sunt FC, FG, et est CG parallela positione datae AB, specie datum est triangulum FCG; data igitur est ratio FG ad GC, et data est ratio CG ad GD, eadem scilicet

(AF ad FB, et ita) CG ad GD; igitur, ex aequali, ut FL ad LK, ita FG ad GD. In recta igitur sunt F, D, K puncta.

P R O P. IX.

“SINT quatuor rectae AB, AC, BC, DE quarum BC, DE
 “sunt inter se parallelae, et ab intersectione alterutrius pa-
 “rallaelae DE et alterius ex reliquis rectis puta a puncto D
 “ducatur utcunque recta DF ad AC, et jungatur FB; a re-
 “liqua autem intersectione E ejusdem parallelae ducatur EG
 “ad rectam AB parallela ipsi FB; erit juncta GC parallela
 “primò ductae DF.”

Occurrat FD ipsi GE in K, et DE occurrat ipsi GC in H; et quoniam parallelae sunt BF, EG, ut FD ad DK, ita est (BD ad DG, et ita propter parallelas BC, DH est) CH ad HG. Quoniam igitur inter tres rectas FEC, DEH, KEG quae in uno puncto E conveniunt ductae sunt duae rectae FDK, CHG quae in eadem ratione sectae sunt in punctis D, H, erunt FK, CG inter se parallelae.



A L I T E R.

Quoniam parallelae sunt GE, BF, ut GA ad AB, ita est EA ad AF; ut vero BA ad AD, ita CA ad AE; igitur ex aequali in proportione perturbata, ut GA ad AD, ita CA ad AF, et permutando, ut GA ad AC, ita DA ad AF. Aequiangula igitur sunt GAC, DAF triangula, quare angulus CGA

est aequalis ipsi FDA, et propterea parallelae sunt CG, FD.

Haec est Prop. 134. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus nonum in Porismata Euclidis; plenius autem eam enuntiavimus. Eleganter Pappus Propositionem demonstrat ut sequitur,

Jungantur BE, DC, FG; erit triangulum DBE aequale triangulo DCE; commune apponatur triangulum DAE, ergo totum ABE toti CDA est aequale. Rursus quoniam BF parallela est ipsi EG, triangulum BFE aequale est triangulo BFG; auferatur ABF, reliquum igitur ABE reliquo AGF aequale erit; sed triangulum ABE est aequale triangulo ACD, ergo et ACD ipsi AGF est aequale; et communi appposito triangulo ACG, fiet totum triangulum CDG aequale toti CFG; et est in eadem basi CG; quare^a CG ipsi DF est parallela.

^a 39. 1.

COR. Et si positione data sit recta DF, datumque sit punctum C, reliquis manentibus, tanget punctum G intersectio ipsarum BD, EG rectam CG positione datam, nam CG ducta est per datum punctum C parallela rectae DF positione datae.

Una ex conversis hujus Propositionis est haec quae sequitur; Si a duobus punctis B, C inflectantur duae rectae BF, CF, et rursus ab iisdem inflectantur BG, CG; ab occurso autem F ducatur ad alterutrum ex secundò inflexis, puta ad BG quae a puncto B ducta est, recta FD parallela reliquae ex secundò inflexis CG; et ab occurso G secundò inflexarum ducatur ad eam ex primò inflexis quae a puncto C ducta est recta GE parallela reliquae ex primò inflexis BF; juncta DE parallela erit junctae BC.

Quoniam enim parallelae sunt FD, CG, erit triangulum CDG aequale triangulo CFG; auferatur commune CAG, erit reliquum CAD aequale reliquo GAF. Et quoniam parallelae

funt GE, BF, erit triangulum BEF aequale triangulo BGF, et ablato communi BAF, erit reliquum BAE aequale (reliquo GAF, hoc est) ipsi CAD; auferatur rursus commune DAE, erit reliquum BDE aequale reliquo CED, et est in eadem basi DE, igitur^a parallela est DE rectae BC.

Propositio haec nona non continetur in Pappi Propositione generali. Videtur autem Propositionem aliquam cui inferviebat, puta Corollarium praecedens, aut aliquod aliud simile, fuisse inter Porismata Euclidis.

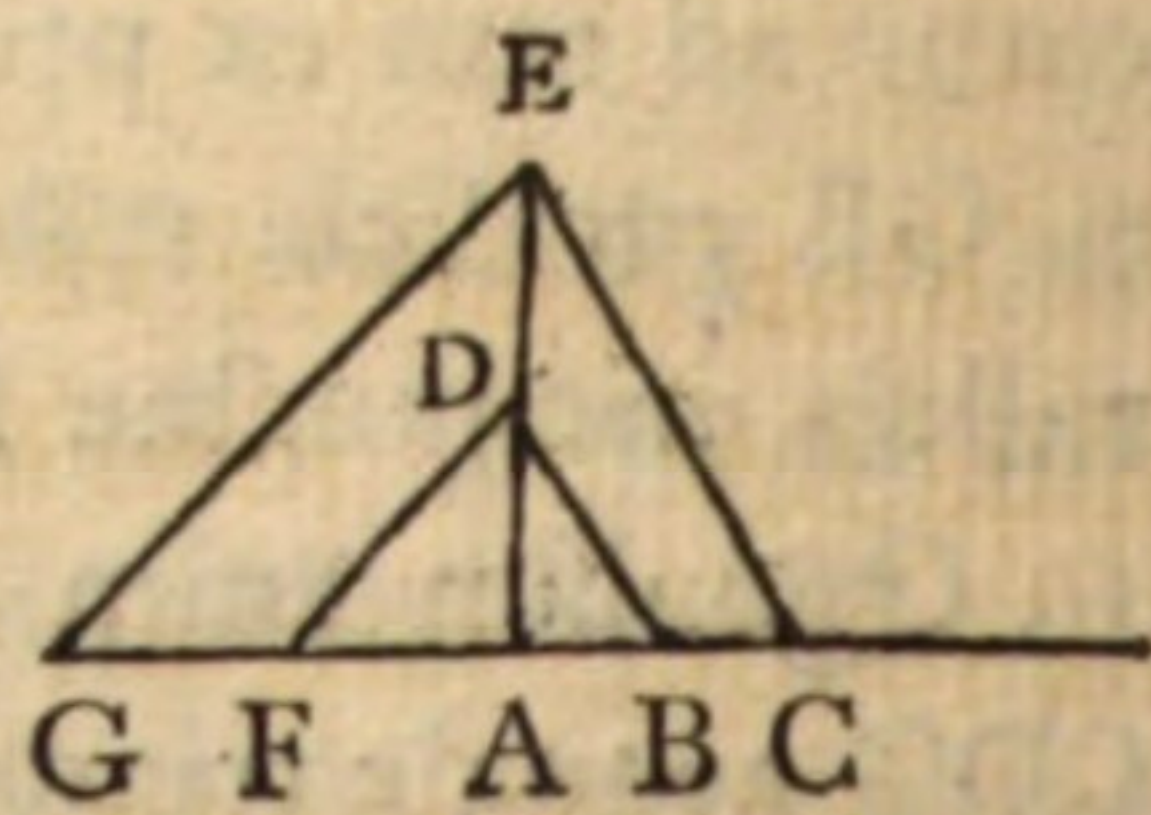
P R O P. X.

LOCUS III. “ Quando duae ex quatuor rectis sunt parallelae, et data sunt tria intersectionum puncta in una reliquarum; aliud vero punctum tangit rectam positione datam; tanget et reliquum rectam positione datam.”

Sint quatuor rectae AB, AD, BD, CE quarum BD, CE sunt inter se parallelae, et in una reliquarum AB data sint tria puncta A, B, C, aliud vero D tangat rectam FD positione datam; tanget et reliquum punctum E rectam positione datam.

Quoniam enim est ut AB ad BC, ita AD ad DE, et datae sunt AB, BC, data erit ratio AD ad DE.

Igitur quoniam a dato puncto A ducta est AD ad rectam positione datam FD, et in AD sumptum est punctum E faciens rationem AD ad DE datam, recta EG quae per E ducta est parallela ipsi



^a 39. Dat. DF data erit positione^a.

Fiat igitur ut AB ad BC, ita AF ad FG, et ducatur GE ipfi FD parallela; erit GE recta quam tangit punctum E; hoc est si a punctis B, C ducantur quaevis rectae inter se parallelae BD, CE quae occurrant ipfis FD, GE in punctis D, E; erunt A, D, E puncta in recta linea. Quoniam enim est ut AB ad BC, ita AF ad FG; invertendo, erit CB ad BA, ut GF ad FA, et componendo vel dividendo, ut CA ad AB, ita GA ad AF; igitur^b ^{b12, aut 19.5.} ut CA ad AB, ita (GC ad FB, et ita) est CE ad BD, quia aequiangula sunt triangula CEG, BDF; igitur in recta linea sunt A, D, E puncta.

Et, manente eadem constructione, si a punctis B, C ducantur quaevis duae parallelae BD, CE quarum BD ipfi FD occurrit in D, et juncta AD occurrat rectae CE in E; ducta EG parallela erit ipfi DF. Quoniam enim propter parallelas est AD ad DE, ut (AB ad BC, hoc est, ex constructione, ut) AF ad FG; erit^c EG parallela rectae DF. ^{c 2.6.}

P R O P. XI.

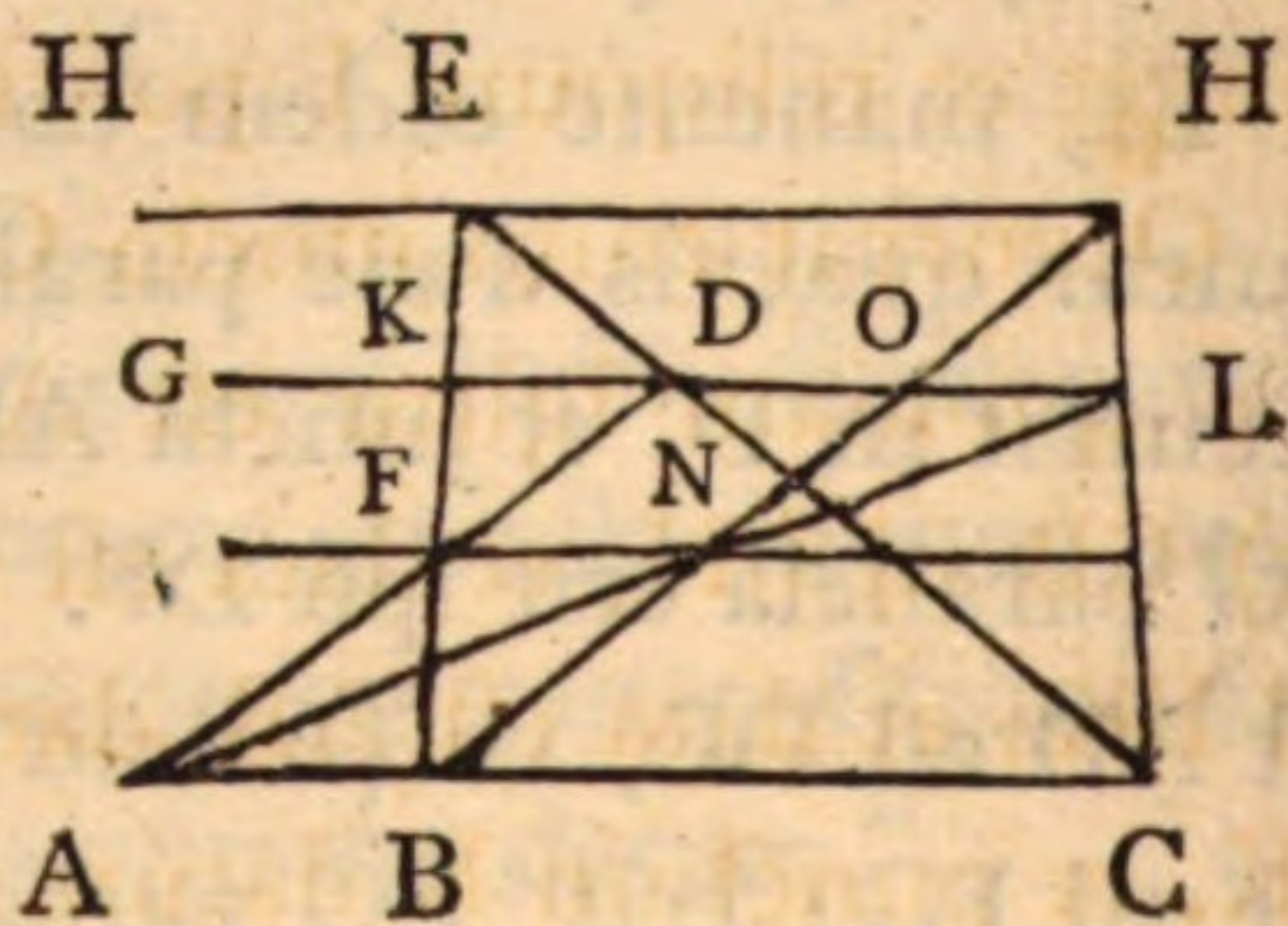
LOCUS IV. “ Quando nullae ex quatuor rectis sunt inter
“ se parallelae, et data sunt tria intersectionum puncta in ea-
“ rum una; duo vero ex reliquis punctis tangunt rectas po-
“ sitione datas ei in qua sunt data puncta parallelas. Tanget
“ et reliquum punctum rectam positione datam.”

Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et in una ipsarum data sint tria intersectionum puncta A, B, C; duo vero D, E ex reliquis tangant rectas GD, HE positione datas, et ipfi AB parallelas; tanget et reliquum punctum F rectam positione datam.

Quoniam enim a dato puncto B ad parallelas HE, GK po-
^a 38. Dat. sitione datas ducta est BE, data erit ^a ratio BE ad EK, igitur
 et ratio BC ad KD data est; data autem est recta BC, quare
 et KD data est; et data est AB, ratio igitur AB ad KD data
 est. Est autem AB ad KD, ut AF ad FD; et propterea ratio
 AF ad FD est data. Quoniam igitur positione data est GKD,
^b 39. Dat. recta ipsi parallela per punctum F ducta positione data erit ^b.

Ducatur igitur a puncto C recta quaevis CLM, occurrat-
 que positione datis GK, HE in L, M; junctae autem AL, BM
 sibi mutuo occurrant in puncto
 N; parallela ipsi AB ducta per
 N erit recta quam tangit punc-
 tum F; hoc est si ducantur BE,
 CE ad quodvis punctum E in
 recta HE, et occurrat CE ipsi
 GK in D, BE vero occurrat pa-
 rallelae ipsi AB per N ductae in
 F; erunt A, F, D puncta in recta linea. Occurrat enim BM
 ipsi GK in O, et quoniam ut BC ad KD, ita est (BE ad EK,
 et ita BM ad MO, et ita est) BC ad OL, erit KD aequalis rec-
 tae OL. Et est BF ad FR, ut (BN ad NO, hoc est ut) AB ad
 OL, five KD, aequiangula igitur sunt ABF, DKF triangula,
 et propterea in recta linea sunt A, F, D puncta.

Vel invento puncto N, ut dictum fuit, si ducantur BE, CE
 ad rectam HE quarum CE occurrit ipsi GK in D, et juncta
 AD occurrit ipsi BE in F; erit juncta FN parallela ipsi AB.
 Erunt enim BF ad FK, ut (AB ad KD, five OL, ut ostensum
 fuit, hoc est ut) BN ad NO; parallela igitur est FN ipsi KO,
 hoc est rectae AB.



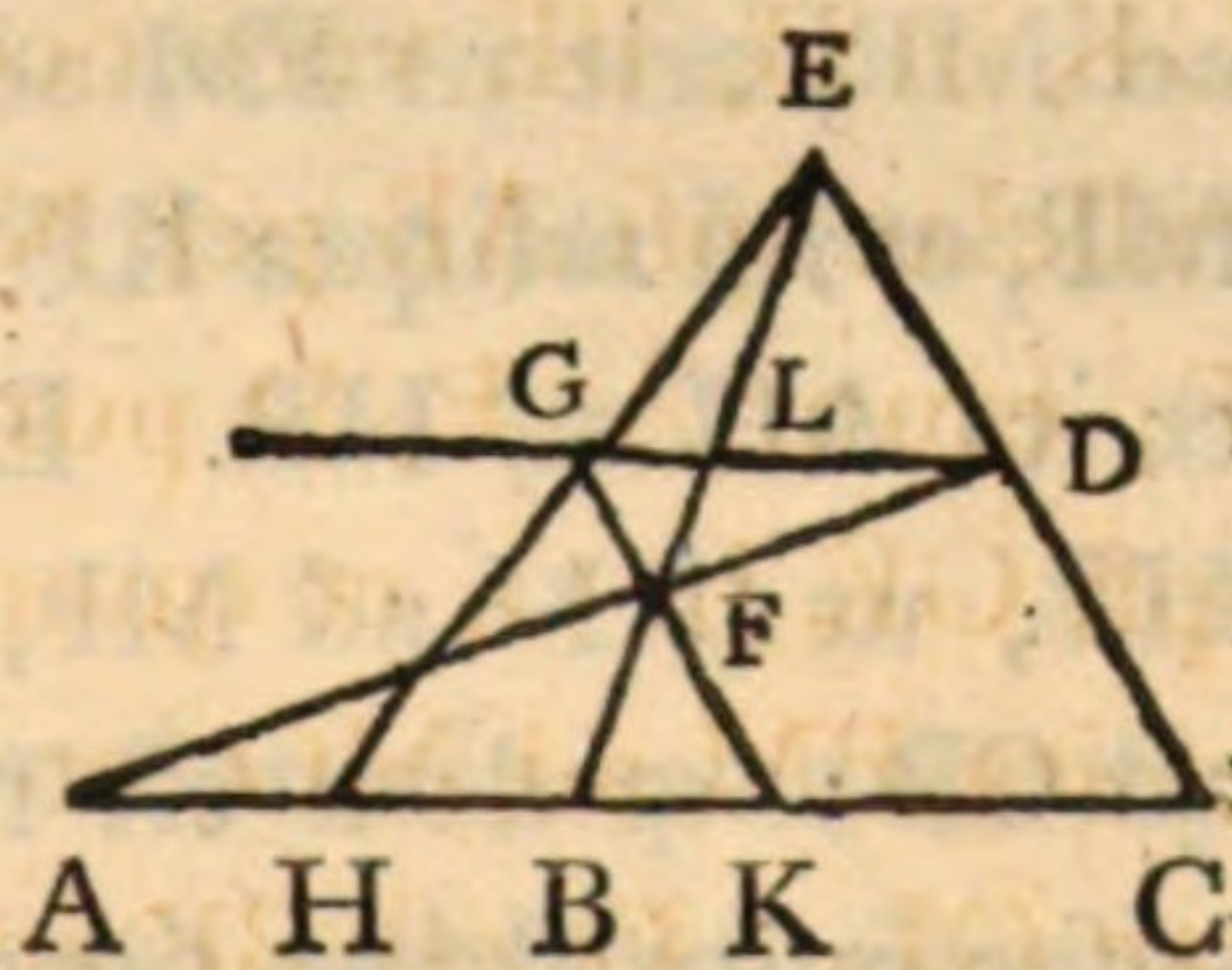
PROP. XII.

LOCUS V. “ Quando una tantum rectarum positione datarum parallela est rectae in qua data sunt tria intersectionum puncta; reliquis ut in Loco 4to manentibus.”

Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et in una ipsarum data sint tria intersectionum puncta A, B, C; reliquorum autem D, E, F unum D tangat rectam GD positione datam ipsi AB parallelam, aliud E tangat rectam GH positione datam; tanget et reliquum F positione datam.

Occurrat enim juncta GF ipsi AB in K, et BE ipsi GD in L; quoniam igitur est AB ad BK, ut (DL ad LG, hoc est ut) CB ad BH, et data est ratio CB ad BH, data erit ratio AB ad BK; et data est AB, data igitur est BK, et punctum K datum; et datum est punctum G; igitur recta GK quam tangit punctum F positione data est.

Fiat igitur ut CB ad BH, ita AB ad BK, et jungatur KG, erit haec recta quam tangit punctum F; hoc est si ducatur quaevis CE, occurratque rectis GD, GH in D, E, junctaque BE occurrat ipsi KG in F; erunt puncta A, F, D in recta linea. Est enim CB ad BH, ut DL ad LG, quare et AB ad BK, est ut DL ad LG; et, permutando, AB ad DL, ut (BK ad GL, hoc est ut) BF ad FL. Et est BFL recta linea; in recta igitur sunt A, F, D puncta.



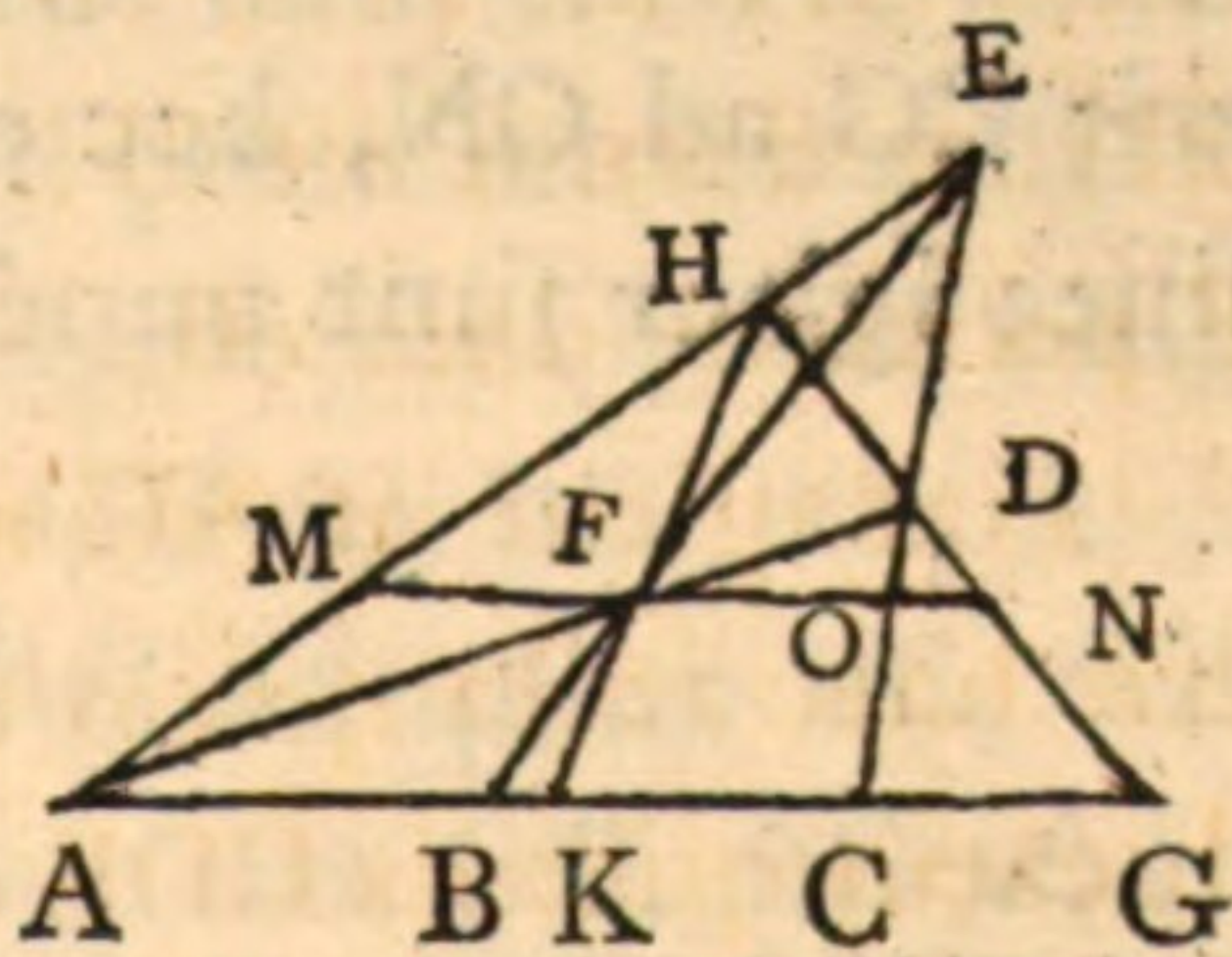
Quoniam enim est KM ad MF , ut (AC ad CB , hoc est ut AH ad HB , hoc est ut) KF ad FL ; erit reliqua FM ad reliquam ML , ut (KM ad MF , hoc est ut) AC ad CB ; et permutando, ut FM ad AC , ita (ML ad CB , et ita) MD ad DC . Igitur in recta linea sunt A, F, D puncta. Et haec est Prop. 131. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus sumum in Porismata. Vitiata autem est non parum apud Commandinum, qui voces *et reliqua ad reliquam* omisit tanquam supervacaneas et corruptas, minime autem sunt supervacaneae, sed paululum corruptae; integritati autem suae hic restituuntur. Figura etiam apud eum male delineata est, nam in ea E, G, C (cui in nostra respondent E, F, B) non sunt in recta linea, ut fieri debet.

P R O P. XIV.

LOCUS VII. “Quando una tantum ex rectis positione datis transit per datum punctum; caeteris ut in Loco 6to manentibus.”

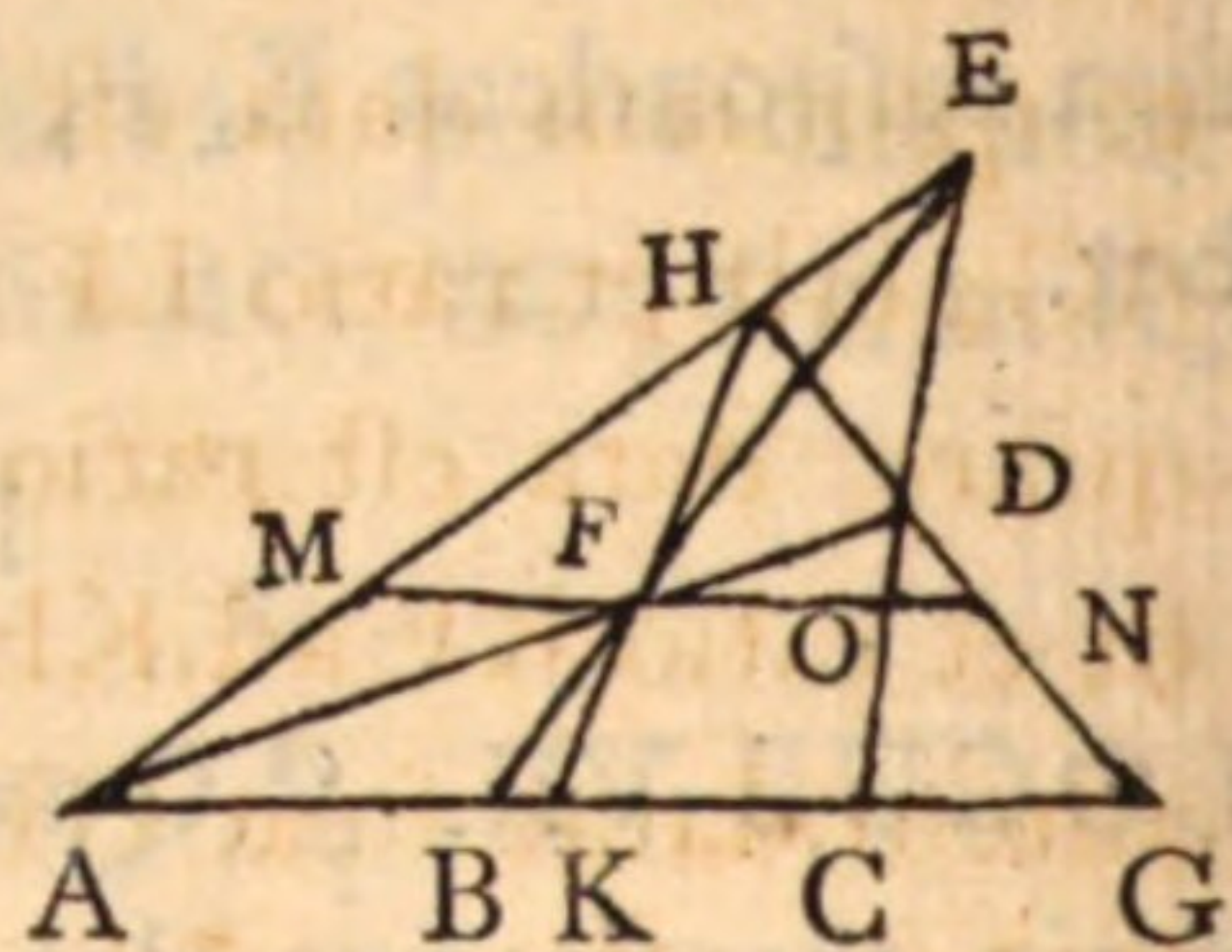
Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE , et data sint puncta A, B, C reliquorum vero D, E, F unum D tangat rectam positione datam HDG , aliud E tangat rectam EHA positione datam, quae transit per datum punctum A ; tanget et reliquum F rectam positione datam.

Jungatur HF , occurratque ipsi AB in K ; per F ducatur MN parallela ipsi AB , et occurrat ipsis AH, GH, CE in M, N, O . Quoniam igitur ut AB ad BC , ita MF ad FO ; ut



vero FO ad FN, ita AC ad AG; ratio MF ad FN, hoc est ratio AK ad KG, eadem erit rationi compositae ex rationibus AB ad BC, et AC ad AG, hoc est rationi rectanguli AB, AC ad rectangulum BC, AG; haec autem ratio data est, quia puncta A, B, C, G data sunt. Data igitur est ratio AK ad KG, et data est AG, quare punctum K datum est; et datum est H, igitur recta HK quam tangit punctum F positione data est.

Fiat igitur ut rectangulum AB, AC ad ipsum BC, AG, ita recta AK ad ipsam KG, et jungatur KH; erit haec recta quam tangit punctum F; hoc est si ducatur quaecvis CE occurratque ipsis GH, AH in D, E, juncta vero BE occurrat KH in F; erunt puncta A, F, D in recta linea. Quoniam enim ratio MF ad FN, (hoc est ratio AK ad KG,) eadem est rationi rectanguli AB, AC ad ipsum BC, AG, hoc est rationi compositae ex rationibus AB ad BC, et AC ad AG. Est autem ratio MF ad FN, eadem ei quae composita est rationibus MF ad FO, hoc est AB ad BC, et FO ad FN; igitur ablata communione AB ad BC, erit reliqua ratio AC ad AG, eadem reliquae FO ad FN. Igitur, dividendo inverse, et permutando, erit CG ad ON, hoc est GD ad DN, ut AG ad FN. In recta linea igitur sunt puncta A, F, D.



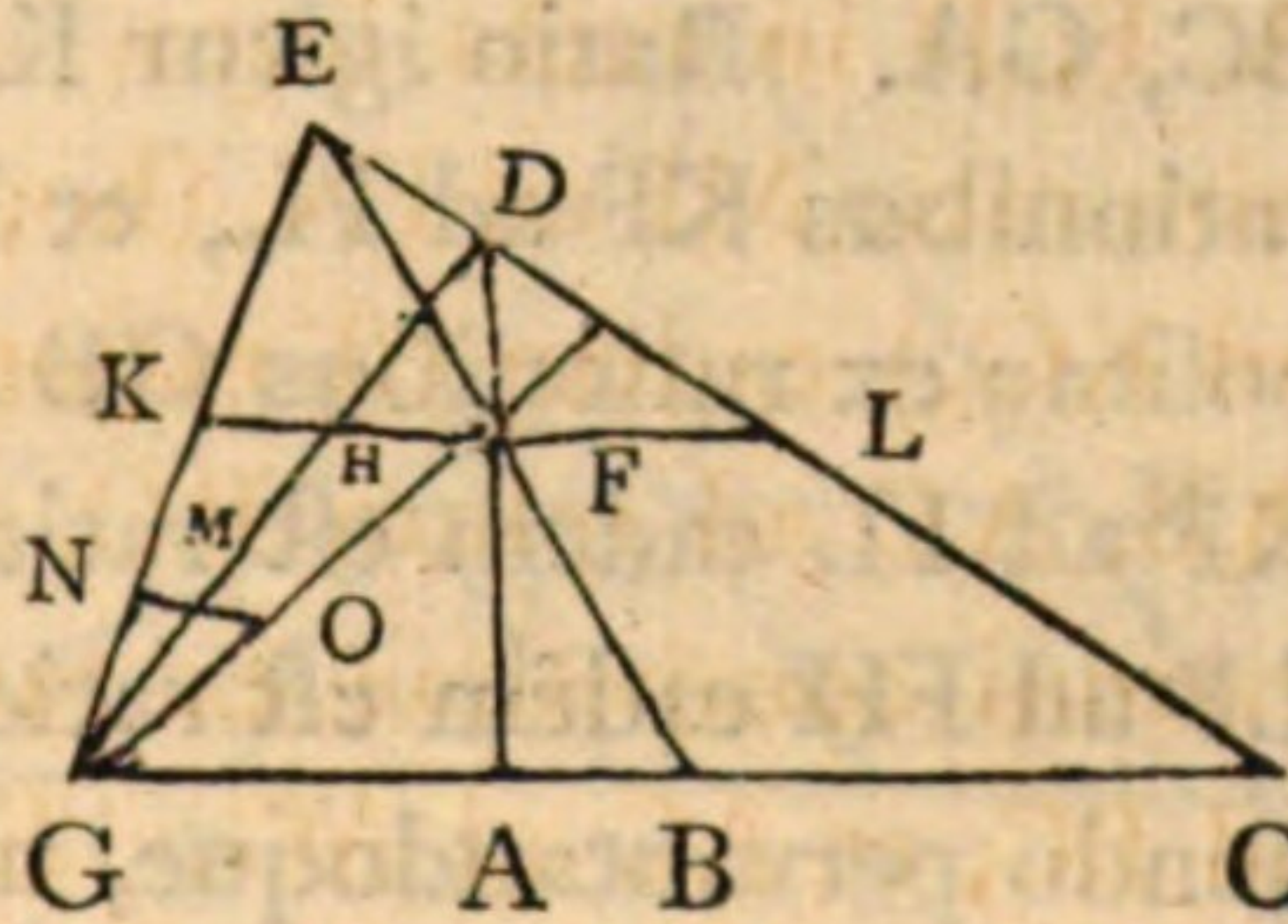
P R O P. XV.

LOCUS VIII. “ Quando quatuor rectae sibi mutuo occurrunt, nulla autem earum transit per punctum datum, rec-

“tae autem positione datae quas tangunt duo ex punctis oc-
 “currunt sibi mutuo in recta in qua data sint tria intersecti-
 “onum puncta.”

Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et data sint tria puncta A, B, C; reliquorum autem D, E, F duo D, E tangant rectas positione datas GD, GE quarum occurfus G fit in recta AB. Tanget reliquum F rectam positione datam.

Jungatur enim GF, et per F ducatur KF parallela ipsi AB, occurratque rectis GD, GE, CE in H, K, L punctis. Igitur quoniam data est ratio GB ad BC, data erit ratio KF ad FL; et quoniam data est ratio CA ad AG, erit et ratio LF ad FH data; quare^a data est ratio KF ad FH, ut et ratio KF ad KH. Positione autem datae sunt GH, GK, et est KH parallela positione datae AB; specie igitur^b datum est triangulum GKH, quare data est ratio



^a 9. Dat.

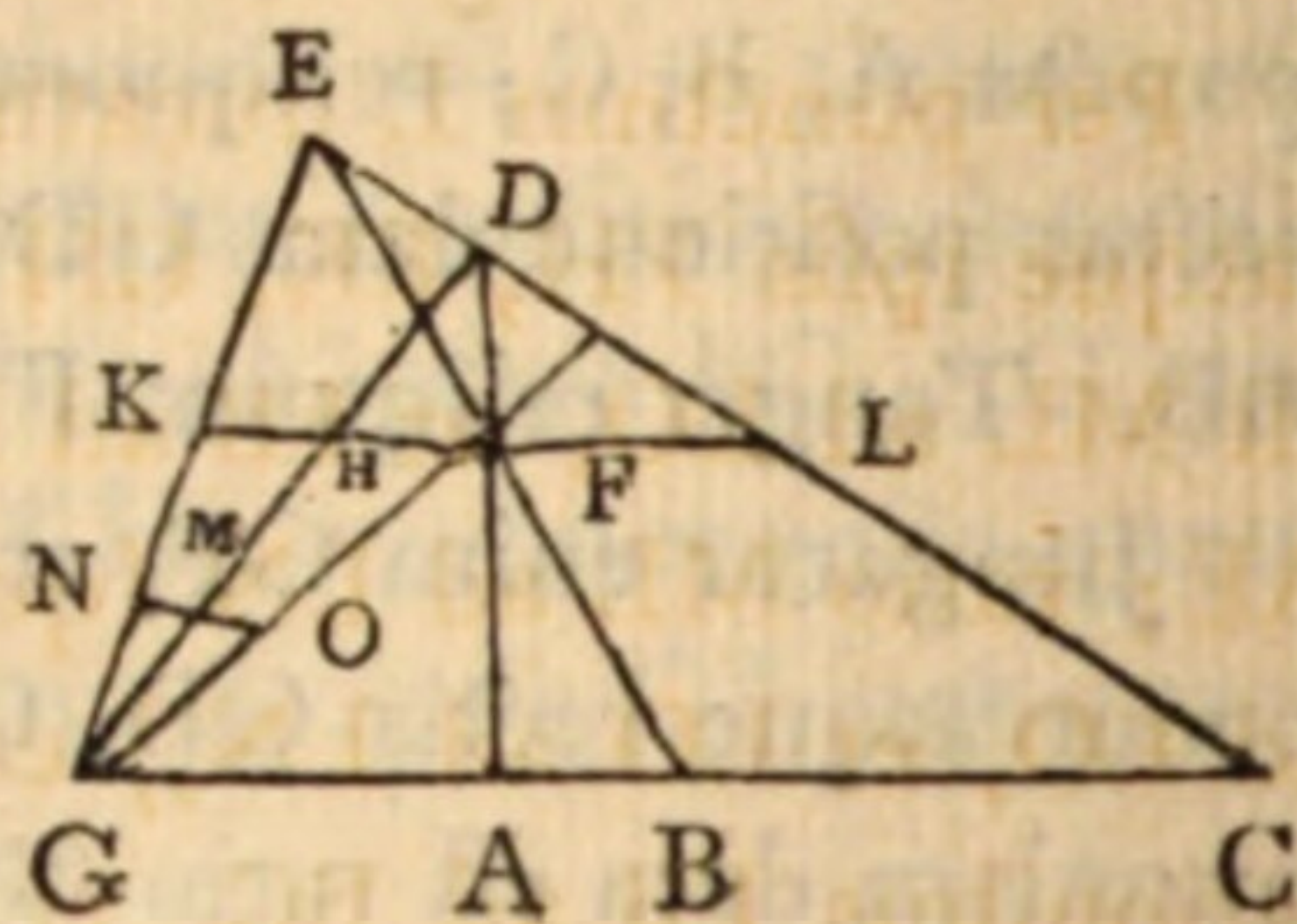
^b 43. Dat.

GK ad KH, et propterea^a ratio GK ad KF data est; et datus est angulus GKH, quare^c specie datum est triangulum GKF, ^c 44. Dat. datusque erit angulus KGF. Igitur, quia data est GK positione, et datum est punctum G, recta GF positione data est.

Quoniam vero ratio KF ad FH eadem est, (ut ostensum fuit, rationi compositae ex rationibus GB ad BC, et CA ad AG, hoc est^d) rationi rectanguli GB, AC ad ipsum BC, GA, ^d 23. 6. convertendo, erit KF ad KH, ut rectangulum GB, AC ad ipsum AB, GC. Ut igitur inveniatur recta GF, ducatur quaevis NM parallela ipsi AB, positione datis GE, GD occurrens in N,

M, et fumatur in ea NO quae ad NM sit ut rectangulum GB, AC ad ipsum AB, GC; erit juncta GO recta quam tangit punctum F. Ducatur enim a puncto C quaevis CD, occurratque positione datis GM, GN in D, E; et juncta BE ipsi GO occurrat in F, erunt puncta A, F,

D in recta linea. Ducatur per F recta KHFL parallela ipsi NO siue AB, est igitur KF ad KH, ut (NO ad NM, hoc est ut) rectangulum GB, AC ad ipsum AB, GC; et, convertendo, ut KF ad FH, ita rectangulum GB, AC ad ipsum



BC, GA. Ratio igitur KF ad FH, hoc est ratio composita ex rationibus KF ad FL, et FL ad FH, eadem est^d rationi compositae ex rationibus GB ad BC, et CA ad AG, quarum ratio KF ad FL eadem est rationi GB ad BC; ratio igitur reliqua LF ad FH eadem est rationi reliquae CA ad AG; et, componendo permutandoque, ut HL ad GC, hoc est ut HD ad DG, ita HF ad GA; et parallelae sunt HF, GA, igitur puncta A, F, D sunt in recta linea.

P R O P. XVI.

LOCUS IX. “ Quando quatuor rectae sibi mutuo occurrunt, earum autem nulla transit per punctum datum, rectae autem positione datae quas tangunt duo intersectionum puncta sunt inter se parallelae, non autem rectae in quae sunt data puncta.”

Sint quatuor rectae ABC, ALK, BLH, CKH, et data sint tria intersectionum puncta A, B, C in una earum, reliquorum vero H, K, L unum H tangat rectam FH positione datam, aliud K tangat rectam EK positione datam et ipsi FH parallelam; tanget et reliquum L rectam positione datam.

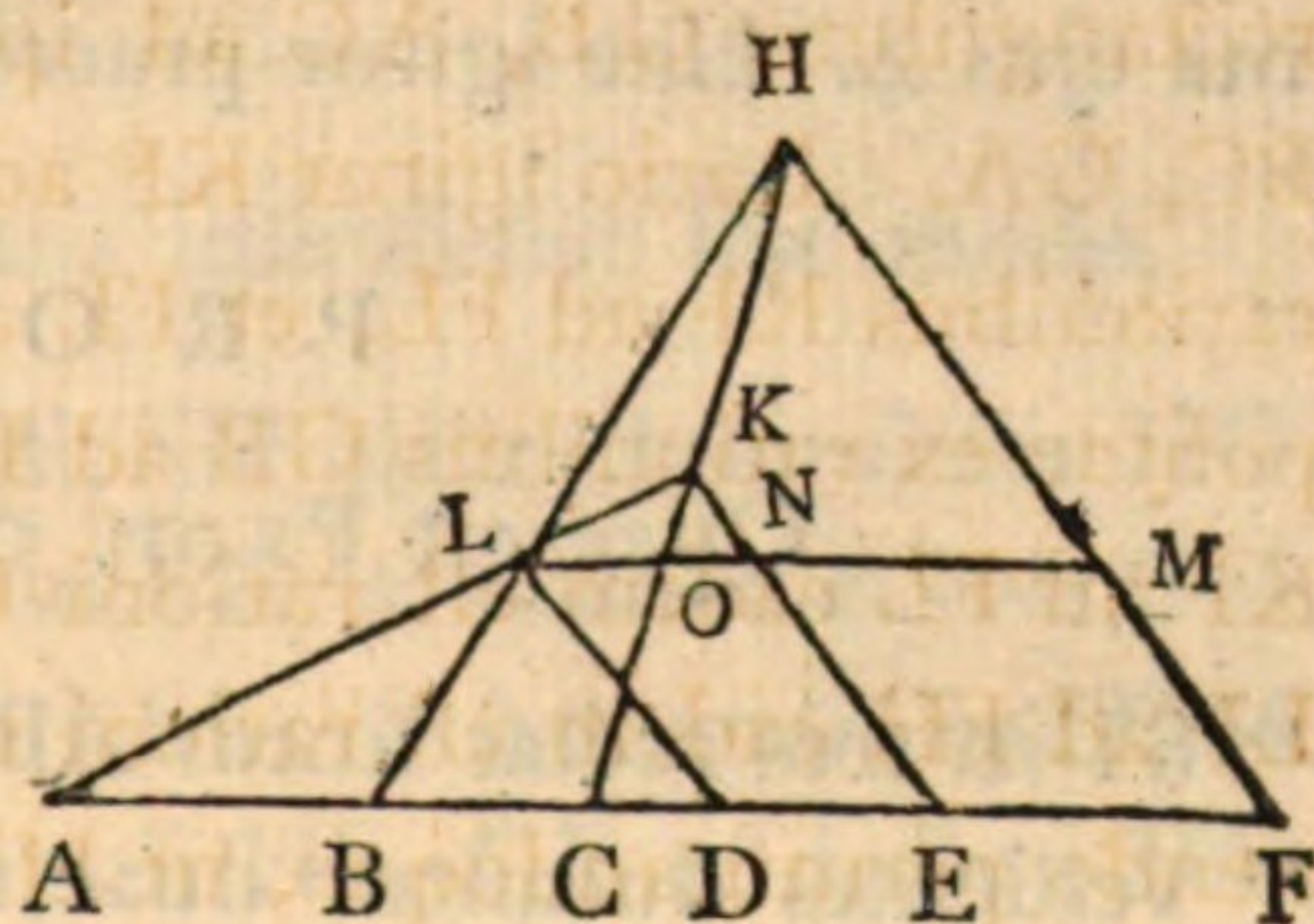
Per punctum L ducatur recta LM parallela ipsi AB occurratque ipsis FH, EK, CH in punctis M, N, O. Et quoniam est ML ad LO, ut FB ad BC; et ut LO ad LN, ita est AC ad AE; ratio ML ad LN (quae composita est ex rationibus ML ad LO, et LO ad LN,) eadem^a erit ei quae composita est ex^a G. 5. rationibus FB ad BC, et AC

ad AE, hoc est eadem erit^b rationi rectanguli FB, AC ad rectangulum BC, AE. Data autem est ratio rectangulorum quia ipsorum latera data sunt; igitur data est ratio rectae ML ad ipsam LN. Ad AB ducatur LD parallela ipsis FH,

EK, et quoniam est ut ML ad LN, ita FD ad DE, data erit ratio FD ad DE; et data est recta EF, punctum igitur D datum est, quare recta DL, quae parallela est^c positioni datae, ^c 31. Dat. data erit positione. Positione igitur data est recta DL quam tangit punctum L.

Fiat igitur ut rectangulum FB, AC ad ipsum BC, AE, ita recta FD ad ipsam DE, et per D ducatur DL parallela rectae EK, erit haec recta quam tangit punctum L; hoc est si ducatur quaevis AK occurratque ipsis DL, EK in L, K, junctae

B b b 2



vero BL, CK sibi mutuo occurrant in H, juncta HF parallela erit ipsis DL, EK.

Ducatur enim LN parallela rectae AB, et CH, EK, FH ipsi LN occurrant in punctis O, N, M. Igitur, ut in analysi, ostendetur ratio ML ad LN eadem esse rationi (rectanguli FB, AC ad ipsum BC, AE, hoc est, ex constructione, rationi) rectae FD ad ipsam DE. Et est LN aequalis ipsi DE, igitur LM aequalis est ipsi DF, et sunt parallelae, quare recta FMH parallela est ipsi DL.

Loco decimo inservit Prop. 129. Lib. 7. Pappi, quae est Lemma ejus 3. in Porismata, ut et Prop. 130. quae est Lemma ejus 4. Hae igitur praemittendae sunt.

P R O P. XVII.

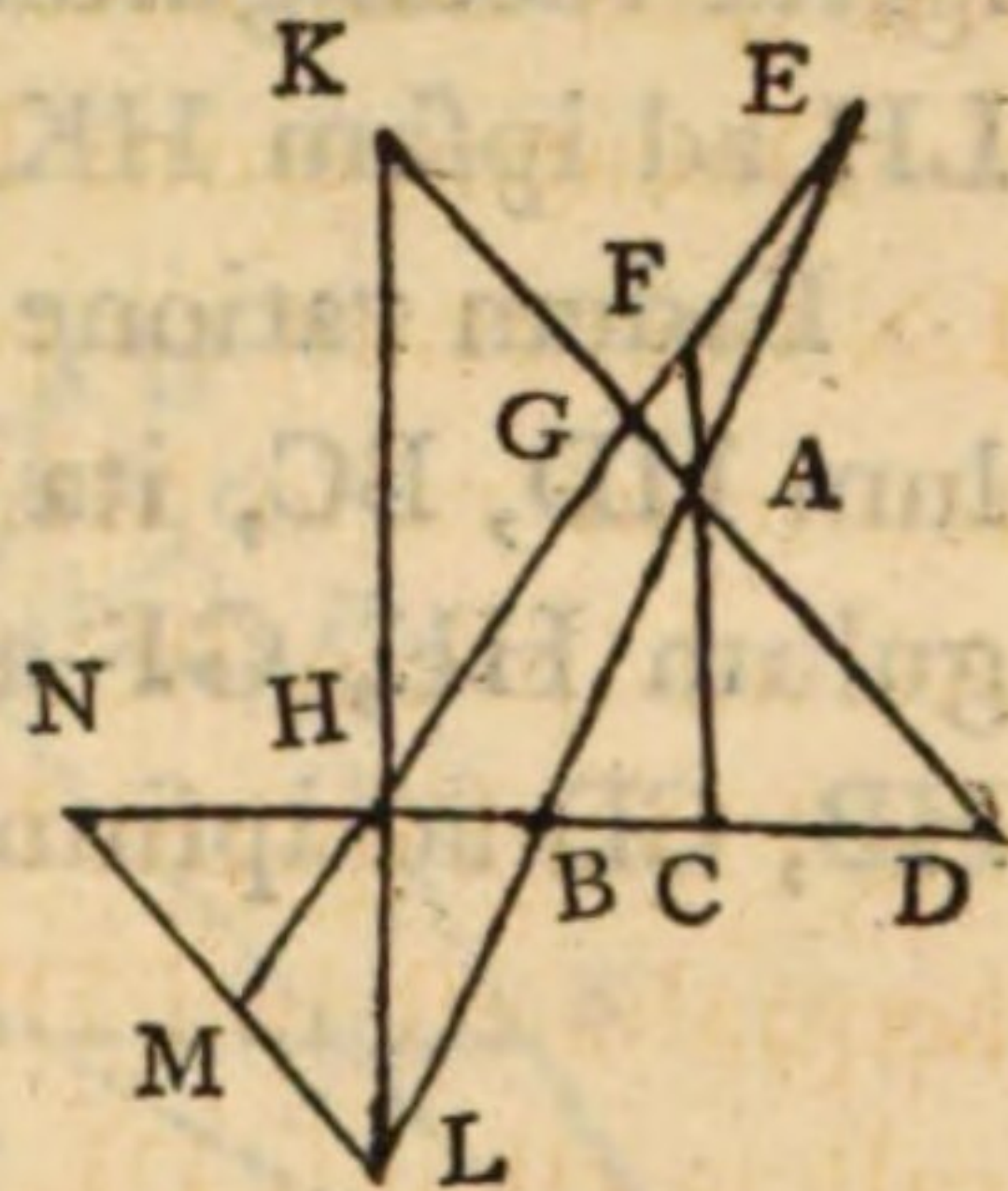
Quae est PROP. CXXIX. LIB. 7. PAPPI.

“SI in tres rectas lineas AB, CA, AD in eodem puncto convenientes ducantur duae rectae lineae HE, HD; dico ut
“rectangulum quod continetur HE, GF ad contentum HG,
“FE, ita esse rectangulum HB, CD ad HD, BC.”

Ducatur per H quidem recta linea KL parallela ipsi FC, et DA, AB cum ea convenient in punctis K, L; per L vero ducatur LM parallela ipsi DA, et cum EH conveniat in M. Itaque quoniam ut EF ad FA, ita EH ad HL; ut autem AF ad FG, ita LH ad HM, ita enim est HK ad HG in parallelo scilicet schemate; † igitur, ex aequali, ut EF ad FG, ita EH ad

† Viz. est AF ad FG, ut HK ad HG in parallelo schemate AFGHK, et LH ad HM, ut HK ad HG in parallelo LHKGM. Unde patet Commandinum

HM; quare rectangulum HE, GF aequale est ipsi EF, HM. Sed aliud rectangulum est HG, FE; ut igitur rectangulum HE, GF ad ipsum HG, FE, ita est rectangulum EF, HM ad ipsum HG, FE, et ita est recta MH ad ipsam HG, et ita LH ad HK. Eadem ratione † et ut LH ad HK, ita rectangulum HB, CD ad ipsum HD, BC. Sed ut LH ad HK, ita ostendimus esse rectangulum HE, GF ad ipsum HG, FE; ut igitur rectangulum HE, GF ad HG, FE, ita erit rectangulum HB, CD ad ipsum HD, BC.



Per compositam vero rationem ostendetur hoc modo.

Quoniam ratio rectanguli HE, GF ad rectangulum HG, FE composita est ex ratione HE ad EF, et ratione FG ad GH, atque est ut HE ad EF, ita HL ad FA; ut autem FG ad GH, ita FA ad HK; erit ratio rectanguli HE, GF ad ipsum HG, FE composita ex ratione HL ad FA, et ratione FA ad HK;

non intellexisse quid significatur *parallelo* sc. *schemate*; in nota enim ad B in hac Propositione putat verba textus Graeci mutanda esse, quae quidem recte se habent.

† Commandinus hoc dissimili admodum ratione et prolixè ostendit ad notam G in commentario ad hanc Propositionem; simili autem ratione ita ostenditur. Occurrat LM ipsi BH in N; et quoniam est BC ad CA, ut BH ad HL; ut autem AC ad CD, ita LH ad HN; utraque enim ratio eadem est rationi KH ad HD in parallelis figuris KHDAC, KHLND; erit, ex aequali, BC ad CD, ut BH ad HN; quare rectangulum HB, CD aequale est ipsi NH, BC. Sed aliud rectangulum est HD, BC, igitur ut rectangulum HB, CD ad rectangulum HD, BC, ita est rectangulum NH, BC ad ipsum HD, BC, et ita est recta NH ad ipsam HD, et ita LH ad HK.

haec autem ratio composita eadem est rationi LH ad HK. Est igitur rectangulum HE, GF ad rectangulum HG, FE, ut recta LH ad ipsam HK.

Eadem ratione * et ut rectangulum HB, CD ad rectangulum HD, BC, ita recta LH ad ipsam HK; ut igitur rectangulum HE, GF ad rectangulum HG, FE, ita rectangulum HB, CD ad ipsum HD, BC.

P R O P. XVIII.

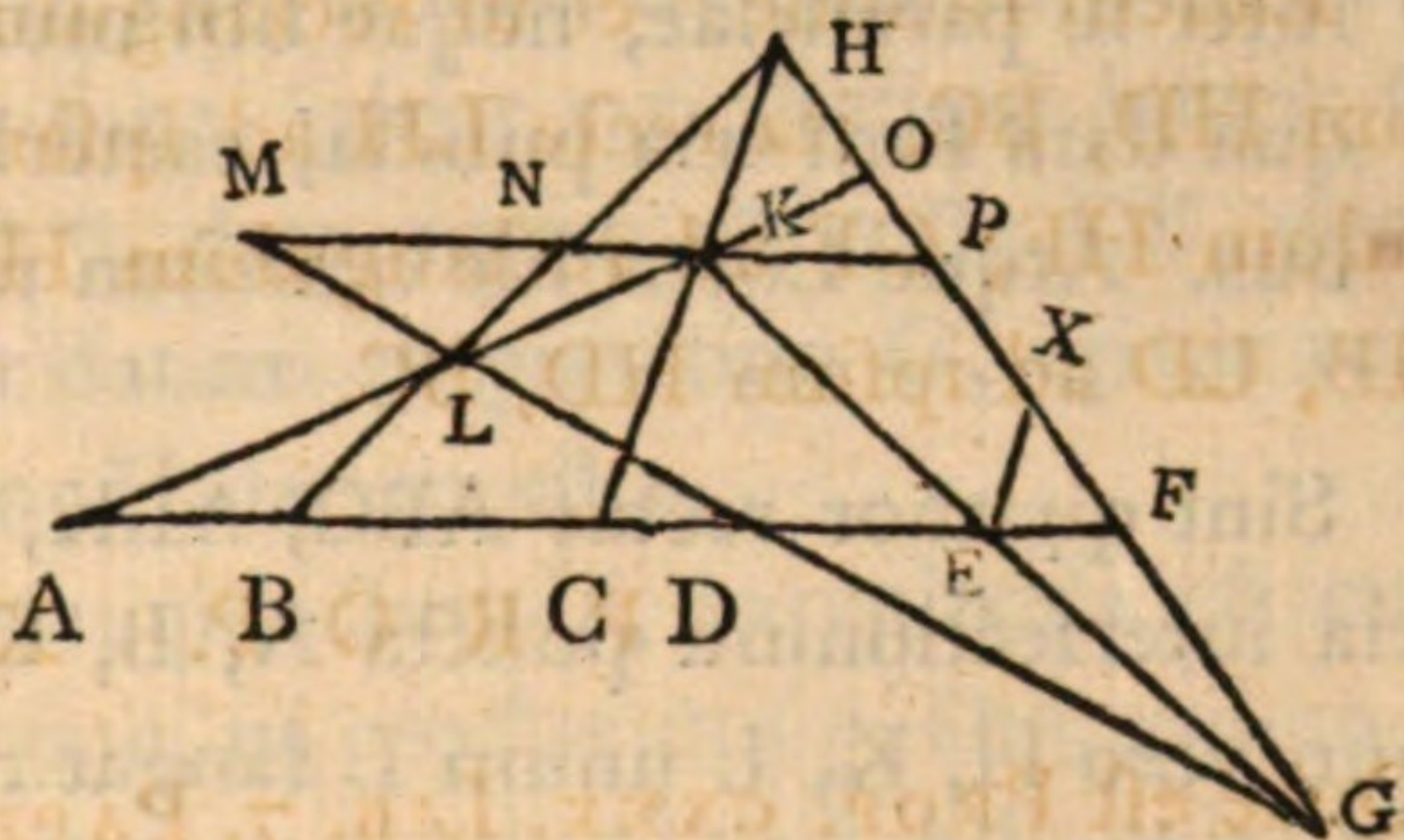
Quae est PROP. CXXX. LIB. 7. PAPPI, sed plenius enuntiata.

“ SI in recta linea fuerint sex puncta A, B, C, D, E, F, et a
 “ tribus ipsorum A, B, C ducantur tres rectae ALK, BLH,
 “ CKH sibi mutuo occurrentes in punctis L, K, H, et junctae
 “ LD, KE conveniant in G; fueritque ut rectangulum AF,
 “ BC ad rectangulum AB, CF, ita rectangulum AF, DE ad
 “ ipsum AD, EF; erunt puncta H, F, G in recta linea.

Quoniam enim est ut rectangulum AF, BC ad ipsum AB, CF, ita rectangulum AF, DE ad ipsum AD, EF, erit, permutando, ut rectangulum AF, BC ad ipsum AF, DE, hoc est ut recta BC ad ipsam DE, ita rectangulum AB, CF ad ipsum AD, EF. Sed si per K ipsi AD parallela ducatur KM quae ipsi BH occurrat in N, ratio BC ad DE composita erit ex ratione BC ad KN, et ratione KN ad KM, et insuper ex ratione KM ad DE. Ratio autem rectanguli AB, CF ad rectangulum AD,

* Est enim rectangulum HB, CD ad rectangulum HD, BC in ratione composita ex rationibus HB ad BC, et CD ad DH, hoc est ex rationibus LH ad CA, et CA ad HK quae eadem est rationi LH ad HK.

EF composita est ex ratione BA ad AD, et ratione CF ad FE; communis auferatur ratio BA ad AD, eadem scilicet rationi NK ad KM, erit reliqua ratio CF ad FE eadem ei quae composita est ratione BC ad KN, hoc est ratione CH ad HK et ratione KM ad DE, hoc est ratione KG ad GE. Per E ipsi CH parallela ducatur EX, et juncta HG ipsi occurrat in X, et ratio CF ad FE, quae composita ostensa est ex ratione CH ad HK, et ratione (KG ad GE, hoc est ratione) KH ad EX, eadem erit rationi CH ad EX. Quoniam igitur est CF ad FE, ut CH ad EX, et est CH ipsi EX parallela, recta erit linea quae transit per H, X, F, et propterea H, F, G erunt in recta linea.*



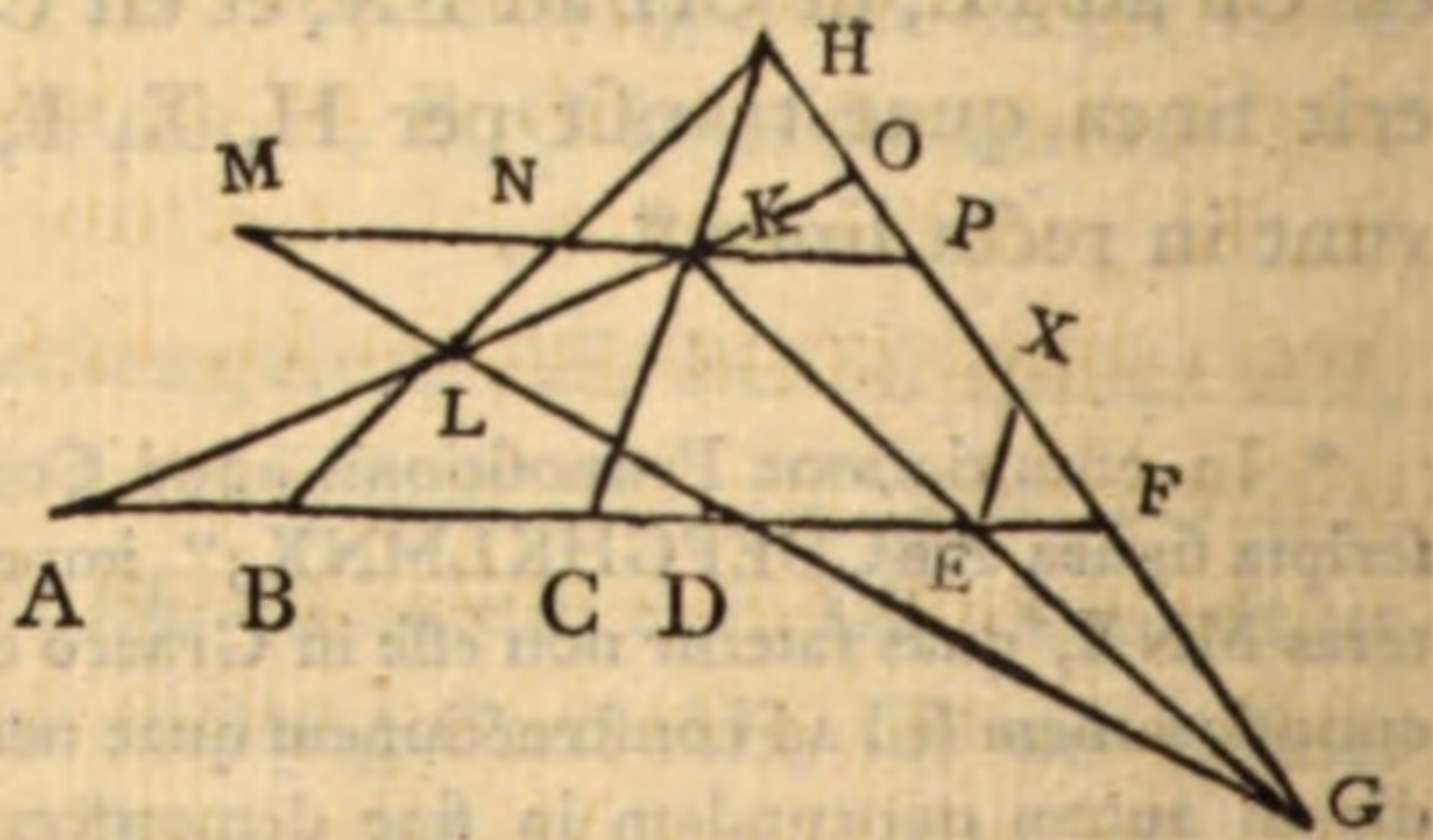
* In enuntiatione Propositionis apud Commandinum habetur, "Sit descripta figura ABCDEFGHKL MNX;" imperite autem addit tres ultimas litteras MNX, quas fatetur non esse in Graeco codice; minime enim spectant ad enuntiationem sed ad constructionem quae necessaria est demonstrationi. Ordinem autem quorundam in fine demonstrationis mutavimus, perspicuitatis gratia. In textu autem Commandini in pag. 243. a. Lib. 7. Pappi, in linea 5ta a fine demonstrationis pro CE lege GE; et in 3tia et 2da linea ab eodem fine, post verba "CH ad EX," legendum est, igitur proportio CF ad EF eadem est quae CH ad EX; cum vero CX ipsi EX parallela sit, recta erit linea quae transit, &c.

P R O P. XIX.

LOCUS X. “ Quando duae rectae positione datae non sunt
 “ inter se parallelae, neque sibi mutuo occurrunt in recta in
 “ qua data sunt tria puncta, caeteris ut in Loco 9. manenti-
 “ bus. Atque Locus hic omnium maxime est generalis.”

Sint quatuor rectae ABC, ALK, BLH, CKH, et data sint tria intersectionum puncta A, B, C in una earum, reliquorum vero H, K, L unum L tangat rectam GDL positione datam, aliud K tangat rectam GEK positione datam; tanget et reliquum H rectam positione datam.

Jungatur enim GH occurratque rectae AB in F et rectae AK in O. Quoniam igitur ad tres rectas GL, GK, GO in eodem puncto G convenientes, ductae sunt duae rectae AO, AF, erit, per Prop. 129. Lib. 7. Pappi, quae est 17. hujus, ut rectangulum AL, KO ad ipsum AO, LK, ita rectangulum AF, DE ad ipsum AD, EF. Rursus quoniam ad tres rectas HB, HC, HF ductae sunt duae AO, AF, per eandem Prop. erit ut AL, KO rectangulum ad AO, KL, ita AF, BC ad rectangulum AB, CF. Ut igitur rectangulum AF, BC ad ipsum AB, CF, ita AF, DE ad rectangulum AD, EF, et, permutando, ut rectangulum AF, BC ad ipsum AF,



DE, hoc est ut recta BC ad ipsam DE, ita rectangulum AB, CF ad ipsum AD, EF. Data autem est ratio rectae BC ad rectam DE, ipsae enim datae sunt, data igitur est ratio rectanguli AB, CF ad ipsum AD, EF; et data est ratio lateris AB ad latus AD, quia ipsa data sunt, igitur ratio reliqui lateris CF ad reliquum EF data est^a; data autem est recta CE, quare^a 65. Dat. punctum F datum est, et datum est punctum G, igitur recta GF quam tangit punctum H datum est.

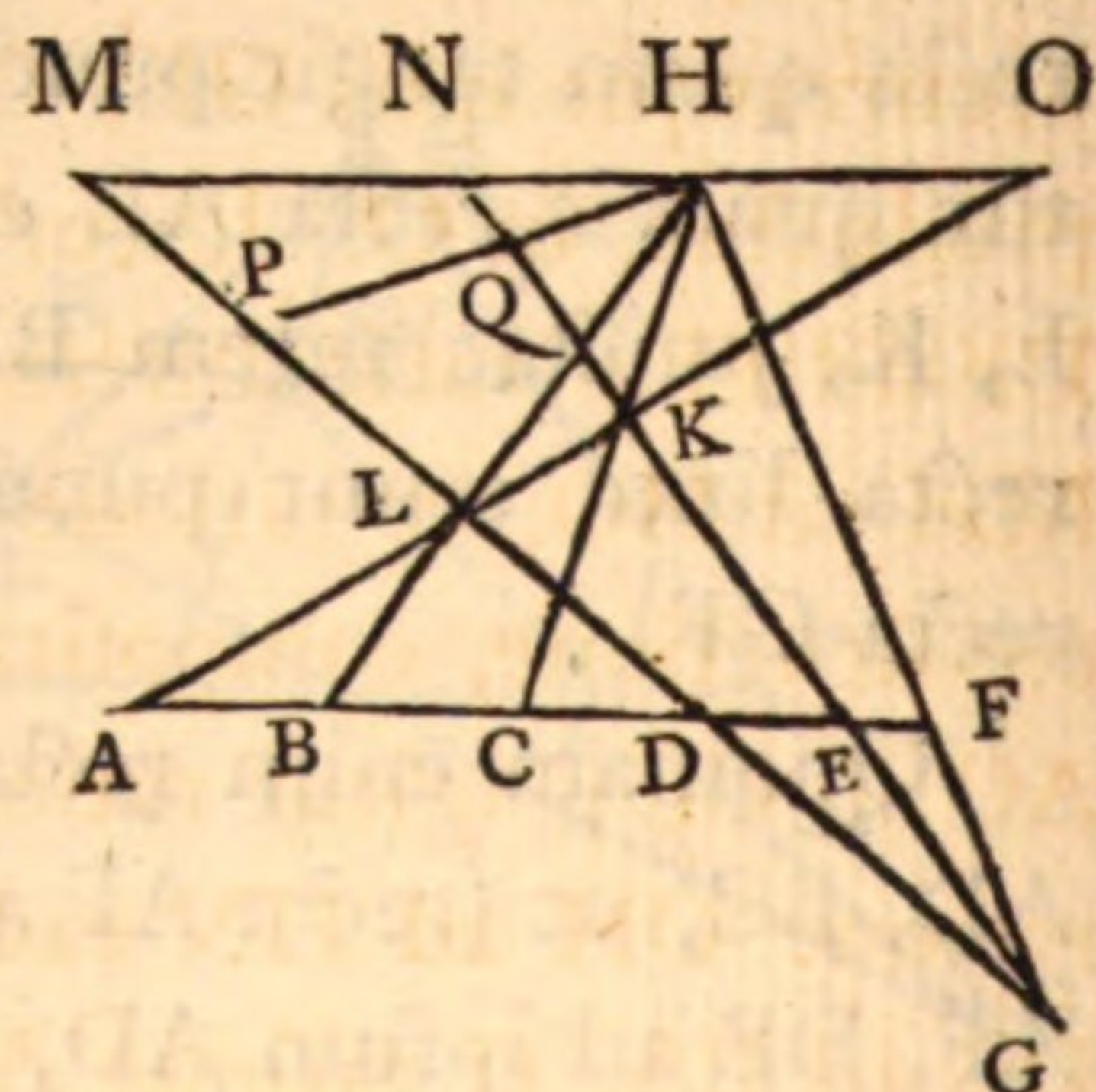
Ad inveniendum autem punctum F, invenienda est ratio quam habet CF ad FE, quae, ut constat ex 65. Dat. eadem est rationi quae composita est ex ratione AD ad AB, et ratione BC ad DE, haec autem ratio composita eadem est rationi rectanguli AD, BC ad rectangulum AB, DE. Fiat igitur ut rectangulum AD, BC ad ipsum AB, DE, ita recta CF ad ipsum FE, et jungatur punctum inventum F et punctum G, erit GF recta quam tangit punctum H; hoc est si a puncto A ducatur quaevis recta AL et rectis GD, GE occurrat in punctis L, K, junctae autem BL, CK sibi mutuo occurrant in H, in recta linea erunt puncta H, F, G, five punctum H erit in recta GF.

Quoniam enim rectangulum AF, BC est ad rectangulum AD, BC, ut (recta AF ad ipsam AD, hoc est ut) rectangulum AF, DE ad ipsum AD, DE; ut vero AD, BC rectangulum ad ipsum AB, DE, ita, ex constructione, est (recta CF ad ipsam EF, et ita est) rectangulum AB, CF ad ipsum AB, EF; quare, permutando, et per 1. 6. ut rectangulum AD, BC ad ipsum AB, CF, ita est (recta DE ad ipsam EF, et ita est) rectangulum AD, DE ad ipsum AD, EF; ut vero rectangulum AF, BC ad^{AF, BC. AD, BC.} ipsum AD, BC, ita ostensum fuit rectangulum AF, DE ad^{AB, CE. AF, DE.} ^{AD, DE. AD, EF.}

rectangulum AD, DE; igitur, ex aequali, ut rectangulum AF, BC ad ipsum AB, CF, ita est rectangulum AF, DE ad ipsum AD, EF. Ergo, per Prop. 130. Lib 7. Pappi, quae est 18. hujus, in recta linea sunt puncta H, F, G.

Locus vero decimus brevius ostendi potest modo quo eum olim ostendimus in Philosophicis Transactionibus anni 1723, No. 377. ita scilicet, manente eadem enuntiatione, ut in praemissis.

Per punctum H ducatur recta HM parallela ipsi AB, occurratque ipsis GD, GE, AL in M, N, O punctis. Et quoniam propter parallelas est MH ad HO, ut DB ad BA, ut vero OH ad HN, ita AC ad CE, erit ratio MH ad HN, quae scilicet composita est ex ratione MH ad HO, et ratione OH ad HN, eadem ei quae composita est ex ratione DB ad BA et ratione AC ad CE, hoc est rationi rectanguli AC, BD ad ipsum AB, CE. Data autem est ratio rectangulorum quia ipsorum latera data sunt; igitur data est ratio rectae MH ad ipsam HN. Occurrat juncta GH ipsi AB in F, et quoniam est MH ad HN, ut DF ad FE, data erit ratio DF ad FE, et data est recta DE, punctum igitur F datum est, et datum est punctum G; positione igitur data est recta GF quam tangit punctum F.



Fiat igitur ut rectangulum AC, BD ad ipsum AB, CE, ita recta DF ad ipsam FE, et jungatur GF, erit haec recta quam

tangit punctum H; hoc est si ducatur quaevis recta ALK quae occurrat ipsis GD, GE in L, K, et junctae BL, CK sibi mutuo occurrant in H, erunt H, F, G puncta in recta linea.

Iisdem enim ut in analysi constructis, erit, ut in ea ostensum est, ratio MH ad HN eadem (rationi rectanguli AC, BD ad rectangulum AB, CE, hoc est, ex constructione,) rationi rectae DF ad ipsam FE. Igitur, dividendo, vel componendo, ratio MN ad NH, eadem erit rationi DE ad EF, et permutando, erit MN ad DE, hoc est NG ad GE, ut NH ad EF; et est NH parallela rectae EF, igitur in recta linea sunt puncta H, F, G.

Et si ad rectam inventam GF inflectantur utcumque a punctis B, C rectae BH, CH quae positione datis GD, GE occurrant in punctis L, K; erunt A, L, K puncta in recta linea.

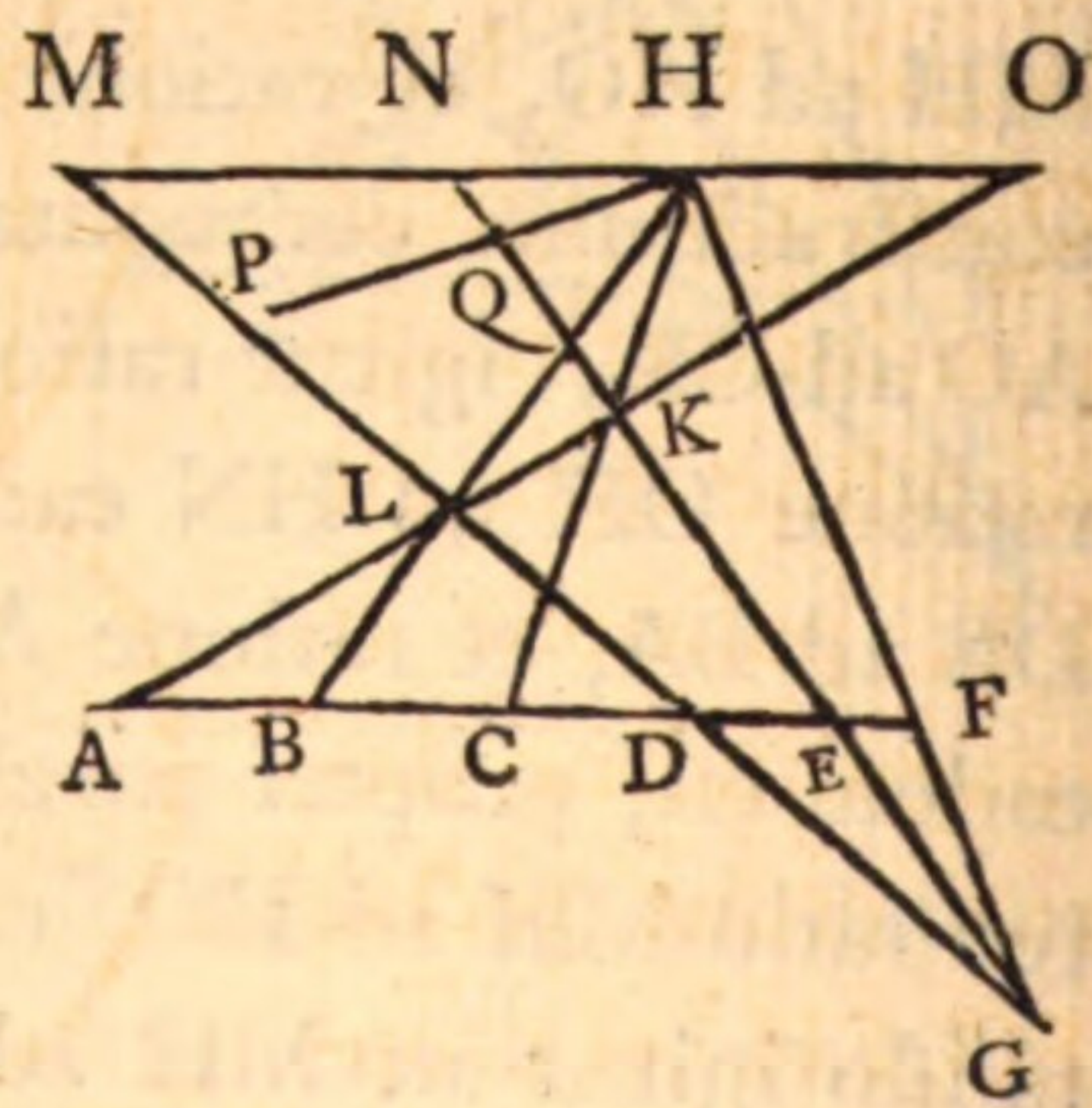
Per punctum enim H ducatur MH parallela rectae AB, occurratque ipsis GL, GK in M, N et junctae AK, et si opus productae, in O. Igitur propter parallelas est MH ad HN, ut DF ad FE; ratio autem MH ad HN composita est ex ratione MH ad HO, et ratione OH ad HN; et ratio DF ad FE, ex constructione, composita est ex ratione DB ad BA, et ratione AC ad CE; igitur ratio composita ex ratione MH ad HO, et ratione OH ad HN eadem est rationi compositae ex ratione DB ad BA, et ratione AC ad CE, quarum ratio OH ad HN eadem est, propter parallelas, rationi AC ad CE; reliqua igitur ratio MH ad HO, eadem est reliquae DB ad BA. Permutando igitur ut MH ad DB, hoc est ut HL ad LB, ita HO ad BA; et rursus, permutando, ut HL ad HO, ita LB ad BA, et sunt circa aequales angulos alternos; aequiangula igitur

sunt HLO, BLA triangula, quare in recta sunt A, L, O, et propterea A, L, K puncta.

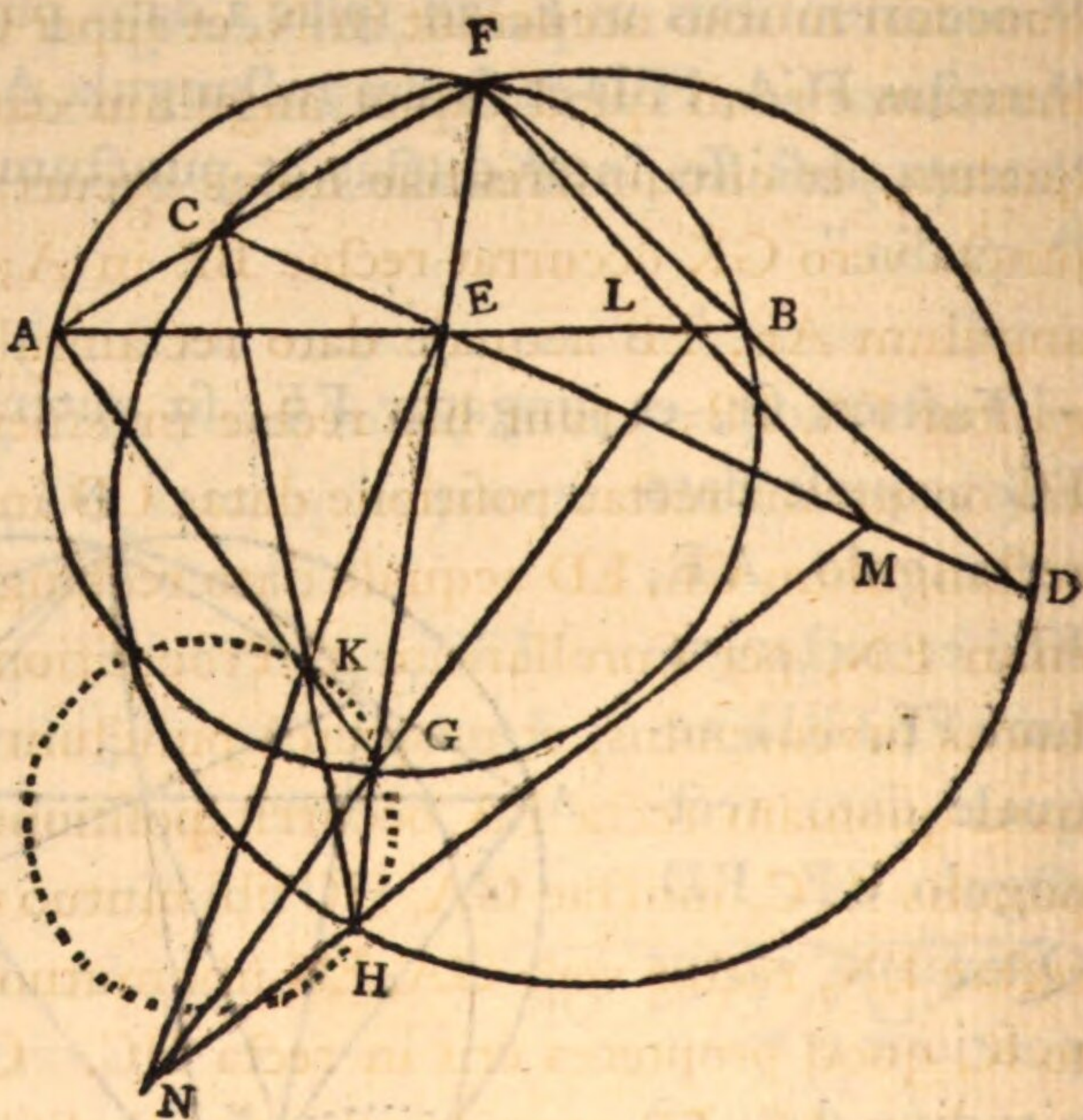
COR. 1. Patet rectam FG quae Locus est punctorum H in hac Propositione transire per punctum G occursum scilicet rectarum GD, GE quae positione datae sunt; et propterea si inveniatur punctum aliquod H in loco, quod fiet ducendo ut-
cunque a puncto A rectam AL quae occurrit positione datis GD, GE in L, K et jungendo BL, CK quae sibi mutuo occurrunt in H, erit juncta GH recta quae est Locus invenien-
dus. Simile autem tenet in praecedentibus post Prop. 7. ex-
cepto 9.

COR. 2. Ex his Problema sequens facile solvitur; Datis tribus punctis A, B, C in recta linea, datisque positione tri-
bus rectis GD, GE, PQ inter ipsas ponere triangulum cujus
latera vergent ad tria puncta data.

Factum puta, sitque triangulum HKL cujus angulus H sit in recta PQ, K in recta GE, et angulus L in recta GD, et la-
tera KL, HL, HK vergant ad punc-
ta data A, B, C, Et quoniam qua-
tuor sunt rectae AB, ALK, BLH,
CKH, et data sunt tria puncta in-
sectionum A, B, C in una ipsarum,
reliquorum autem H, K, L duo K,
L tangunt rectas positione datas
GE, GD reliquum tanget rectam
positione datam per hanc Propositi-
onem. Inveniatur igitur haec recta,
quae sit GF, per Cor. 1. hujus, et ipsi occurrat tertia positione
data PQ in H, et jungantur BH, CH quae occurrant ipsis GD,



^bconv. 35.3. culo^b; occurrant junctae GA, HC in K, et angulus FGA aequalis erit angulo FBA in eodem segmento; et similiter erit angulus FHC aequalis ipsi FDC, quare et angulus GKH dato
^c16.1. angulo BED aequalis erit^c. Et quoniam recta GH positione et magnitudine data est, punctum K tangit circumferentiam positione datam per Prop. 2. Lib. 1. Loc. Planorum Apollonii edit. Glasguae 1749. A tribus autem punctis datis in recta linea F,G,H ductae sunt tres rectae FA, GA, HC et ipsarum duae intersectiones A, C tangunt rectas positione datas EB, ED, reliqua igitur intersectio K tanget etiam rectam positione datam per Prop. 19. praecedentem. Idem autem punctum K ostensum est tangere circumferentiam positione datam, datum igitur est punctum K, et datum est G, quare recta GK positione data est; et positione data est recta AE, punctum igitur A datum est, et datum est E, et propterea recta AE magnitudine data est. Et datum est rectangulum AE, EB, recta
^a61. Dat. igitur EB magnitudine data est^a, sed et positione, quare da-



tum est punctum B, et datum est F, rectae igitur FA, FB positione datae sunt.

Componetur vero ita.

A puncto F ducatur utcunque recta FL occurratque positione datis AB, CD in L, M punctis, et jungantur LG, MH quae sibi mutuo occurrant in N, et super GH describatur segmentum circuli quod capiat angulum dato angulo BED aequalem, et circumferentiae hujus occurrat juncta EN in K, juncta vero GK occurrat rectae BE in A; denique fiat rectangulum AE, EB aequale dato rectangulo FE, EG, et jungantur FA, FB; erunt hae rectae inveniendae, hoc est si FA, FB occurrant rectae positione datae CD in punctis C, D, erit rectangulum CE, ED aequale dato rectangulo FE, EH. Recta enim EN, per Corollarium 1. Propositionis praecedentis, est Locus inveniendus, et propterea punctum K erit in recta HC, nam quoniam recta FA occurrit positione datis AB, CD in punctis A, C, junctae GA, HC sibi mutuo occurrent in puncto rectae EN, rectae vero GA, EN sibi mutuo occurrunt in puncto K, quod propterea erit in recta HC. Quoniam vero rectangulum AE, EB aequale est ipsi FE, EG, erunt A, F, B, G puncta in circulo, quare aequales sunt anguli FBA, FGA, et, ex constructione, aequales sunt anguli BED, GKH, aequales igitur sunt anguli BDC, five FDC, et GHK, five FHC; et propterea in circulo sunt F, D, H, C puncta. Rectangulum igitur CE, ED aequale est dato rectangulo FE, EH.

Sequitur Pappi Propositio secunda generalis, quâ illud quod de quatuor tantum rectis lineis in prima enuntiaverat, ad quotcunque extendit.

P R O P. XXI.

“ SI quotcunque rectae lineae occurrant inter se, nec plures
 “ quam duae per idem punctum; data vero sint puncta om-
 “ nia in earum una, unumquodque autem punctum in alia
 “ tangat rectam positione datam; vel generalius sic, si quot-
 “ cunque rectae occurrant inter se, neque sint plures quam
 “ duae per idem punctum, omnia vero puncta in earum una
 “ data sint; reliquorum numerus erit numerus triangularis,
 “ cujus latus exhibet numerum punctorum rectam positione
 “ datam tangentium; quarum intersectionum si nullae tres
 “ existant ad angulos trianguli spatii [*nullae quatuor ad an-
 “ gulos quadrilateri, nullae quinque ad angulos quinquela-
 “ teri, &c. i. e. Universim, si nullae harum intersectionum in
 “ orbem redeant;] unaquaeque intersectio reliqua tanget rec-
 “ am positione datam.”

Explicatio secundae Propositionis.

Observandum est, numerum intersectionum, quae in una recta reperiuntur in quacunque proposita multitudine rectarum, quarum non plures quam duae per idem punctum trans-eunt, et quarum nullae sunt inter se parallelae, unitate minorem esse ipso numero rectarum; nam duae in unico puncto se invicem secant, tertia vero ducta priores in duobus, quarta priores in tribus punctis secat, &c. igitur numerus intersec-

* Quae uncis inclusa sunt Pappi textui necessitate coacti adjecimus, nam sine iis Propositio non vera esset ultra casum quinque rectarum.

tionum in tribus rectis est unitas binario aucta, i. e. ternarius; numerus earundem in quatuor rectis est ternarius ternario auctus; in quinque vero rectis est ultimus praecedens seu senarius quaternario auctus, &c. qui numeri, ut manifestum est, triangulares sunt, quorum cujusque latus est numerus intersectionum quae inveniuntur in una qualibet recta, i. e. numerus qui unitate minor est numero omnium rectarum. Igitur si ex hoc numero intersectionum dematur numerus omnium punctorum datorum qui idem est cum numero intersectionum in una quavis recta; reliquus erit adhuc triangularis, cujus latus unitate deficit a latere prioris numeri triangularis, et proinde binario minus est numero rectarum propositarum. Et hic est numerus intersectionum quas tangere rectam positione datam Pappus in hac Propositione requirit, quarumque si nullae tres sint ad angulos trianguli, nullae quatuor ad angulos quadrilateri et ita deinceps; unamquamque intersectionum reliquarum tangere rectam positione datam affirmat.

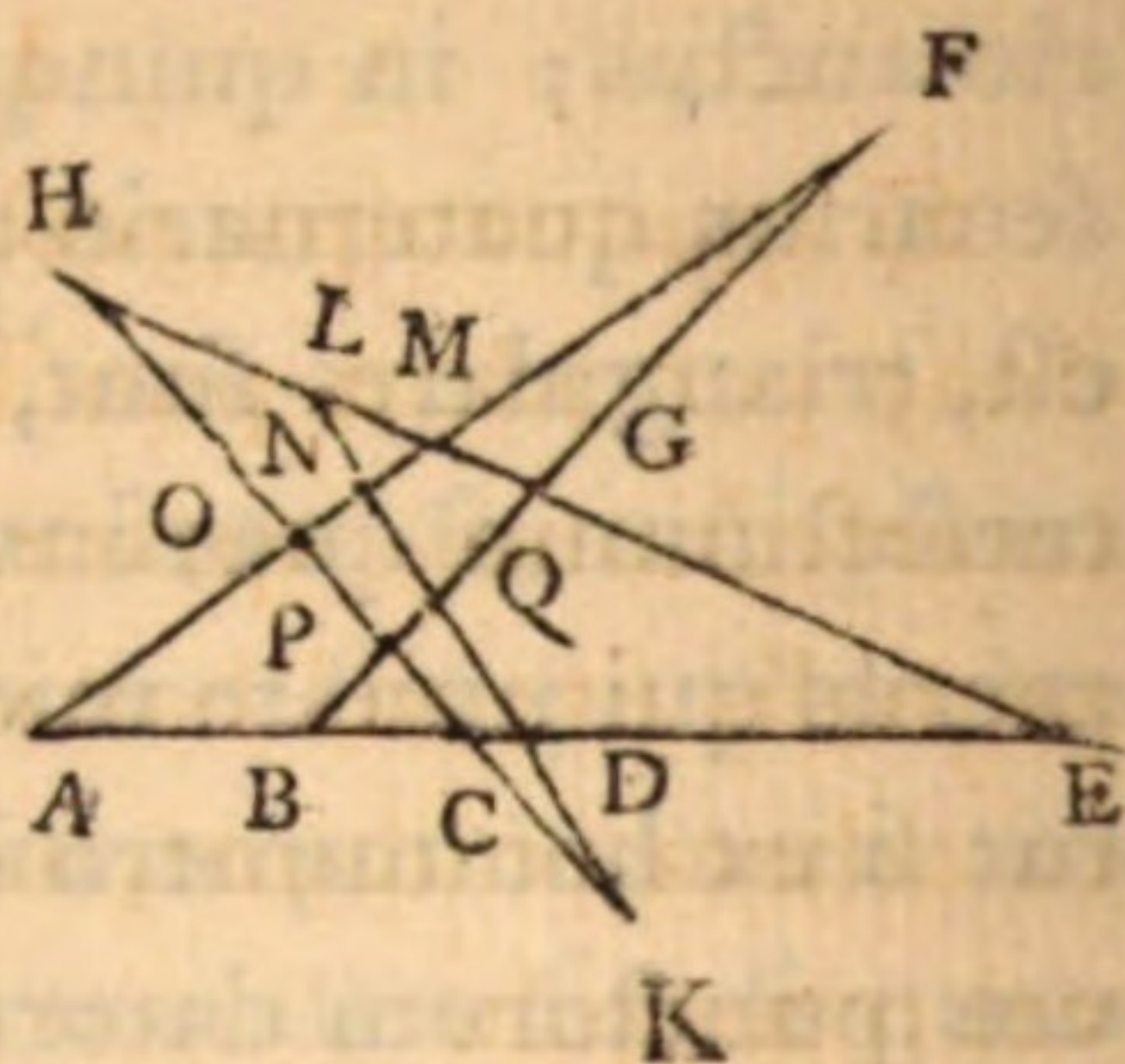
Commode vero in duos casus dividitur Propositio, quos etiam aperte satis indicat Pappus, qui hypotheseos casus facilioris praemittit Propositioni eleganti, et hujus generis maxime generali.

C A S U S I.

Sint quotcunque rectae, ex. gr. sex, AF, BG, CH, DK, EL, EA; et data sint omnia puncta in earum una, puncta scilicet A, B, C, D, E; omnia vero puncta in alia F, M, N, O tangent rectam positione datam: unaquaeque reliqua intersectio tanget rectam positione datam.

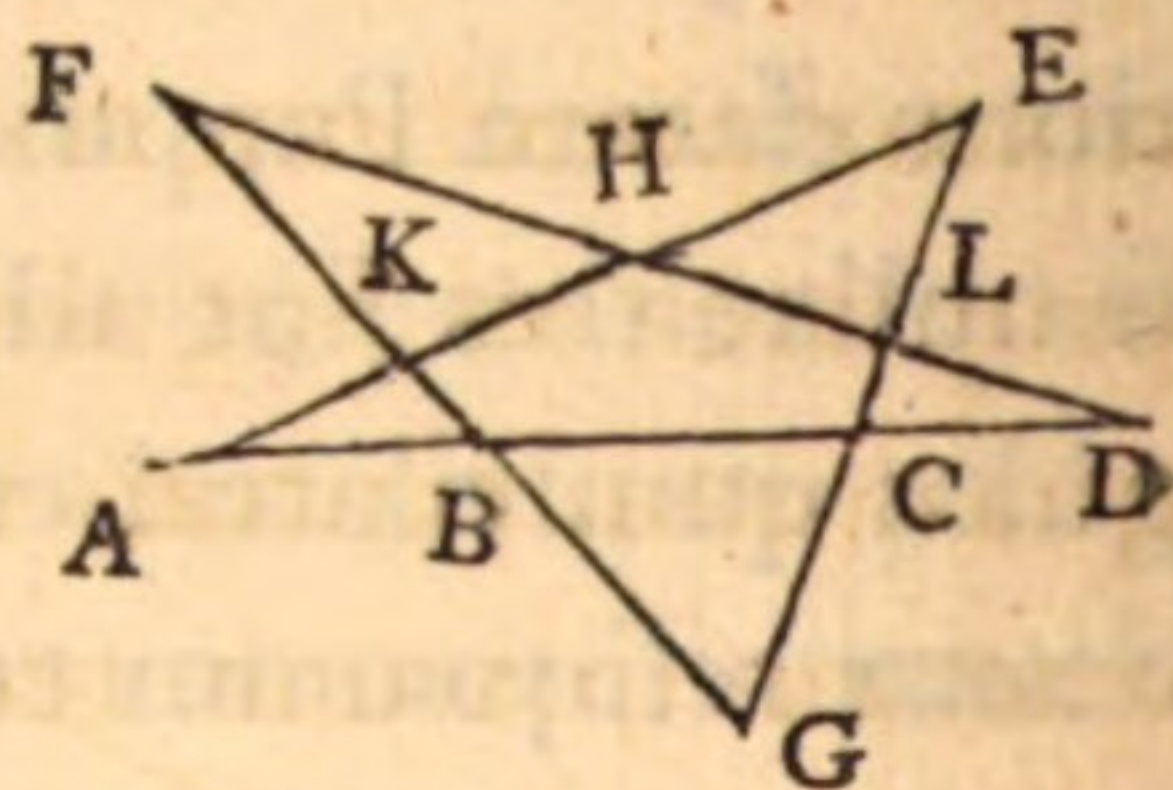
D d d

Sumatur enim quaevis interseccio ex reliquis, ex. gr. L, et quoniam quatuor sunt rectae AE, AM, DL, EL et data sunt tria puncta A, D, E in earum una, reliquorum vero L, M, N duo M, N tangunt rectam positione datam, tertium L tanget rectam positione datam per Prop. 19. eodem modo idem de omnibus reliquis punctis ostendetur.



C A S U S II.

Caeteris manentibus, non sint omnia puncta rectam positione datam tangentia, quorumque numerus binario minor est numero rectarum propositarum, in eadem recta, sed nulla eorum in orbem redeant; reliqua omnia tangunt rectam positione datam.



L E M M A I.

Si quaecunque rectae inter se occurrant neque plures quam duae per idem punctum, et sumantur quaevis rectarum, sit vero numerus interseccionum qui conficitur sumendo duo puncta in unaquaque rectarum sumptarum aequalis numero harum rectarum; puncta haec in orbem redibunt. Nam quoniam sunt duo puncta in unaquaque recta, erunt ad minimum tria in duabus rectis, et quatuor in tribus, et ita deinceps, semper scilicet erit numerus punctorum ad minimum unitate major numero rectarum nisi recta ultima transeat per punctum primum; i. e. nisi puncta in orbem redeant, in

quo solo casu aequalis erit numerus punctorum numero rectarum.

L E M M A II.

Si quotcunque rectae inter se occurrant neque plures quam duae per idem punctum, sumantur vero quaelibet ipsarum intersectiones, quarum numerus numero omnium rectarum aequalis sit; vel hae intersectiones omnes, vel earum aliquae, in orbem redibunt, hoc est invenientur ad angulos polygoni vel trianguli.

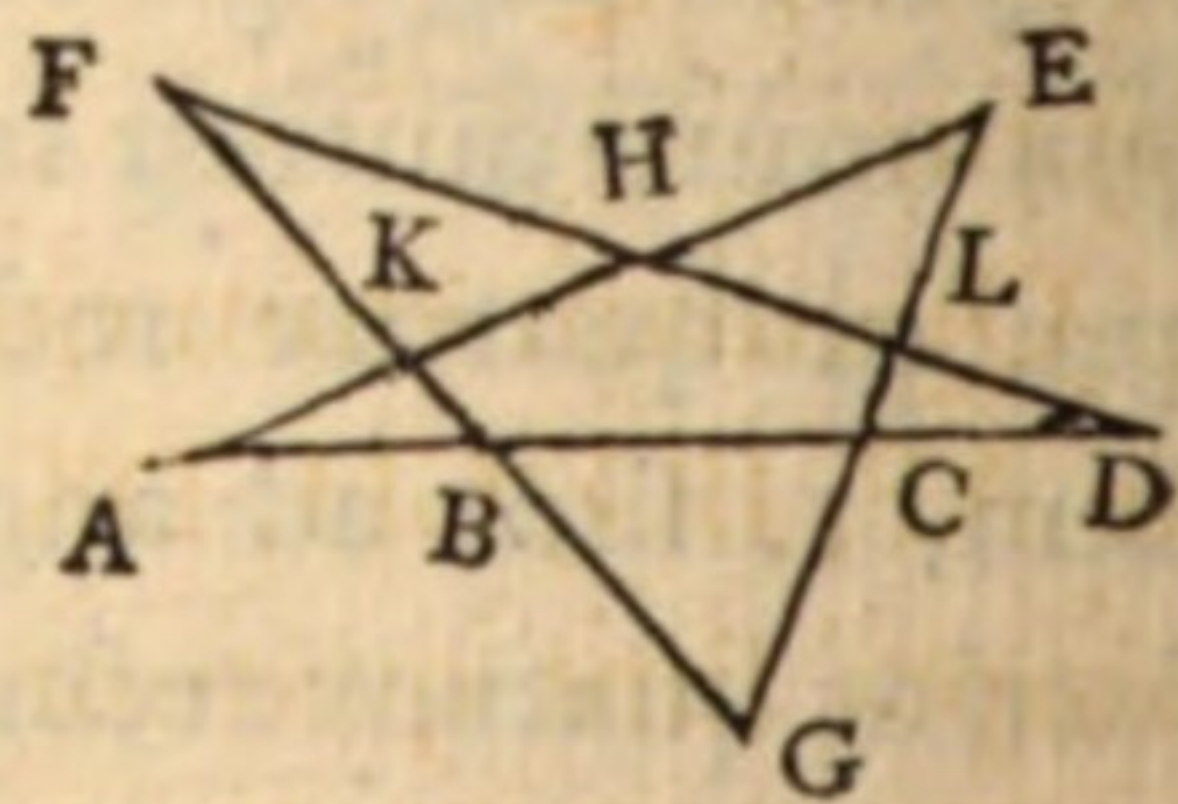
Tres enim intersectiones trium rectarum sunt ad angulos trianguli; si vero sint quatuor rectae, et sumantur quatuor puncta, una harum necessario invenietur in unaquaque recta; quod si in una aliqua ex quatuor rectis unum tantum inveniat punctum, tria reliqua erunt in tribus reliquis rectis, et propterea ad angulos trianguli; si vero nulla fuerit recta in qua unum tantum invenitur punctum, erunt duo in unaquaque ex quatuor rectis; et sunt quatuor puncta, ergo, per Lem. I. sunt ad angulos quadrilateri. Et manifestum est si fuerint quatuor rectae, et sumantur plura quam quatuor puncta, multo magis aliqua eorum in orbem redire.

Sint jam quinque rectae, et sumantur quinque intersectionum puncta, et, si fuerit aliqua ex rectis in qua nullum invenitur punctum ex hisce quinque, erunt omnia quinque in quatuor reliquis rectis; si vero fuerit aliqua recta in qua unum duntaxat invenitur punctum, erunt reliqua quatuor puncta in reliquis quatuor rectis; igitur in utroque casu puncta aliqua erunt ad angulos trianguli vel quadrilateri, per praecedentem casum; si autem nulla fuerit recta in qua vel nullum vel unicum invenitur punctum, erunt duo in una-

quaque ex quinque rectis, et sunt quinque puncta; ergo, per Lem. 1. sunt ad angulos quinquelateri; et similiter Propositio ostendetur in sex rectis, et ita in infinitum.

Hisce praemissis Propositio hoc modo demonstratur. Primo, sint quinque rectae AD, AE, BF, CG, DH, et demptis punctis datis in una rectarum, viz. A, B, C, D, reliqua erunt sex puncta E, F, G, H, K, L, in quatuor rectis; et tria horum (nam latus numeri triangularis 6 est 3) quae non sunt ad angulos trianguli, a tribus scilicet rectarum propositarum contenti, ex.gr. E, F, G tangant rectam positione datam; reliqua tria H, K, L etiam tangent rectam positione datam.

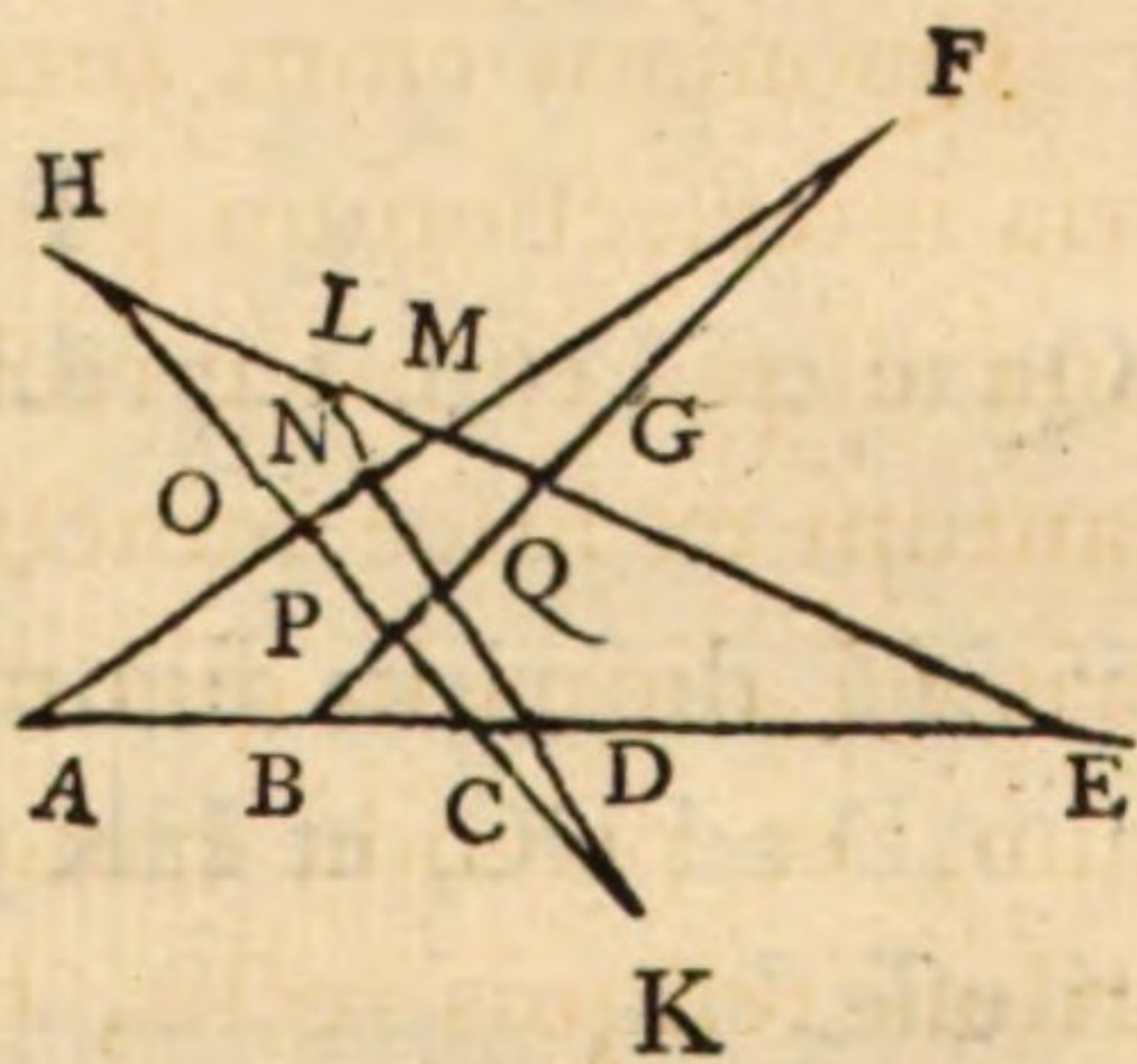
Quoniam enim sunt quatuor rectae AE, BF, CG, DF, et tria intersectionum puncta E, F, G sumpta sunt in ipsis; erit una aliqua ex hisce rectis in qua necessario invenietur unum tantum ex hisce punctis; nam si non, erit vel aliqua in qua nullum est punctum, et proinde erunt tria puncta in tribus reliquis rectis, hoc est ad angulos trianguli, contra hypothesin; vel erunt ad minimum duo ex hisce tribus



punctis in unaquaque quatuor rectarum, et propterea quatuor ad minimum essent puncta; sed sunt tantum tria; igitur necesse est esse aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum. Sit haec recta AE in qua scilicet est punctum E, ergo reliqua duo F, G sunt in reliquis tribus rectis BF, CG, DF; igitur quoniam quatuor sunt rectae BD, BF, CG, DF, et data sunt tria puncta intersectionum B, C, D, in una rectarum, reliquorum vero F, G, L duo F, G tangunt rectam positione datam, reliquum punctum L in tribus illis rectis tangit

rectam positione datam per Prop. 19. praecedentem. Sumatur nunc GE recta scilicet ex hisce tribus quae transit per punctum E in quarta recta AE, et omnia puncta in hac recta GE tangent rectam positione datam. Igitur per casum primum huius Propositionis, reliqua puncta H, K tangunt rectam positione datam.

2do. Sint jam sex rectae AE, AF, BG, CH, DK, EL; et demptis quinque datis punctis A, B, C, D, E quae sunt in una rectarum, reliqua erunt decem puncta F, G, H, K, L, M, N, O, P, Q in quinque rectis; et, ex hypothese, quatuor horum (nam latus numeri triangularis 10 est 4) quae non in orbem redeunt tangunt rectam positione datam; sint hae F, G, H, K; reliqua sex L, M, N, O, P, Q tangent rectam positione datam.



Quoniam enim quinque sunt rectae AF, BG, CH, DK, EL, et in ipsis sumpta sunt quatuor intersectionum puncta F, G, H, K; erit una recta in qua unum tantum ex hisce punctis invenitur, aliter enim vel erit aliqua recta in qua nulum est punctum, et ita quatuor puncta essent in quatuor reliquis rectis, et propterea per Lem. 2. aliqua eorum in orbem redibunt, contra hypothesein; vel erunt ad minimum duo puncta in unaquaque recta, et propterea essent ad minimum quinque puncta; sed sunt tantum quatuor, quare necesse est esse aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum; sit haec recta AF in qua est punctum F, ergo reliqua tria G, H, K sunt in reliquis quatuor rectis BG, CH, DK, EL; quoniam igitur quinque sunt rectae BE, BG, CH, DK, EL, et da-

ta sunt omnia puncta B, C, D, E in una rectarum, et tria reliquorum G, H, K quae non sunt ad angulos trianguli tangunt rectam positione datam; per primam partem hujus demonstrationis, reliqua tria puncta in his quatuor rectis scilicet L, P, Q, tangunt rectam positione datam. Sumatur nunc BF recta scilicet quae tranfit per punctum F in quinta recta AF, et omnia puncta in hac recta BF tangent rectam positione datam; quare per casum primum hujus Propositionis reliqua puncta M, N, O tangunt rectam positione datam. Eodem prorsus modo Propositio demonstrabitur in septem, octo, &c. rectis in infinitum, ut patet.

P R O P. XXII.

Quae est Prop. 127. Lib. 7. Pappi, et ejus Lemma primum in Porismata.

“ SIT descripta figura ABCDEFG, sitque ut AF ad FG, ita
 “ AD ad DC, et HK jungatur; Dico HK ipsi AC parallelam
 “ esse.”

Vel magis explicite.

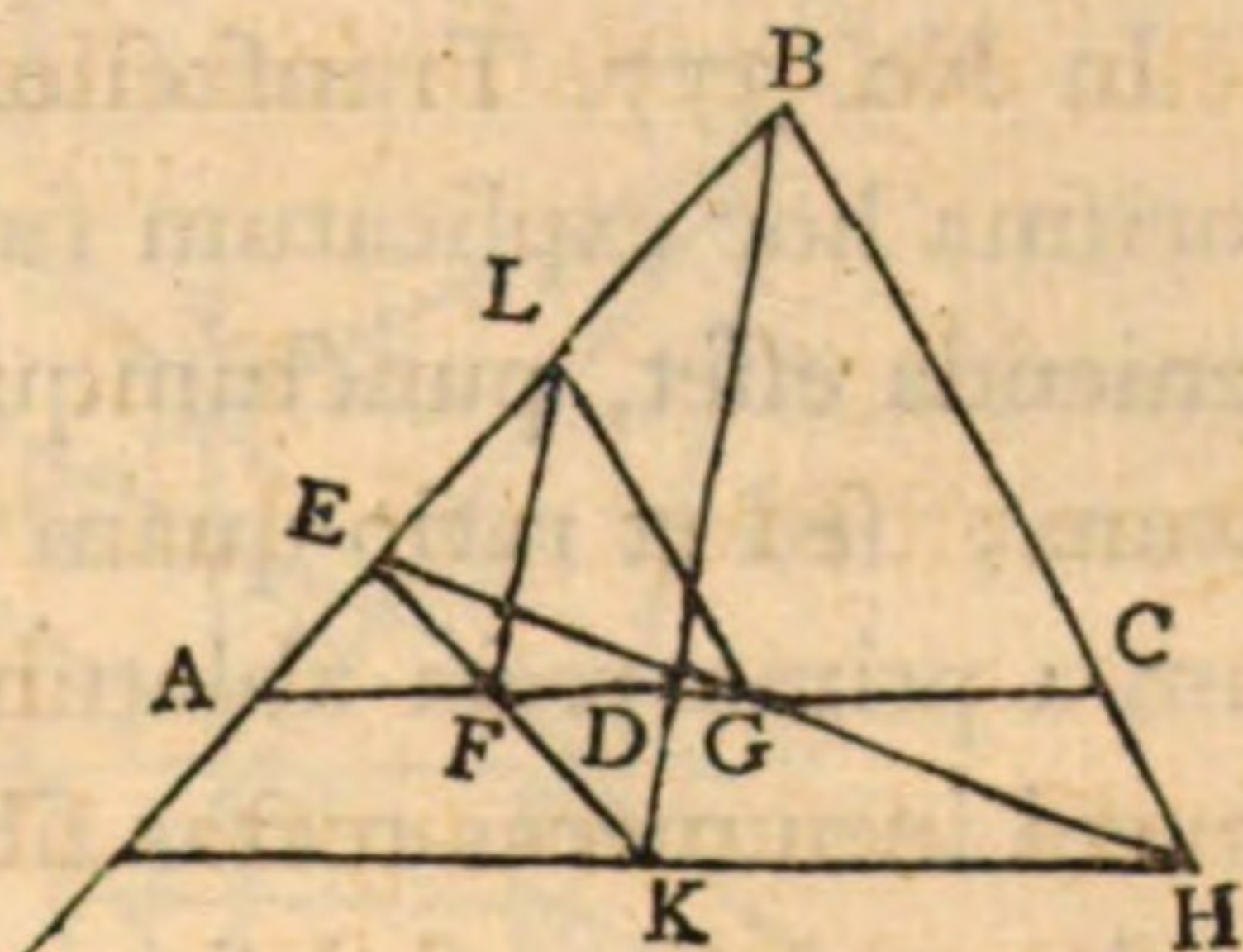
“ SI in recta linea fuerint puncta A, F, D, G, C ita ut AF sit
 “ ad FG, ut AD ad DC; et ad rectam lineam AB inflectan-
 “ tur FE, GE, et ad eandem inflectantur DB, CB, et inflexae
 “ a punctis F, D sibi mutuo occurrant in K, inflexae vero a
 “ punctis G, C occurrant in H, et HK jungatur; erit KH
 “ parallela ipsi AC.”

Ducatur per F ipsi BD parallela FL; quoniam igitur ut AD ad DC, ita est AF ad FG, permutando et per 12. 5. erit ut AD ad AF, hoc est in rectis parallelis, ut BA ad AL, ita CA ad AG; ergo juncta LG ipsi BC parallela est. Ut igitur EB

ad BL, ita in parallelis, EK ad KF, et EH ad HG. Quare ut EK ad KF, ita est EH ad HG; ideoque HK ipsi AC est parallela.

Per compositam vero rationem hoc pacto, demonstratio quae apud Commandinum, et, ut videtur, in textu Graeco, manca habetur, ita restituitur.

Quoniam est ut AF ad FG, ita AD ad DC, invertendo erit ut GF ad FA, ita CD ad DA; et componendo, permutandoque et convertendo, ut AD ad DF, ita AC ad CG.* Sed ratio AD ad DF, composita est † ex ratione AB ad BE, et ratione EK ad KF; et ratio AC ad CG composita est ‡ ex ratione AB ad BE, et ratione EH ad HG. Ratio igitur composita ex ratione AB ad BE, et EK ad KF, eadem est rationi compositae ex ratione AB ad BE, et EH ad HG. Communis auferatur ratio AB ad BE, reliqua igitur ratio EK ad KF, eadem est rationi EH ad HG. Igitur HK ipsi AG parallela est.



* Ita habetur apud Commandinum, sed paulo brevius ostendetur ut sequitur; Quoniam est ut AD ad DC, ita AF ad FG, permutando, erit ut AD ad AF, ita DC ad FG, et per 12. 5. ut AD ad AF, ita AC ad AG, igitur, convertendo, ut AD ad DF, ita AC ad CG.

† ‡ Quae ad has notas habentur ex Lemmate sequenti pendent, quod quidem habetur in secunda parte Prop. 3. Lib. 8. Pappi. Vid. fig. Prop. 22. hujus.

Si duae rectae lineae BA, AD duabus rectis EK, KB occurrant, et dicatur quaevis earum AD prima, alia AB secunda, quaevis reliquarum KB tertia, et altera KE quarta; ratio segmenti primae AD inter occursum A primae et secundae et tertiam, ad segmentum ejusdem DF inter tertiam et quartam, composita erit ex ratione segmenti AB secundae inter occursum A et tertiam ad ejusdem segmentum BE inter tertiam et quartam, et ex ratione segmenti KE

P R O P. XXIII.

Quae est Porifina 1. Lib. 1. Porismatum Euclidis.

“ Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae ad rectam positione datam, abscindat autem earum una a recta positione data segmentum dato in eo puncto adjacens, auferet etiam altera ab alia recta segmentum “ dato puncto “ adjacens,” datamque habens rationem “ ad alterum segmentum.”

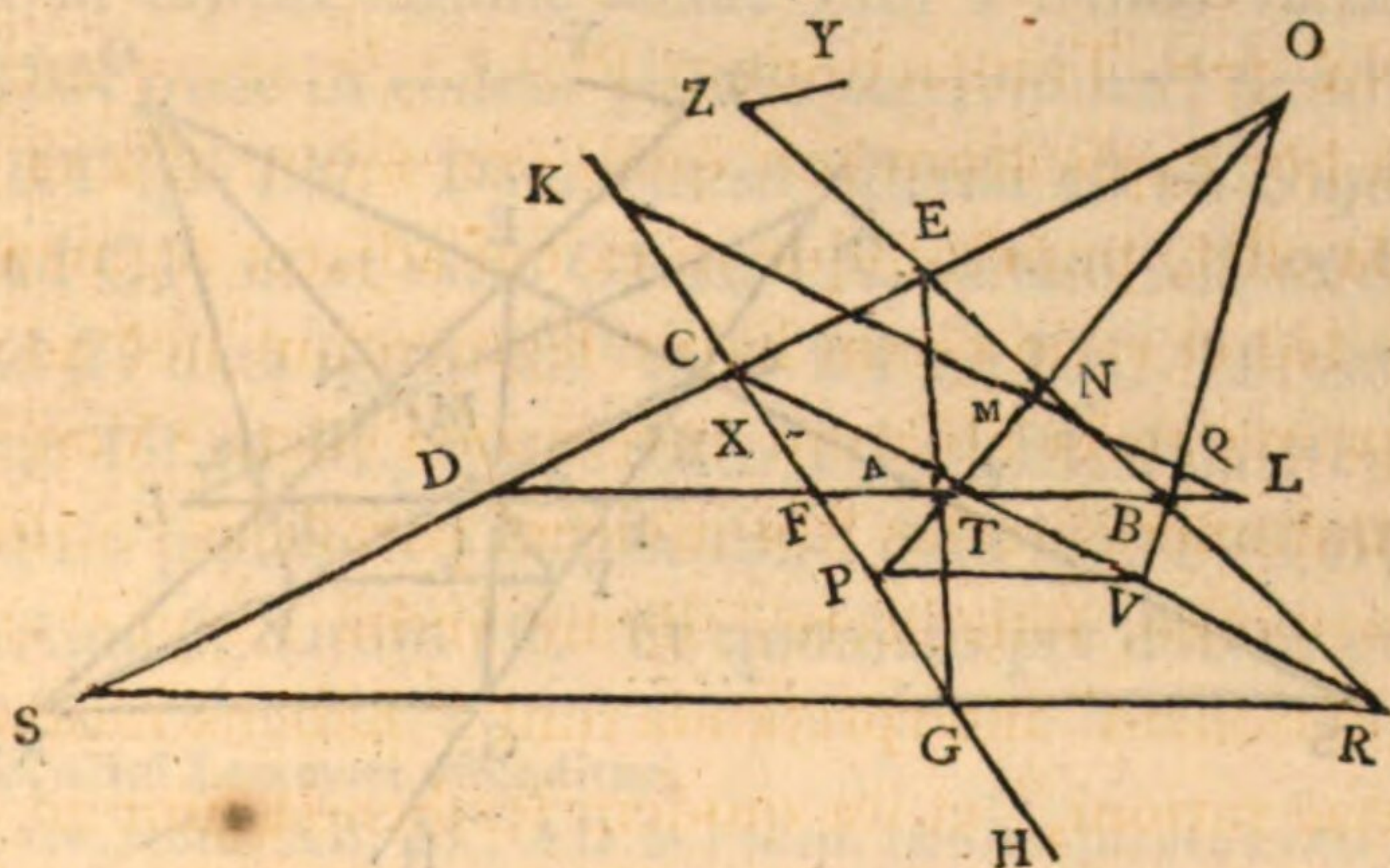
In No. 377. Transactionum Philosophicarum anno 1723, Porifina hoc explicatum fuit quasi non solum alia ea recta invenienda esset, punctumque in ea cui adjacet segmentum ablatum; sed et ratio quam habet segmentum hoc ad segmentum a prima recta ablatum inveniendâ esset. Verum postea inveni innumeras rectas sibi invicem parallelas Porismati, hoc modo proposito, satisfacere; igitur verba Pappi “ datamque habens rationem” interpretanda sunt “ habens rationem eandem datae rationi,” et ita quidem scribenda sunt ad clare distinguendum ea quae data sunt ex hypothese in Porismate ab iis quae data fore affirmantur, et invenienda proponuntur. Et in hoc sensu Propositionis, qui quidem genuinus est, duae quartae inter tertiam et secundam ad ejusdem segmentum KF inter tertiam et primam.

Ducatur enim ad AB recta FL parallela ipsi KB, ratio igitur AD ad DF eadem est rationi AB ad BL quae composita est ex ratione AB ad BE, et ratione (EB ad BL, hoc est ratione) EK ad KF.

Commandinus ad notam G commentarii ejus ad hunc locum Prop. sc. 127. Lib. 7. Pappi, ponit junctam GL parallelam esse ipsi BC; hoc autem minime assumendum est, ita enim tota fere demonstratio prima assumenda esset, si autem hoc fieret, demonstratio secunda omnino inutilis esset.

tantum rectae Porismati satisfaciunt. Investigatio autem Porismatis ita fiet.

Sint A, B puncta data, a quibus ad rectam CD positione datam inflectantur utcunque rectae AE, BE ; auferat autem earum una AE a recta positione data CF segmentum GH dato puncto H adjacens; ostendendum est alteram inflexam BE auferre segmentum ab alia quadam recta dato puncto in ea adjacens quod ad alterum segmentum GH habet rationem eandem datae rationi quam habet data recta β ad datam α , et



alia haec recta invenienda est et data ostendenda, et punctum in ea, cui adjacet segmentum auferendum, datum ostendendum est.

Puta Porisma verum esse, et rectam KL eam esse ex qua segmentum auferendum est ab inflexa a puncto B, et esse M punctum cui segmentum adjacet. Occurrat igitur BE ipsi KL in N, et NM erit segmentum abscissum. Ex hypothese igitur habet GH ad NM eandem rationem quam habet recta α ad ipsam β . Occurrat juncta AB ipsi CD in D, et CF, KL ipsi AD

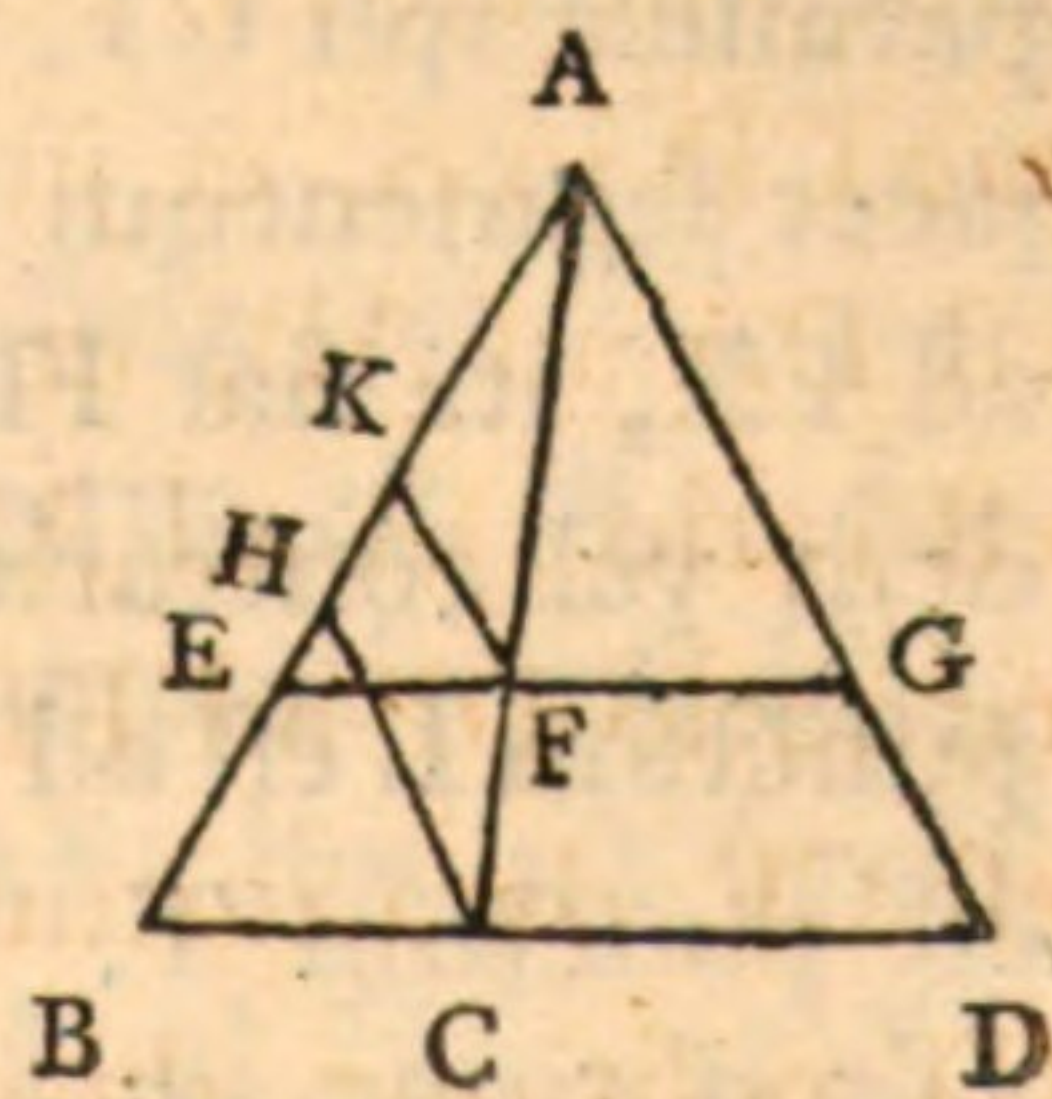
E e e

CT, CF ipsarumque ratio, quare et ratio RT ad GF data est. Occurrat OB ipsi CR in V, et PV jungatur; et quoniam est DA ad AB, ut DF ad FT, et a punctis A, B, ad rectam CD inflexae sunt AO, BO; ad eandem autem CD a punctis F, T inflexae sunt FC, TC ipsis AO, BO occurrentes in P, V, erit ^a Prop. 22. recta PV parallela ipsi AB, ideoque et ipsi GR. Est igitur ut RT ad GF, ita VT ad PF; ut vero GF ad LN, ita ostensa fuit PF ad LQ; ergo, ex aequali, ut RT ad LN, ita VT ad LQ; et permutando, ut RT ad TV, ita NL ad LQ; hoc est rectae RT, LN in eadem ratione sectae sunt a tribus rectis TBL, VBQ, RBN quae in eodem puncto conveniunt; parallela igitur ^b est RT ipsi LN. Data autem ostensa est ratio quam ha- ^b Vide infra. bet RT ad GF, ut et ratio GF ad LN, eadem scilicet datae rationi α ad β ; data igitur est ^c ratio RT ad LN. Est autem RT ^c 9. Dat. ad LN, ut TB ad BL, quare ratio TB ad BL data est; et data est TB, quia puncta T, B data sunt, data igitur est BL, ideoque punctum L datum est. Et quoniam per datum punctum

^b Hoc sequenti Lemmate ostenditur.

“ SI inter tres rectas AB, AC, AD in eodem puncto convenientes ducantur
 “ duae rectae BCD, EFG quae in eadem ratione sectae sunt in C, F, ductae
 “ erunt inter se parallelae.”

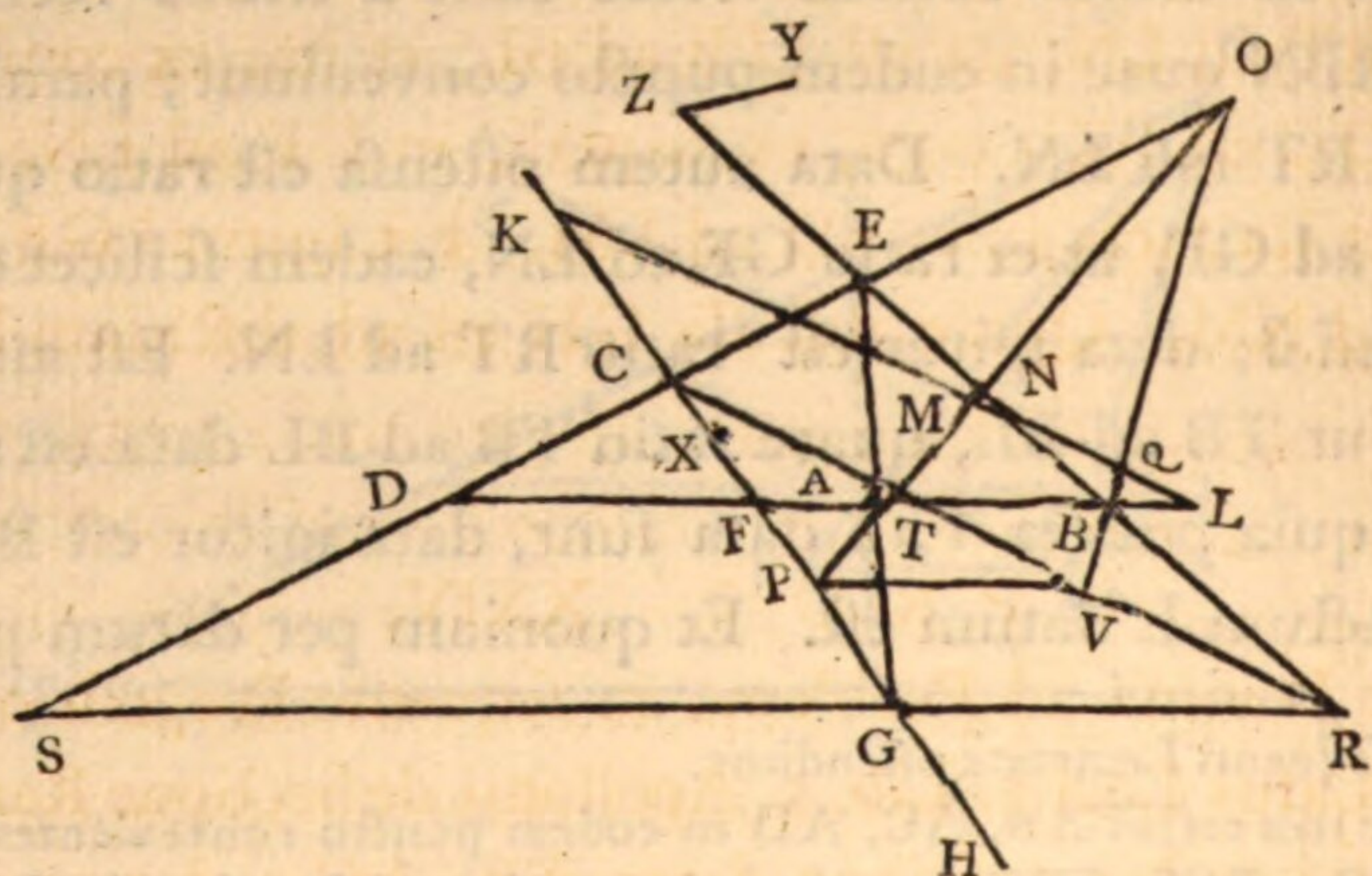
Ducantur enim ad AB rectae CH, FK ipsi AD parallelae; quoniam igitur, ex hypothesi, est ut BC ad CD, ita EF ad FG; propter parallelas erit BH ad HA, ut EK ad KA; et componendo permutandoque, ut BA ad EA, ita (HA ad AK, et ita) CA ad AF. Parallelae igitur sunt BC, EF. Vel ita, manente eadem constructione, Quoniam est BH ad HA, ut (BC ad CD, hoc est ex hypothesi, ut EF ad FG, hoc est ut) EK ad KA; ut vero HA ad HC, ita est KA ad KF; igitur, ex aequali, erit BH ad HC, ut EK ad KF. Et sunt circa angulos aequales, igitur aequiangula sunt BHC, EKF triangu- la, et angulus CBH aequalis erit ipsi FEK, et propterea BD, EG sunt parallelae.



^d 31. Dat. L ducta est KL parallela rectae CT positione datae, positione data ^d est KL. Et quoniam data est FH, et ratio ipsius ad LM, data erit LM; et datum est punctum L, quare et punctum M. Recta igitur KL punctumque M positione data sunt. Quae fuerunt investiganda.

Componetur vero ita.

Occurrat recta per data puncta A, B ducta positione datis CD, CF in punctis D, F; ut autem α ad β , ita fiat CF ad FX; et ut DA ad AB, ita fiat DF ad FT, et juncta CT produca-



tur; fiat etiam ut CT ad FX, ita TB ad BL, quae ponatur in recta BD versus utraque partes puncti B; et ducatur LK parallela ipsi CT. Sit autem H punctum datum in CF cui adjacet segmentum rectae a puncto A inflexae abscissum, et ut CF ad FX, ita fiat FH ad LM, quae ponatur in recta LK ad eandem vel contrarias partes rectae DL ad quas est FH, prout punctum L est ad eandem vel contrarias partes puncti B ad quas est punctum T. Erit recta KL ea ex qua inflexa a puncto B aufert segmentum puncto M adjacens, quod ad segmentum ex

recta CF abscissum puncto H adjacens a recta inflexa a puncto A eandem habebit rationem quam β ad α , seu quam habet FX ad FC.

Inflectantur enim utcunque a punctis A, B ad rectam CD rectae AE, BE, occurratque AE ipsi CF in G, BE vero ipsi KL in N; abscindant autem ex CF, KL segmenta GH, NM punctis H, M adjacentia. Erit GH ad NM, ut CF ad FX, hoc est ut α ad β . Occurrat enim BE ipsi CT in R, et jungatur GR. Quoniam igitur ut DA ad AB, ita est DF ad FT, erit^a Pr. 22. GR parallela ipsi AB; ut igitur GF ad RT, ita est FC ad CT; ut vero RT ad LN, ita est (TB ad BL, et ita, ex constructione, est) TC ad FX; ergo, ex aequali, ut GF ad LN, ita (CF ad FX, et ita facta fuit) FH ad LM. Est igitur^b GF ad LN,^{b12, aut 19.5.} ut GH ad NM. Quare abscissa GH est ad abscissam NM, ut α ad β .

P R O P. XXIV.

Quae est Lemma ad Problema in sequente Propositione; est autem Casus Loci 1. Lib. 2. Apollonii de Sectione Rationis.

“ Ad duas rectas positione datas AB, AC a dato puncto D
 “ extra ipsas, rectam ducere DFE quae abscindet a positione
 “ datis segmenta EB, FC inter se aequalia, datis punctis B, C
 “ adjacentia.”

Factum puta; et ad AB ducatur DH parallela ipsi AC, ponatur autem BG aequalis ipsi AC; data igitur est BG, datumque punctum G. Ponatur etiam HK aequalis ipsi HD, et quoniam ut EH ad HD, ita est EA ad AF, hoc est (quia EG aequalis est ipsi AF, et KH ipsi HD) EH ad HK, ut AE

ope Porismatis in Prop. 23. inveniatur praeterea recta BEZ per Prop. 24. quae abscindat a rectis KL, ZY segmenta aequalia NM, ZY datis punctis M, Y adjacentia, occurratque BZ rectae CD in E, et AE jungatur quae occurrat ipsi CF in G; erit HG ad YZ, ut α ad β . Ex constructione enim est GH ad NM, ut α ad β , et itidem ex constructione, est NM aequalis ipsi ZY; igitur est GH ad ZY, ut α ad β .

Porismati sequenti utilia sunt octo Lemmata quae habentur in Lib. 7. Pappi, in Prop. scilicet 136. et septem sequentibus, et quamvis sine iis Porisma ostendi potest, ne tamen eorum usus Geometras diutius lateat, Lemmata ea hic tradere non inutile visum est.

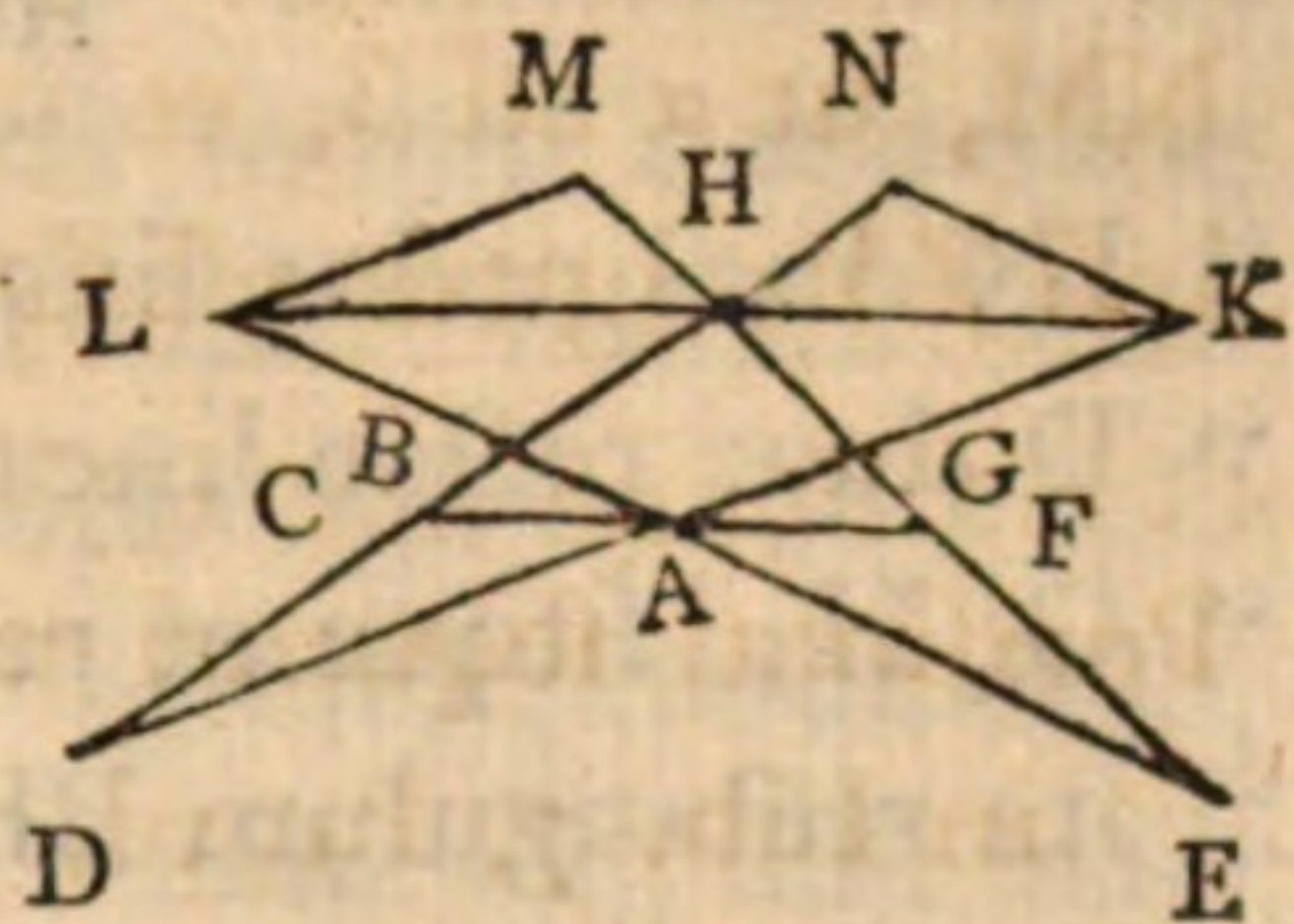
P R O P. XXVI.

Quae est 136. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum in Porismata; est autem conversa Prop. 17. hujus.

“ IN duas rectas lineas BAE, DAG duae rectae lineae ab eodem puncto ducantur HD, HE, et in ipsis sumantur puncta C, F; fitque ut rectangulum quod continetur DH, CB ad contentum DC, BH, ita rectangulum contentum EF, GH ad contentum EH, FG. Dico rectam lineam esse quae per puncta C, A, F transit.”

Ducatur per H ipsi CA parallela KL, quae cum AB, AD in punctis L, K conveniat; et per L ipsi AD parallela agatur LM, producatique EH ad M. Deinde per K parallela ipsi AB ducatur KN, et DH ad N producat. Itaque quoniam

ob lineas parallelas fit ut DH ad HN , ita DC ad CB *, erit rectangulum DH , CB aequale ipsi DC , HN . Sed aliud aliquod rectangulum est quod DC , BH continetur; ergo ut rectangulum DH , CB ad ipsum DC , BH , ita rectangulum DC , HN ad DC , BH , hoc est ita recta HN ad BH . Sed ut rectangulum quidem DH , CB ad ipsum DC , BH , ita ponitur esse rectangulum EF , GH ad ipsum EH , FG ; ut autem recta HN ad BH , ita in parallelis est KH ad HL , et ita GH ad HM , et ita est rectangulum EF , GH ad ipsum EF , HM . Igitur ut rectangulum EF , GH ad ipsum EH , FG , ita rectangulum EF , GH ad ipsum EF , HM ; rectangulum igitur EH , FG aequale est ipsi EF , HM . Quare ut MH ad HE , ita est GF ad FE ; componendoque et permutando, ut ME ad EG , ita HE ad EF . Sed ut ME ad EG , ita LE ad EA ; ut igitur LE ad EA , ita HE ad EF , et propterea AF parallela est ipsi LHK . Sed et CA eidem LK est parallela; igitur recta linea est quae per C , A , F transit. Quod oportebat demonstrare.



Notandum est Pappi Propositionem 142. Lib. 7. eandem esse cum hac 136. demonstrationem vero aliam in ea tradit. Utraque autem demonstratio figuris utriusque Propositionis convenit, ut ex sequenti demonstratione, quae est ea quâ Pappus utitur in Prop. 142. patebit. Notae autem alphabeticae sunt eae quae habentur in Prop. 142. rationem vero propter quam

* Est enim DH ad HK , ut DC ad CA ; ut vero HK ad HN , ita est CA ad CB , propter similia triangula KHN , ACB ; igitur, ex aequali, ut DH ad HN , ita DC ad CB .

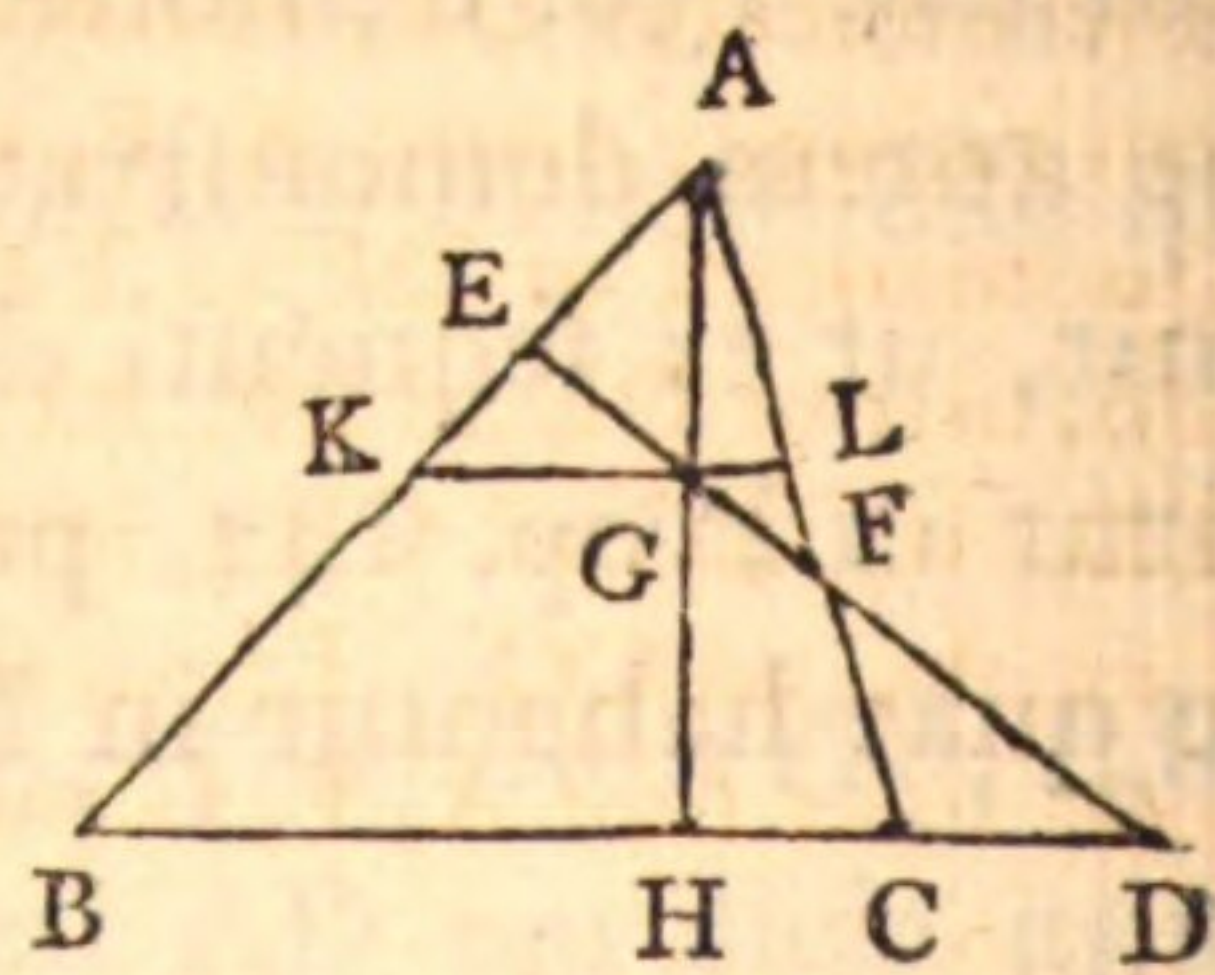
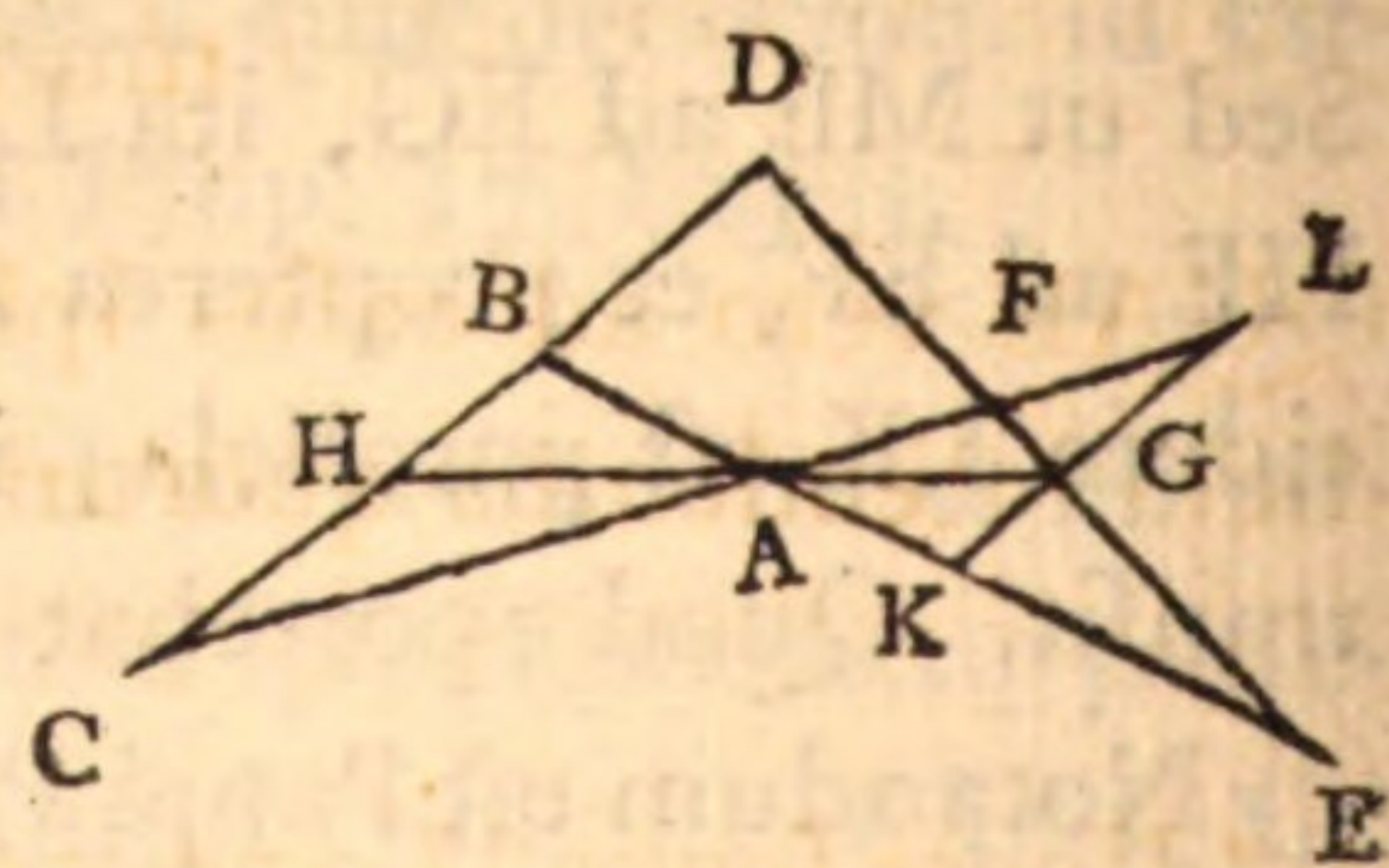
Pappus has Propositiones tanquam diversas tradiderit non facile est divinare.

P R O P. XXVII.

Haec est ipsissima Pappi Prop. 142. et continet aliam demonstrationem Prop. 136.

“ IN duas rectas lineas AB, AC, ducantur ab eodem puncto
 “ D duae rectae lineae DB, DE, et in ipsis sumantur puncta
 “ G, H; sitque ut rectangulum EG, FD ad ipsum ED, GF,
 “ ita rectangulum BH, CD ad ipsum BD, HC. Dico rectam
 “ lineam esse quae per A, G, H puncta transit.”

Ducatur per G ipsi BD parallela KL, occurratque ipsis AB, AC in K, L. Itaque quoniam est ut rectangulum EG, FD ad ipsum ED, GF, ita rectangulum BH, CD ad ipsum BD, CH; ratio autem rectanguli EG, FD ad ipsum ED, GF composita est ex ratione quam habet GE ad ED, hoc est ratione KG ad BD, et ex ratione quam habet DF ad FG, hoc est ratione CD ad GL; et ratio rectanguli BH, CD ad ipsum BD, CH composita est ex ratione HB ad BD, et ex ratione DC ad CH; erit ratio composita ex ratione KG ad BD, et ratione CD ad GL eadem ei quae composita est ex ratione HB ad BD, et ratione DC ad CH. Sed ratio KG ad BD composita est ex ratione KG ad HB, et ratione



HB ad BD; ratio igitur composita ex ratione KG ad HB, et ratione HB ad BD, et insuper ex ratione CD ad GL eadem est ei quae composita est ex ratione HB ad BD, et ratione DC ad CH. Communis auferatur ratio HB ad BD, ergo reliqua ratio quae composita est ex ratione KG ad HB et ratione CD ad GL eadem est rationi DC ad CH, hoc est rationi compositae ex ratione DC ad GL, et ratione GL ad CH. Rursus communis auferatur ratio DC ad GL; reliqua igitur ratio KG ad HB eadem est rationi GL ad CH; igitur, permutando, ut KG ad GL, ita est BH ad HC. Sunt autem KL, BH inter se parallelae; ergo recta linea est quae per H, A, G puncta transit.*

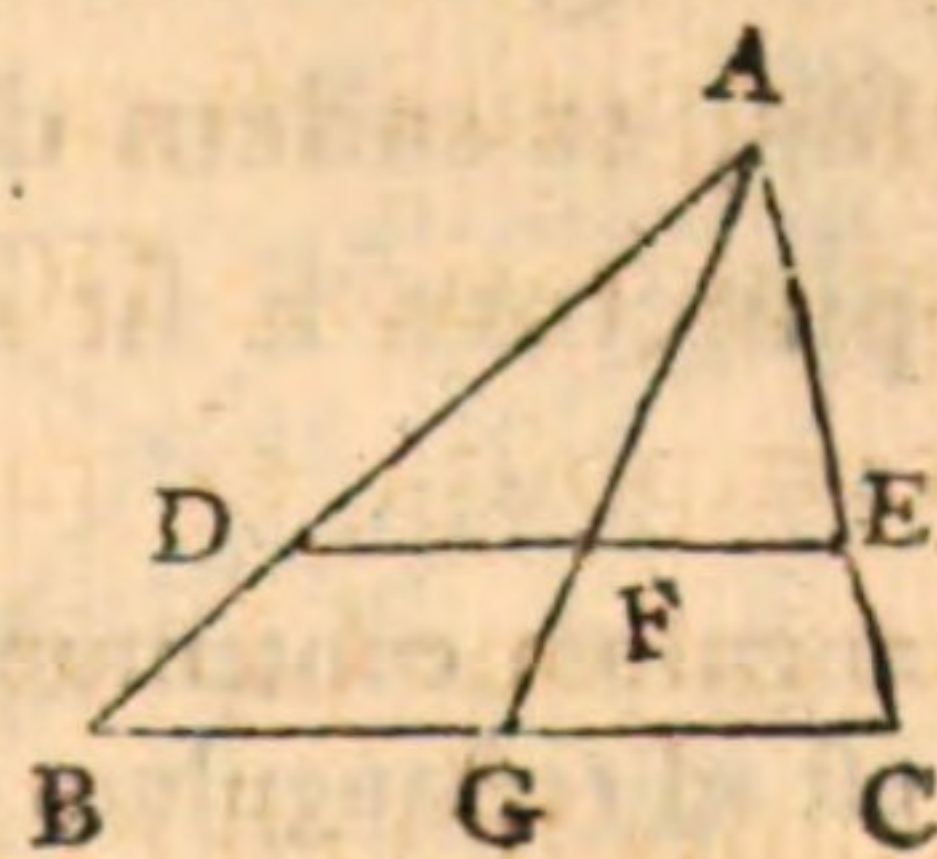
P R O P. XXVIII.

Quae est Prop. 137. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus undecimum in Porismata.

QUAE vero ad casus ipsius † pertinent similiter atque antedicta ostendemus quorum est conversum, videlicet, “ Sit tri-

* Hoc ex sequenti Lemmate patebit, viz. Sit triangulum ABC, ipsique BC parallela ducatur DE, et sectae sint DE, BC in F, G in eadem ratione; erunt A, F, G puncta in recta linea.

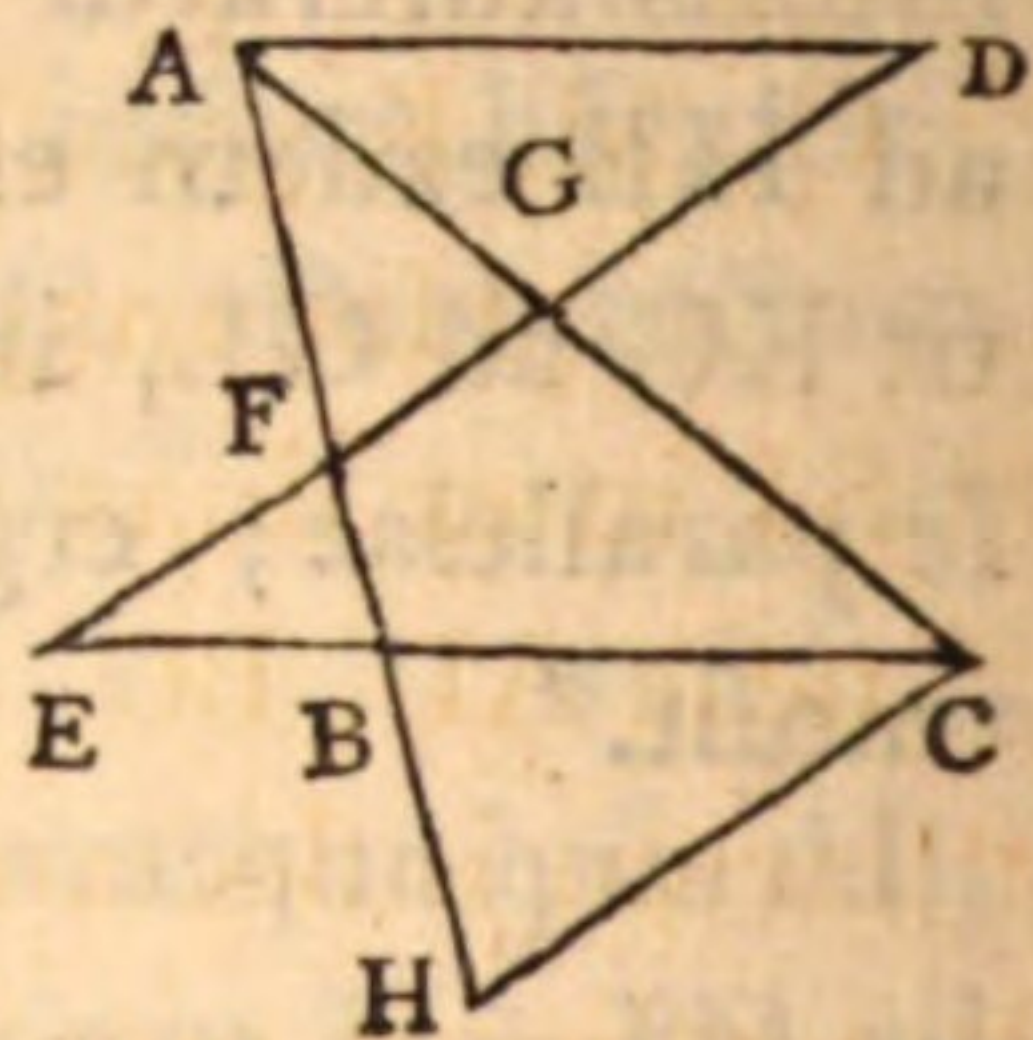
Quoniam est ut DF ad FE, ita BG ad GC, componendo, erit ut DE ad EF, ita BC ad CG; ut vero AE ad ED, ita AC ad CB; igitur ex aequali, ut AE ad EF, ita AC ad CG. Et parallelae sunt EF, CG; ergo in recta linea sunt A, F, G puncta.



† Prop. 137. Lib. 7. Pappi est casus Prop. 129. hoc est Prop. 17. hujus, in quo in tres rectas in eodem puncto convenientes, viz. AB, CA, AD ductae sunt duae ED, EC quarum una EC parallela est uni AD ex tribus; unde rect-

“ angulum ABC, et ipsi BC parallela ducatur AD, et ducta
 “ DE conveniat cum BC in puncto E, “ et cum ipsis AB, AC
 “ in F, G.” Dico ut rectangulum ED, FG ad ipsum EF, GD,
 “ ita esse CB ad BE.”

Ducatur per C ipsi DE parallela CH, et AB ad H produ-
 catur; itaque quoniam est ut CA ad AG, ita CH ad GF, et
 ut CA ad AG, ita ED ad DG; erit ut ED
 ad DG, ita CH ad FG, ac propterea rect-
 angulum CH, GD aequale est ipsi ED, FG.
 Sed aliud aliquod rectangulum est EF,
 GD; ergo ut rectangulum ED, FG ad ip-
 sum EF, GD, ita rectangulum CH, GD
 ad ipsum EF, GD, hoc est ita CH ad EF,
 et ita CB ad BE. Ex quibus sequitur ut rectangulum ED, FG
 ad rectangulum EF, GD, ita esse CB ad BE.



“ Eadem ratione, et si ad alteras partes agatur parallela
 AD, atque” &c. usque ad finem Propositionis apud Comman-
 dinum, ut ille textum Graecum restituendum et supplendum
 censet; haec omnino sunt superflua, ut et Commandini de-
 monstratio ad notam G in commentario ejus; etenim si in e-
 jus figura 2da ponatur C ubi B, et B loco C, idem erit ca-
 sus, et eadem demonstratio cum ea praecedentis; ut etiam si
 punctum E sit inter B et C.

angulum contentum BC, et segmento inter E et occursum ipsarum AD, EO
 est ad rectangulum contentum EB, et segmento inter C et eundem occursum,
 ut recta CB ad ipsam BE.

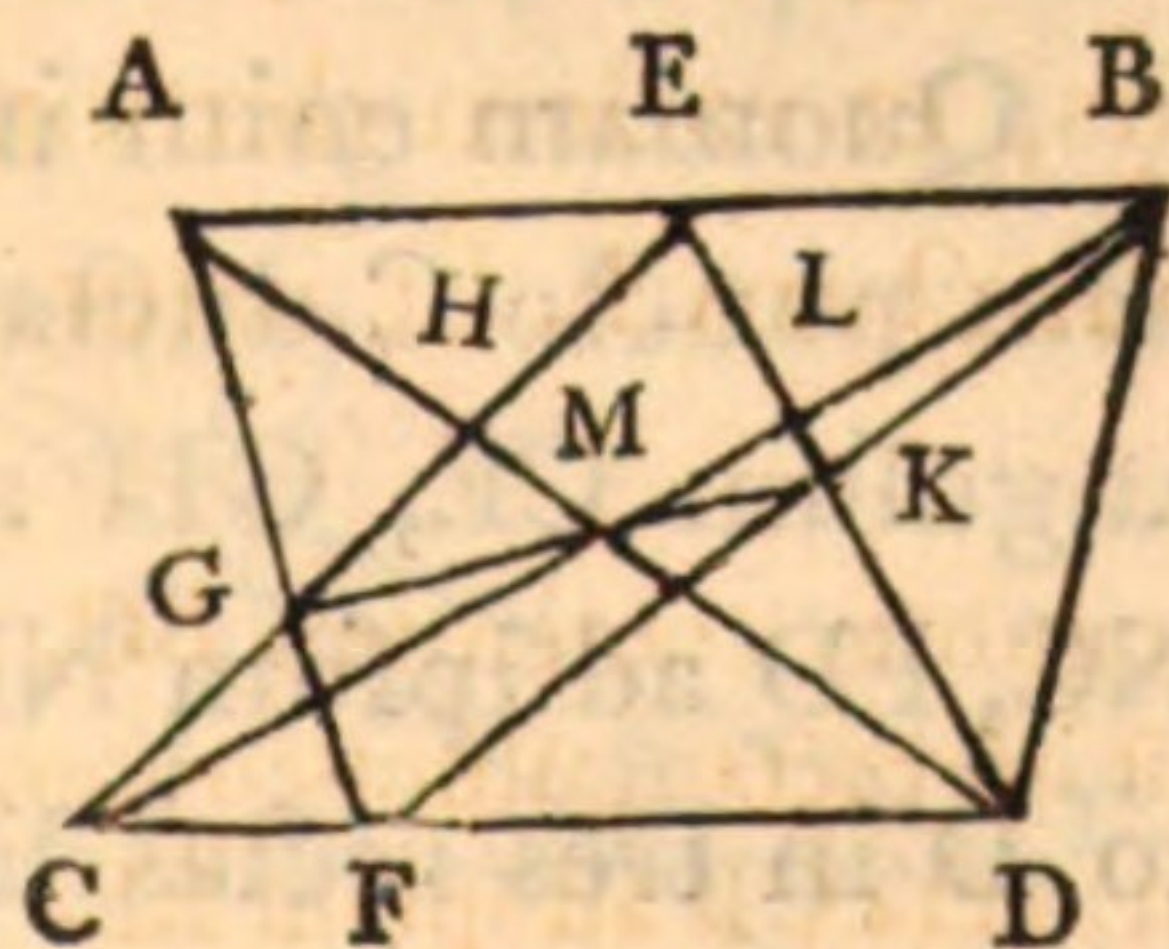
P R O P. XXIX.

Quae est Prop. 138. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus duodecimum in Porismata.

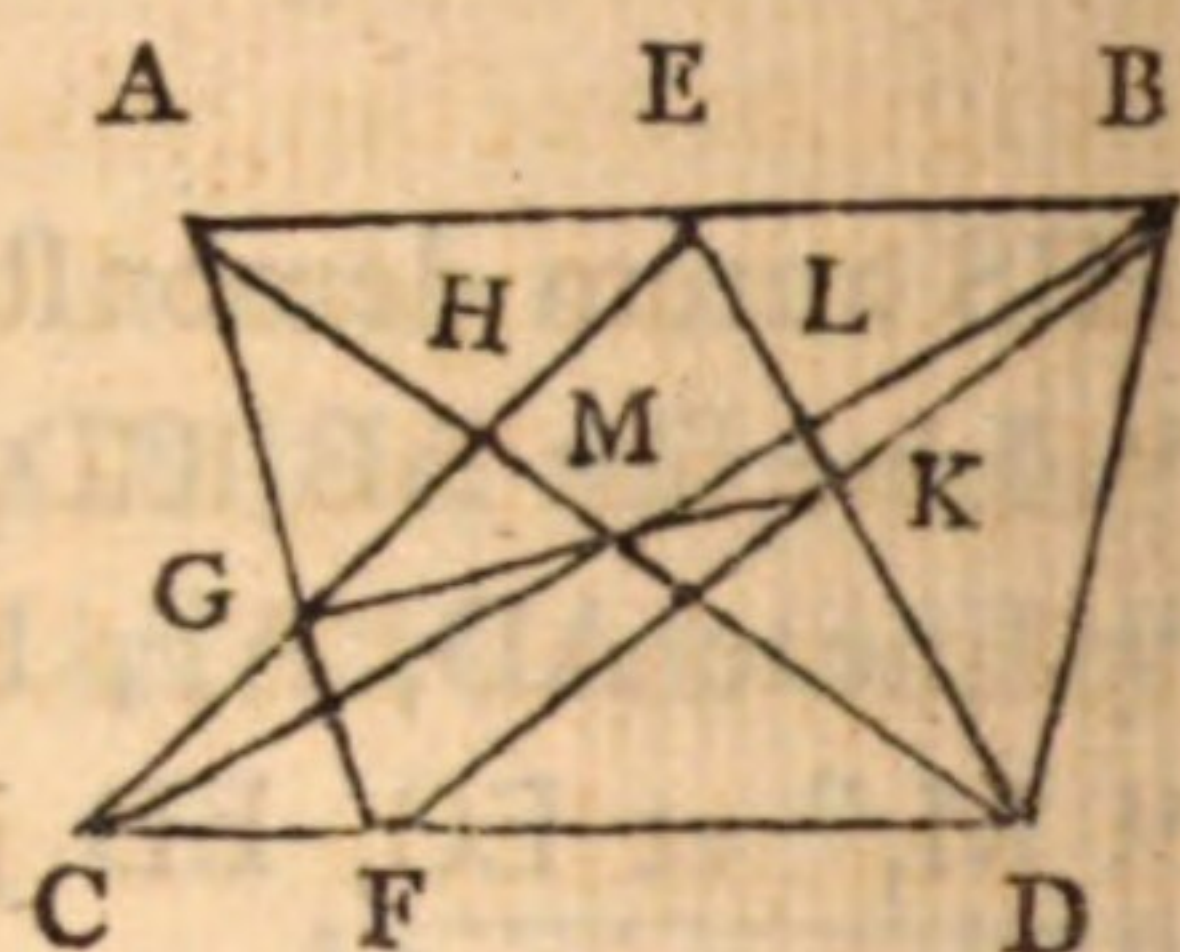
HIS autem demonstratis, nunc ostendendum est, “ Si parallelae sint AB, CD, atque in ipsas incidant quaedam rectae lineae AD, AF, BC, BF, “ quarum AD, BC occurrant in “ M,” et EC, ED jungantur; rectam lineam esse quae per “ G, M, K puncta transit.”

Hoc magis explicite enuntiatur ut sequitur,
 “ SI inter duas parallelas AB, CD ducantur duae rectae lineae AD, BC, et a punctis A, B quae sunt in una parallelarum inflectantur ad reliquam CD duae rectae AF, BF; et a reliquis punctis C, D, ad AB inflectantur CE, DE; recta linea GK quae transit per intersectiones G, K inflexarum quae fiunt a rectis quae non inflectuntur a terminis ejusdem ductae, verget ad punctum M intersectionem scilicet ductarum AD, BC.”

Quoniam enim triangulum est DAF, ipsique DF parallela est AE, et ducta est EC conveniens cum DF in C, et cum ipsis AF, AD in G, H, erit, per antecedens Lemma, sc. Prop. 28. ut DF ad FC, ita rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE. Rursum quoniam triangulum est CBF, et ipsi CD parallela est BE, ductaque est ED conveniens cum CF in D, et cum ipsis BC, BF in L, K; fiet ut CF ad FD, ita rectangulum DE, KL ad ipsum DK, LE,



et invertendo, ut DF ad FC, ita erit rectangulum DK, LE ad ipsum DE, KL. Sed ut DF ad FC, ita erat rectangulum CE, GH ad rectangulum CG, HE; ut igitur rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita est rectangulum DK, LE ad ipsum DE, KL. Itaque res deducta est ad decimum Lemma Pappi, five Prop. 26. hujus, cum in duas rectas lineas CML, DMH, ductae sint duae rectae lineae EC, ED, et ut rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita sit rectangulum DK, LE ad ipsum DE, LK, erit recta linea quae per puncta G, M, K transit. Hoc enim demonstratum est.



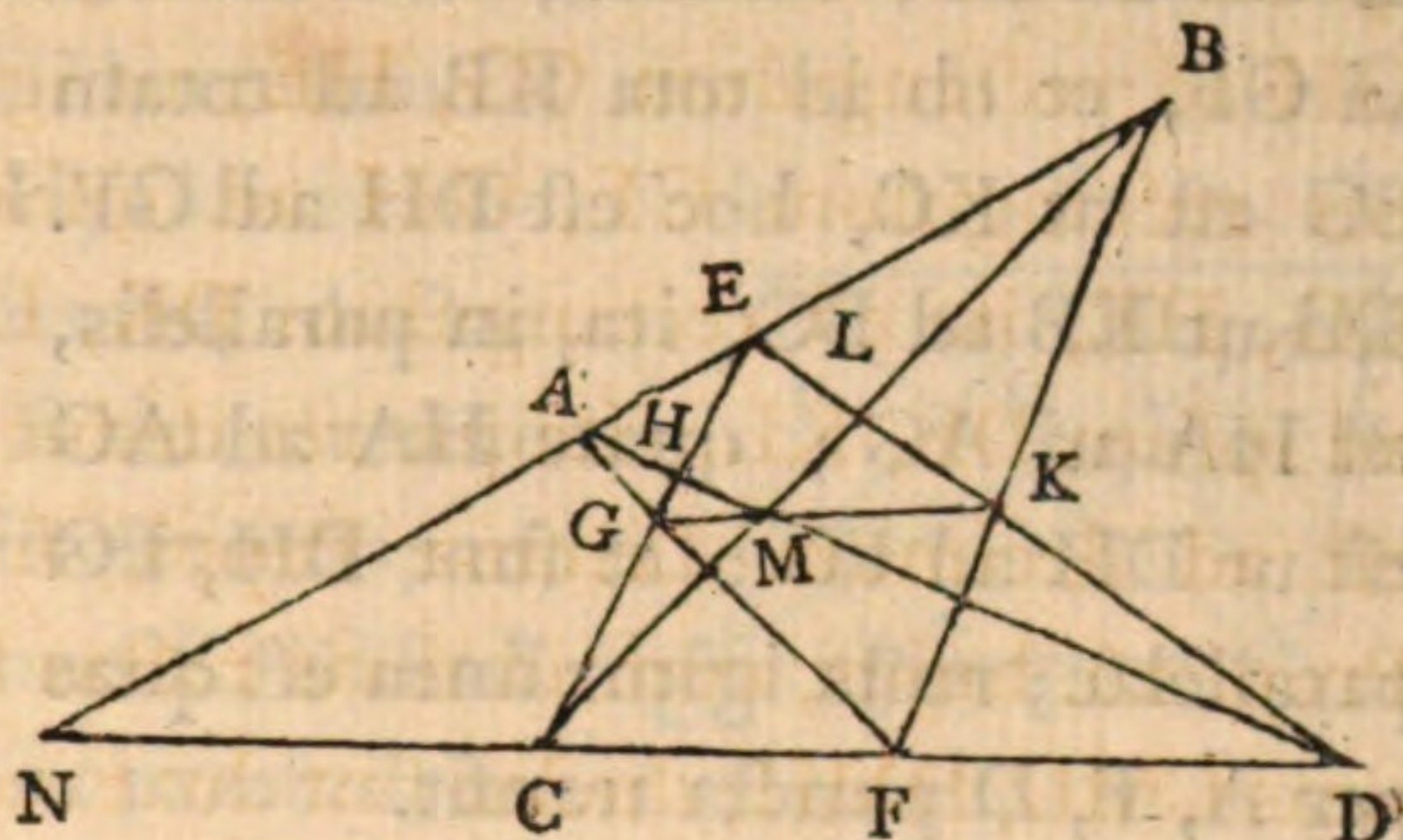
P R O P. XXX.

Quae est Prop. 139. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum tertium.

“ SED non sint AB, CD parallelae, et in puncto N conveni-
 “ ant, reliquis ut in praecedente manentibus; Dico rursus
 “ rectam lineam esse, quae per G, M, K puncta transit.”

Quoniam enim in tres rectas lineas AN, AF, AD, ab eodem puncto C ductae sint duae rectae lineae CE, CD, ut rect-
^a Pr. 17. angulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita est ^a rectangulum NC, FD ad ipsum ND, CF. Rursus quoniam ab eodem puncto D in tres rectas lineas BN, BC, BF duae rectae lineae DE, DN ductae sunt, erit ^a ut rectangulum NC, FD ad ipsum ND, CF, ita rectangulum DK, LE ad ipsum DE, KL. Sed ut rect-

angulum NC, FD ad rectangulum ND, CF, ita demonstratum est rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE. Ut igitur rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita est DK, LE ad rectangulum DE, KL. Et res deducta est ad idem quod in parallelis. Ergo ex jam dictis recta linea est quae per G, M, K transit.

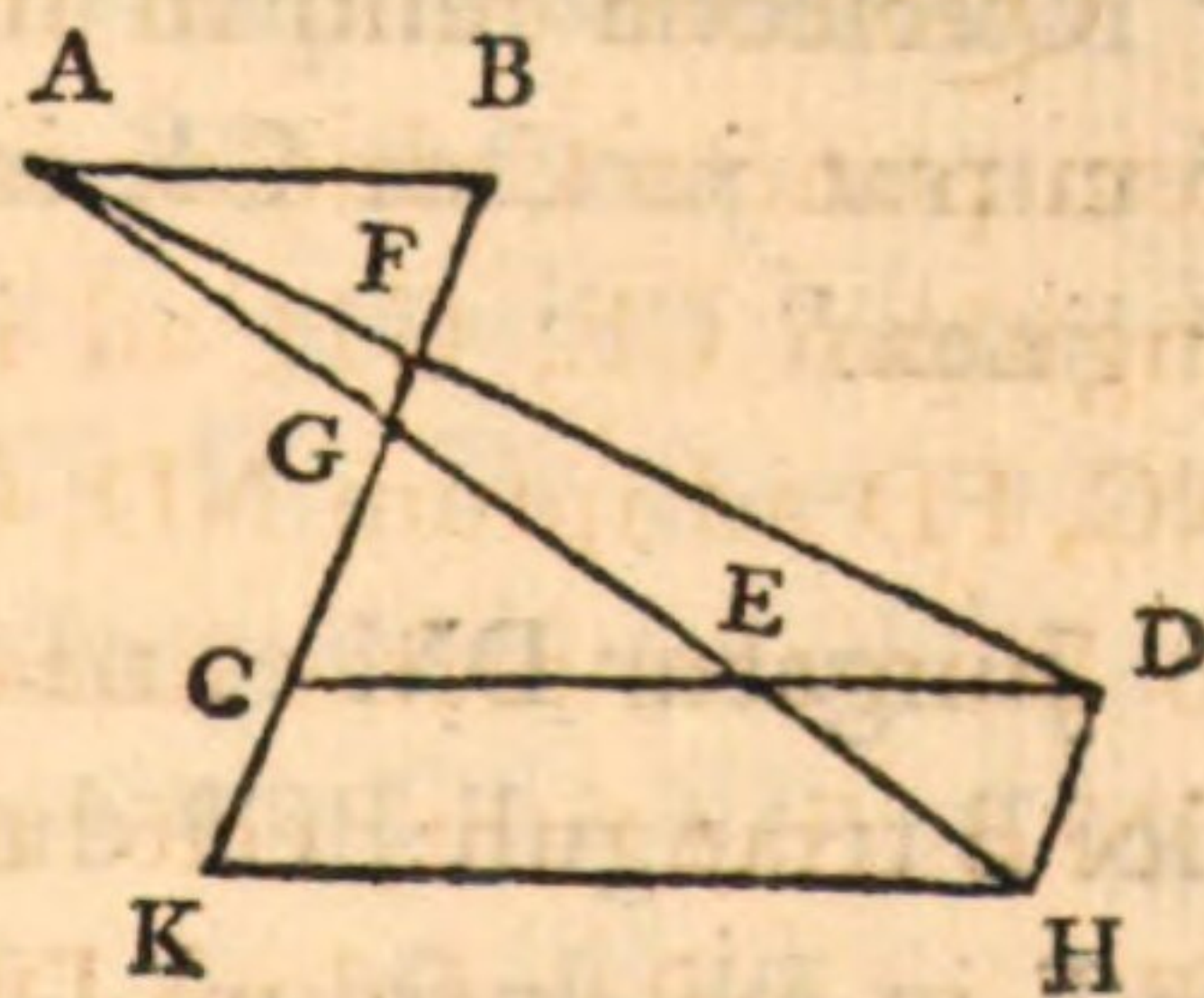


P R O P. XXXI.

Quae est Prop. 140. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum quartum in Porismata. Est autem conversa Prop. 28. hujus.

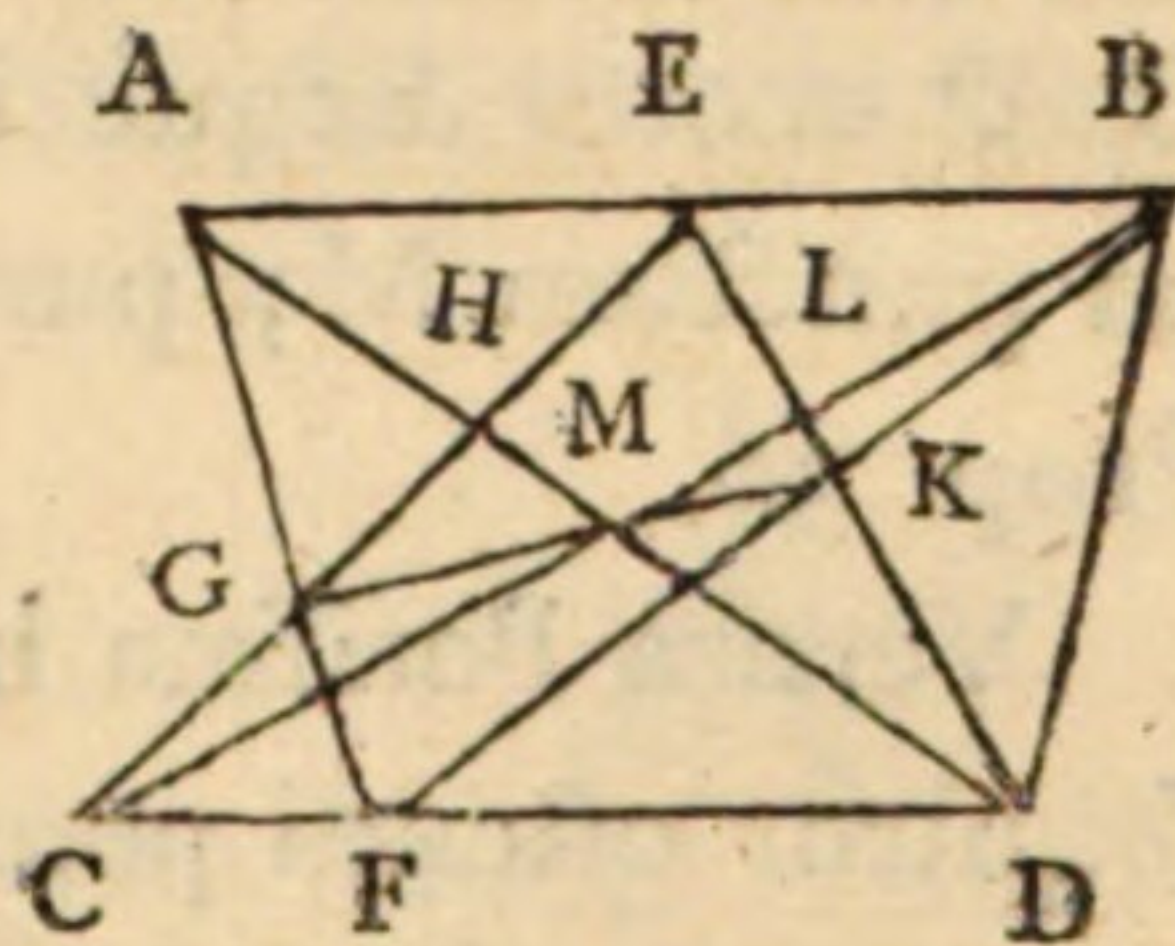
“SIT AB parallela rectae CD, ducanturque AE, BC, et fit
 “ punctum F in recta linea BC, ita ut quam rationem habet
 “ DE ad EC, eandem habeat rectangulum CB, GF ad rect-
 “ angulum CG, FB. Dico rectam lineam esse quae per A, F,
 “ D puncta transit.”

Ducatur per D quidem ipsi BC parallela DH, et produ-
 catur AE ad H; per H vero agatur HK ipsi CD parallela, et BC ad K
 producat. Itaque quoniam ut DE
 ad EC, ita est rectangulum CB, GF
 ad ipsum CG, FB, ut autem DE ad
 EC, ita et DH ad CG et rectangu-
 lum DH, FB ad ipsum CG, FB; e-



Positione datae sint tres rectae AF, BF, CFD in eodem puncto F convenientes, et in una earum data sint duo puncta C, D, a quibus ad quartam rectam AB positione datam inflectantur duae rectae CE, DE, et sint G, K duae ex intersectionibus ipsarum CE, DE, et rectarum AF, BF; juncta GK verget ad punctum datum.

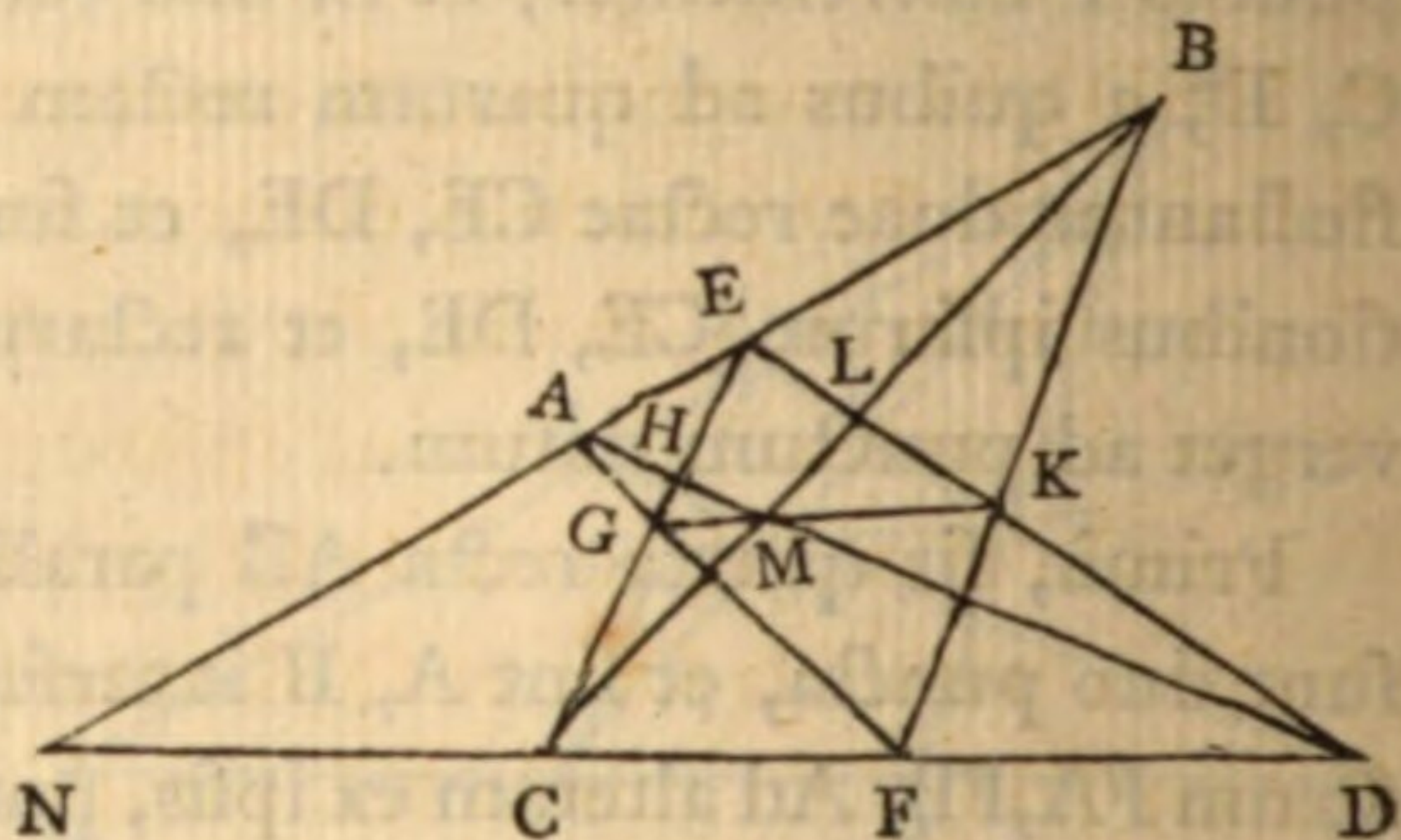
Primò, sit quarta recta AB parallela ipsi CD in qua data sunt duo puncta, et sint A, B intersectiones ipsius AB, et ipsarum FA, FB. Ad alteram ex ipsis, puta B, inflectantur a punctis C, D rectae CB, DB, et quoniam punctum B est intersectio ipsarum FB, DB, intersectio vero ipsarum FA, CB est in ipsa CB, erit CB



recta quae jungit duas intersectiones inflexarum CB, DB et ipsarum FA, FB; igitur, ex hypothese, CB verget ad punctum datum. Rursus a punctis C, D ad AB inflectantur utcunque rectae CE, DE, et sint G, K intersectiones ipsarum et rectarum FA, FB; ex hypothese, igitur, juncta GK verget ad punctum datum. Occurrat GK ipsi CB in M, igitur punctum M est illud quod Porisma datum esse affirmat, quod quidem patet ex Prop. 32. nam in ea ostensum est punctum M esse in recta AD, idem autem est in recta CB, et positione datae sunt AD, CB, data enim sunt puncta A, B, C, D; datum igitur est punctum M ad quod verget recta GK.

Jungantur igitur AD, CB et convenient in M, erit M punctum inveniendum; hoc est si ad AB inflectantur utcunque a punctis C, D rectae CE, DE, occurrantque ipsis FA, FB in G, K; erunt G, M, K puncta in recta linea, ut constat ex Prop. 29.

Sed non fit AB parallela ipsi CD, reliquis ut in primo casu manentibus, et fit punctum M interseccio ipsarum CB, GK; erunt igitur A, M, D in recta linea per Prop. 33. et quoniam positione datae sunt CB, AD rectae, datum erit punctum M. Si igitur utcumque inflectantur rectae CE, DE ad rectam AB a punctis C, D occurrantque ipsis FA, FB in G, K, verget juncta GK ad punctum M; puncta enim G, M, K sunt in recta linea per Prop. 30.



Verum Porisma hoc ope multo pauciorum Lemmatum ut sequitur ostendi potest.

P R O P. XXXV.

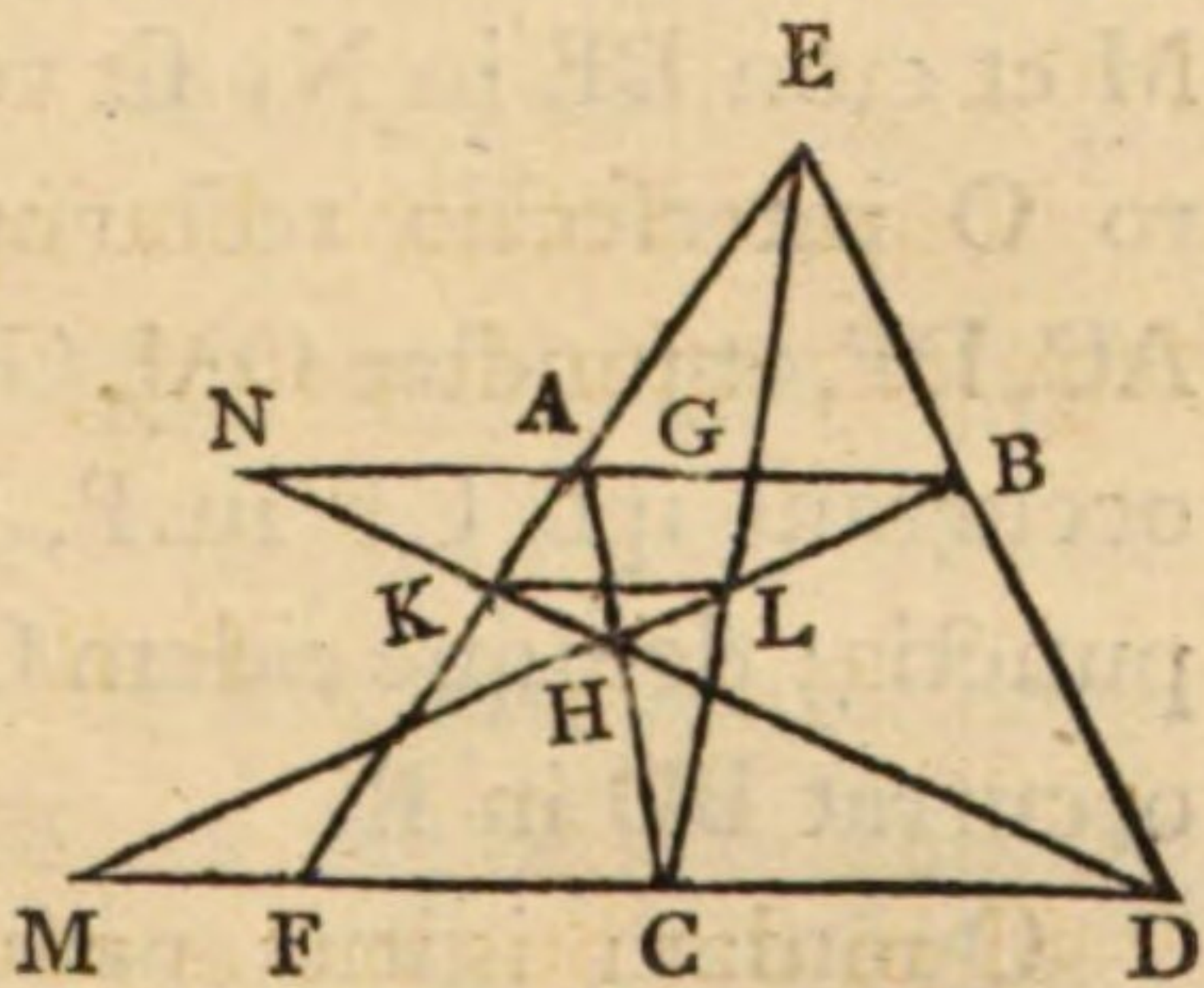
“ SI in duabus rectis parallelis AB, CD sumantur duo puncta
 “ A, C, quorum A sit in altera, et C in reliqua parallela, et
 “ ab ipsis ad quamvis rectam BD, quae parallelis occurrit,
 “ inflectantur duae rectae AE, CE; rectangulum GB, FD
 “ contentum segmentis parallelarum inter inflexas et rectam
 “ BD, aequale erit rectangulo AB, CD contentum earundem
 “ segmentis inter puncta A, C et eandem rectam.”

Ut enim AB ad BG, ita, propter parallelas, est FD ad DC.
 * Vide Fig. Prop. 36. Rectangulum igitur GB, FD ipsi AB, CD est aequale.*

P R O P. XXXVI.

“ IISDEM manentibus, si praeterea a punctis B, D, in qui-
 “ bus recta BD parallelis occurrit inflectantur ad rectam quae
 “ per puncta A, C ducta est, aliae duae rectae BH, DH; fit-
 “ que L interseccio alterius ipsarum BH quae inflexa est a
 “ puncto B in AB, et rectae CE quae inflexa est a puncto C in
 “ altera parallela CD, et sit K interseccio reliquarum inflexa-
 “ rum DH, AE; juncta KL parallela erit rectis parallelis.”

Occurrant inflexae BH, DH parallelis in M, N punctis; et quoniam a punctis B, D in rectis parallelis AB, CD inflexae sunt ad rectam AC rectae BH, DH parallelis occurrentes in M, N, per Prop. 35. rectangulum AN, CM aequale erit rectangulo AB, CD, cui aequale ostensum fuit rectangulum GB, FD. Ut igitur FD ad NA, ita est MC ad GB, ergo, propter parallelas, ut DK ad KN, ita ML ad LB; et componendo, ut DN ad NK, ita MB ad BL; ut vero HN ad ND, ita est HB ad BM; igitur, ex aequali, ut HN ad NK, ita HB ad BL. Parallela igitur est KL rectae NB.



P R O P. XXXVII.

“ SI inter duas rectas lineas AB, CD ducantur duae rectae
 “ AC, BD, et a duobus harum terminis A, B, qui sunt in al-
 “ tera rectarum AB, CD inflectantur ad reliquam CD duae

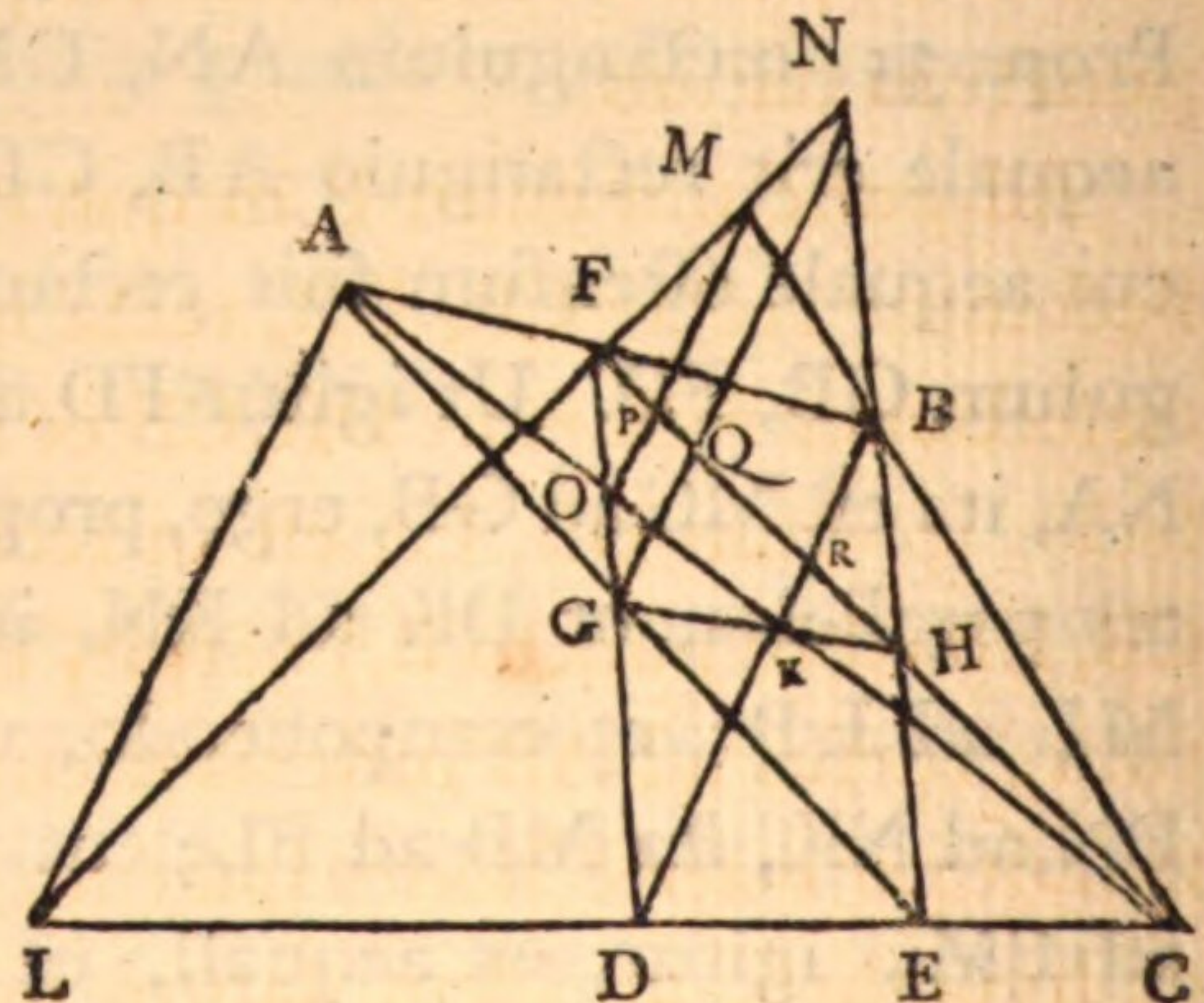
“ rectae AE, BE; et a reliquis ductarum terminis C, D in-
 “ flectantur ad rectam AB duae aliae rectae CF, DF; recta li-
 “ nea quae tranfit per intersectiones duas inflexarum quae fi-
 “ unt a rectis quae non inflexae sunt a terminis ejusdem duc-
 “ tae, verget ad intersectionem ductarum.”

Sit punctum G intersectio rectarum AE, DF, et H inter-
 sectio reliquarum inflexarum BE, CF, et fit K intersectio duc-
 tarum AC, BD; recta erit linea quae per G, K, H puncta
 tranfit.

Jungatur BC, et per punctum A, terminum scilicet alteri-
 us ex ductis AC ducatur AL parallela reliquae ductae BD, oc-
 curratque ipsi CD in L; juncta vero LF conveniat cum CB in
 M et cum BE in N; sit ve-
 ro O intersectio rectarum
 AC, DF, et junctae OM, GN
 occurrant ipsi CF in P, Q
 punctis; denique eidem CF
 occurrat BD in R.

Quoniam igitur paral-
 lelae sunt AL, BD, et a ter-
 minis ipfarum A, B infle-
 xae sunt AE, BE ad rectam
 CD, et a reliquis terminis

L, D, ad rectam AB inflexae sunt LF, DF, et sunt G, N, ipfa-
 rum intersectiones, quae scilicet fiunt a rectis quae non in-
 flexae sunt a punctis in eadem parallela, erit, per praecedentem
 Propositionem, recta GN parallela ipsis AL, BD; et fimi-
 liter, quoniam a terminis A, B parallelarum inflexae sunt ad



CD rectae AC, BC inflexis DF, LF occurrentes in O, M, erit recta OM parallela iisdem AL, BD, et propterea ipsi GN. Igitur, propter parallelas, est KR ad RB, ut (OP ad PM, hoc est ut) GQ ad QN; et permutando, ut KR ad GQ, ita (RB ad QN, et ita est) RH ad HQ. Et parallelae sunt KR, GQ; recta igitur est linea quae per H, K, G puncta transit.

Et ope hujus Propositionis praecedens 34ta ita ostenditur.

Positione datae sint tres rectae AE, BE, DEC in eodem puncto E convenientes, et in una earum data sint duo puncta C, D, a quibus ad quartam positione datam AB inflectantur duae rectae CF, DF, et sint G, H duae ex intersectionibus ipsarum CF, DF et rectarum AE, BE; juncta GH verget ad punctum datum.

Ad punctum enim B in quo conveniunt rectae AB, EB inflectantur rectae CB, DB, recta igitur DB quae transit per intersectiones rectarum DB, CB et ipsarum EA, EB, (nam intersectio ipsarum DB, EA est in recta DB, et intersectio ipsarum CB, EB est in puncto B,) vergit, ex hypothese, ad punctum datum; rursus ad AB inflexis utcunque DF, CF, recta GH quae transit per intersectiones ipsarum et earundem EA, EB, vergit, ex hypothese, ad idem datum punctum; occurrant DB, GH sibi mutuo in K, est igitur K punctum quod datum esse in Propositione dictum est; quod quidem verum est, quoniam enim inter rectas DG, HB ductae sunt GKH, DKB, et a terminis G, D ipsius DG inflexae sunt GE, DE ad ipsam HB; a terminis vero H, B ad DG inflexae sunt HF, BF, et est punctum A intersectio ipsarum GE, BF, et punctum C intersectio

*Pr. 37. reliquarum DE, HF; erit ^a recta linea quae tranfit per puncta A, K, C. Positione autem datae sunt AC, DB, quare datum est punctum K ad quod vergit recta GH.

Jungantur igitur AC, BD et conveniant in K; erit K punctum inveniendum; hoc est si ad AB inflectantur utcunque a punctis C, D rectae CF, DF, occurrantque ipsis EA, EB in G, H; erunt G, K, H puncta in recta linea, ut constet ex Prop. 37.

Conversa Propositionis 34tae est haec quae sequitur,

P R O P. XXXVIII.

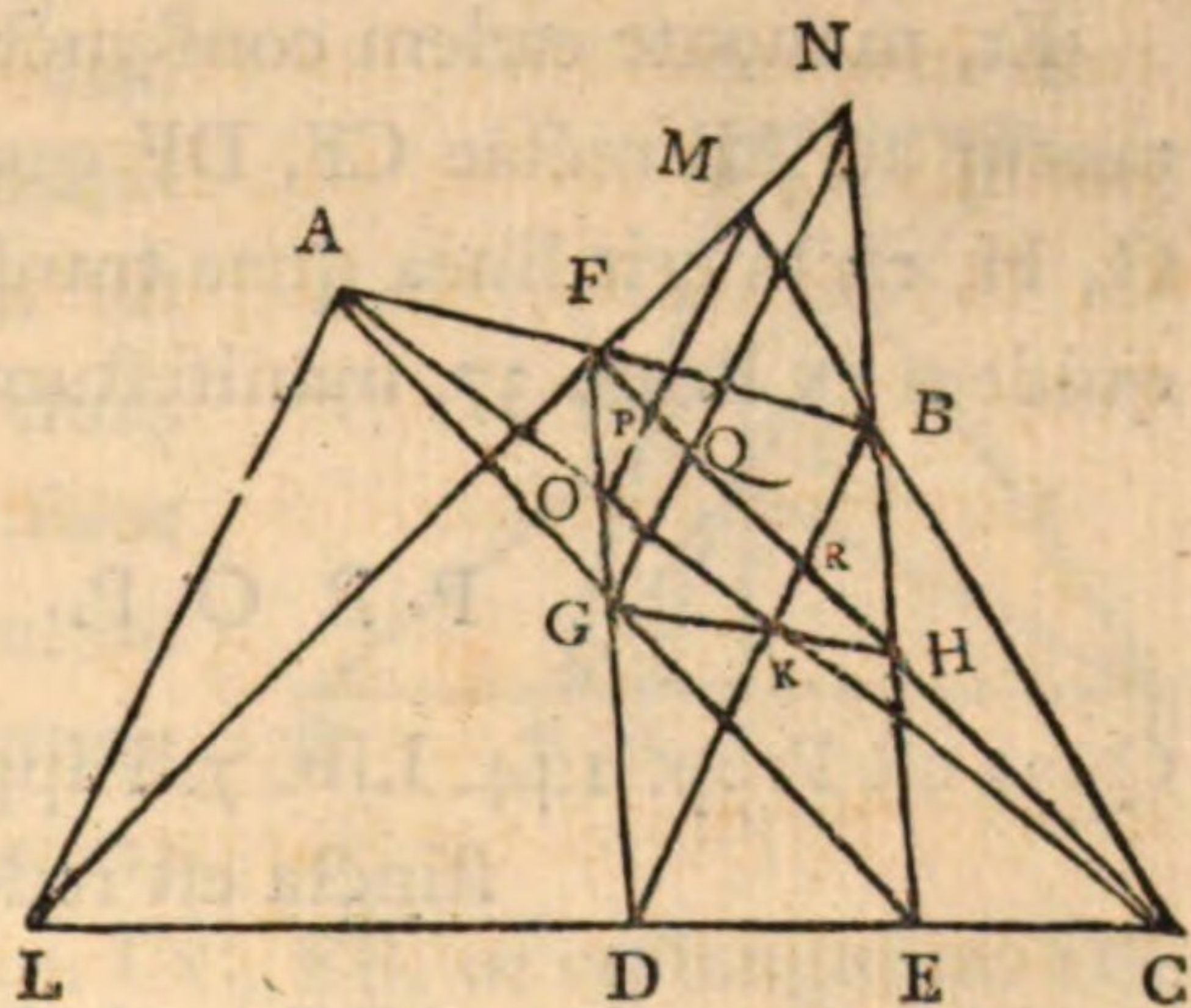
“ POSITIONE datae sint tres rectae lineae AE, BE, DEC in eodem puncto E convenientes, et in una earum data sint duo puncta C, D, datumque extra ipsas sit punctum K per quod ducta sit utcunque recta linea GK quae ipsis EA, EB occurrat in G, H; si jungantur CH, DG convenientes in F; tanget punctum F rectam positione datam.”

Ut enuntiatio magis similis sit enuntiationi primae partis Propositionis Pappi de quatuor rectis, ita potest fieri, viz.

“ SI quatuor rectae DC, GH, DF, CF sibi mutuo occurrant, neque plures quam duae per idem punctum, et in una earum data sint duo puncta intersectionum D, C, et alia GH transeat per datum punctum K quod est extra rectam DC, hujus vero intersectiones G, H cum reliquis rectis DF, CF tangant rectas positione datas EA, EB quarum intersectio E est in recta DC; tanget punctum F rectam positione datam.”

Jungatur DK quae ipsi EB occurrat in B; et quoniam data sunt puncta D, K, recta DB positione data est; et positione

data est EB, quare datum est punctum B. Per punctum K ducatur utcunque recta GH quae ipsis EA, EB occurrat in G, H, et junctae DG, CH occurrant in F, et juncta BF occurrat ipsi EA in A. Quoniam igitur inter rectas GD, HB ductae sunt GKH, DKB, et a punctis G, D ad ipsam HB inflexae sunt GE, DE; ab ipsis vero H, B ad rectam GD inflexae sunt HF, BF, et sunt puncta A, C intersectiones inflexarum quae non fiunt a rectis quae inflexae sunt a terminis e-



jusdem ductae, et est punctum K intersectio ductarum GH, DB; erunt A, K, C puncta in recta linea per Prop. 29. aut 30. Data autem sunt K, C puncta, quare recta AC positione data est, et positione data est EA; datum igitur est punctum A, et datum est B; igitur recta AB quam tangit punctum F positione data est.

Jungatur igitur DK occurratque EB in B; et juncta CK ipsi EA occurrat in A; juncta AB erit recta quam tangit punctum F; hoc est si per punctum K ducatur quaevis GKH quae rectis EA, EB occurrat in G, H, et jungantur DG, CH convenientes in F, erit punctum F in recta AB. Quoniam enim inter duas rectas DC, GH ductae sunt DG, CH, et a punctis D, C quae sunt in una rectarum inflexae sunt ad reliquam GH rectae DK, CK, et a punctis G, H in reliqua recta inflexae sunt ad primam DC rectae GE, HE, et sunt A, B in-

terfectiones inflexarum quae non fiunt a rectis quae inflexae sunt a terminis ejusdem ductae, verget juncta AB ad F intersectionem ductarum DG, CH, hoc est punctum F est in recta AB.

Et, manente eadem constructione, si a punctis C, D inflectantur ad AB rectae CF, DF quae ipsis EA, EB occurrant in G, H, recta erit linea quae transit per G, K, H puncta; quod quidem ex Prop. 37. manifestum est.

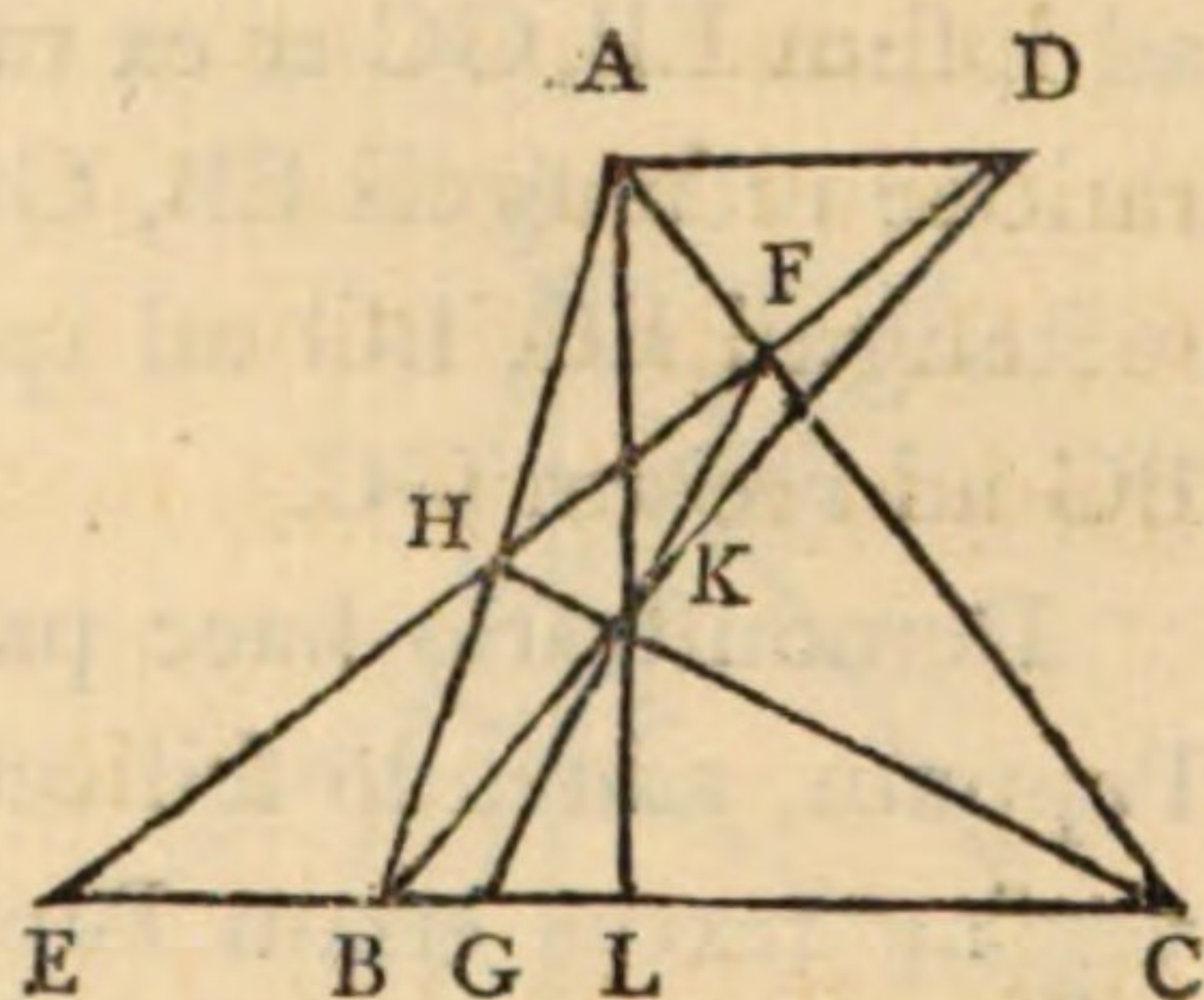
P R O P. XXXIX.

Quae est Prop. 144. Lib. 7. Pappi, cujus enuntiatio magis distincta est reddita.

“ SIT triangulum ABC, et ipsi BC parallela AD, et ducatur
 “ utcunque DE quae occurrat ipsis AB, AC in F, H. Sit
 “ autem in BC punctum G quod facit quadratum ex EB ad
 “ rectangulum EC, CB, ut recta BG ad ipsam GC, et junga-
 “ tur FG cui occurrat juncta BD in K; Dico rectam lineam
 “ esse quae per puncta H, K, C transit.”

Quoniam enim est ut quadratum ex EB ad rectangulum EC, CB, ita BG ad GC; communis addatur ratio CE ad EB, eadem scilicet quae est rectanguli EC, CB ad EB, BC rectangulum; erit “ ratio composita ex ratione quadrati ex EB ad
 “ rectangulum EC, CB, et ex ratione rectanguli EC, CB ad
 “ ipsum EB, BC, hoc est” ratio quadrati ex EB ad rectangulum EB, BC, hoc est ratio rectae EB ad ipsam BC, eadem ei quae composita est ex rationibus BG ad GC et CE ad EB, quae eadem est rationi rectanguli BG, CE ad ipsum GC, EB. Ut

autem EB ad BC, ita est, per Prop. 26. hujus, rectangulum DF, HE ad ipsum DE, FH; ergo ut rectangulum BG, CE ad rectangulum GC, EB, ita est rectangulum DF, HE ad ipsum DE, FH. Igitur recta linea est quae per H, K, C puncta transit; hoc enim in iis quae ad conversum casum pertinent demonstratum est in Prop. 27. hujus. Nam in duas rectas lineas KB, KF ductae sunt ab eodem puncto E duae rectae EBG, EFD et in ipsis sumpta sunt puncta H, C quae faciunt rectangulum BG, CE ad ipsum GC, EB, ut rectangulum DF, HE ad rectangulum DE, FH.



N. B. CONVERSA PROP. XXXIX. haec est.

“SIT triangulum ABC, et fit AD parallela ipsi BC, si duca-
 “tur quaevis DFHE et jungantur BD, CH sibi mutuo oc-
 “currentes in K, et juncta FK occurrat BC in G; erit qua-
 “dratum ex EB ad rectangulum EC, CB, ut recta BG ad ip-
 “sam GC.”

Nam quoniam AD parallela est rectae BC, et ducta est DFHE erit ut EB ad BC, ita rectangulum EH, FD ad rectangulum ED, HF per Prop. 28. Et quoniam in tres rectas lineas KB, KH, KF ab eodem puncto K ductas duae rectae lineae ED, EC ab eodem puncto ductae sunt, erit rectangulum EC, BG ad rectangulum EB, GC, ut (rectangulum EH, FD ad ipsum ED, HF per Prop. 17. hoc est ut) recta EB ad ipsam

BC. Quoniam igitur recta EB est ad rectam BC, ut rectangulum EC, BG ad ipsum EB, GC, communis addatur ratio EB ad EC, et ratio quadrati ex EB ad rectangulum EC, CB eadem erit (rationi compositae ex ratione rectanguli EC, BG ad ipsum EB, GC et ex ratione rectae EB ad ipsam EC, hoc est ratione rectanguli EB, GC ad ipsum EC, CG, hoc est rationi) rectanguli EC, BG ad ipsum EC, CG, hoc est rationi rectae BG ad rectam GC.

Demonstratio haec paulo magis explicita est quam apud Pappum, addendo scilicet quae habentur inter “commata inversa; textus etiam Pappi apud Commandimum bis vitiose habet rectangulum DE, FH, vice ipsius DF, HE, et contra, quae nunc correctae sunt.

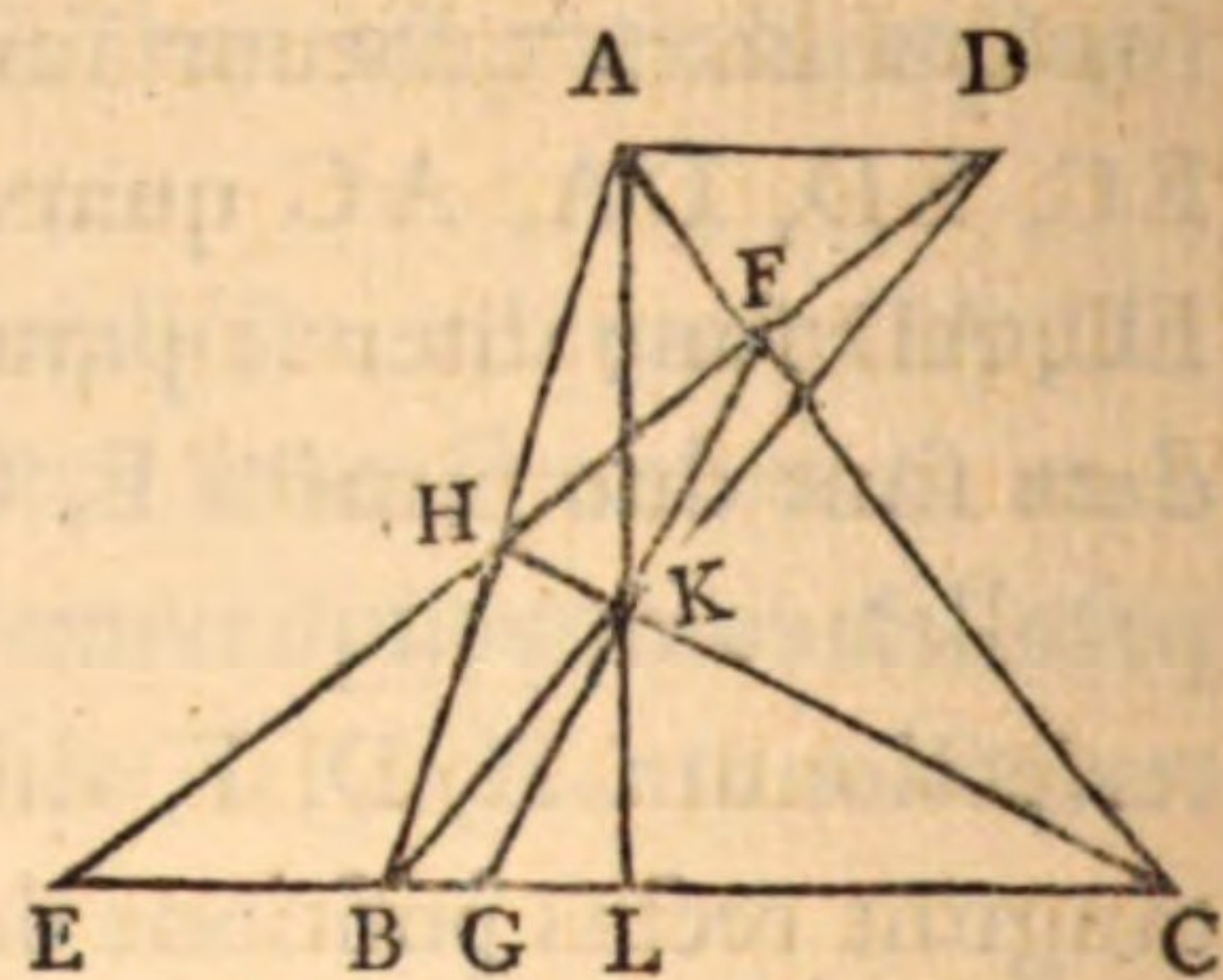
P R O P. XL.

Quae est Porisma cui inservit praecedens Propositio.

“SI fuerint quinque rectae AB, AC, AD, DE, EC quarum
 “primae tres in uno puncto A conveniunt, et duae ipsarum
 “AD, EC sunt parallelae, in quarum una EC quae non transit
 “per punctum A data sunt tria puncta intersectionum E, B,
 “C; reliquarum autem intersectionum A, D, F, H duae D, H
 “tangant rectas positione datas BK, CK quae transeunt per
 “duo ex datis punctis B, C; reliquae intersectiones A, F tan-
 “gent rectas positione datas.”

Quoniam enim quatuor sunt rectae EB, BA, AD, DE quarum duae EB, AD sunt inter se parallelae, et data sunt duo puncta E, B in una parallelarum, reliquarum vero intersecti-

Quoniam est EC ad CB, ut BC ad CL, dividendo, erit EB ad BC, ut BL ad LC; et permutando, et per 1. 6. rursusque permutando, ut quadratum ex EB ad rectangulum BC, CE, ita rectangulum EB, BL ad ipsum EC, CL. Et quoniam, in
 19. 5. secunda constructione, fuit EC ad BL, ut CG ad GL, erit^a EG ad GB, ut CG ad GL, et, dividendo, EB ad BG, ut CL ad LG. Rectangulum igitur EB, GL aequale est ipsi BG, LC. Et quoniam est EC ad BL, ut CG ad GL, invertendo, est BL ad EC, ut LG ad GC; quare permutando, et per 1. 6. rursusque permutando, ut rectangulum EB, BL ad rectangulum EC, CL, ita (rectangulum EB, LG ad ipsum LC, CG, hoc est ita rectangulum BG, LC ad ipsum LC, CG, et ita) est recta BG ad ipsam GC. Fuit autem quadratum ex EB ad rectangulum BC, CE, ut ipsum EB, BL ad EC, CL rectangulum; ut igitur quadratum ex EB ad rectangulum BC, CE, ita est recta BG ad ipsam GC.



Componetur ita.

Invento igitur puncto G ex hac constructione, erit juncta GK recta quam tangit punctum F, hoc est si a punctis E, C inflectantur utcunque ad rectam GK rectae EF, CF, si a puncto D in quo recta EF ipsi BK occurrit, ducatur DA parallela ipsi EC, occurratque rectae CF in A, et juncta AB occurrat ipsi ED in H, erunt H, K, C puncta in recta linea per Prop. 39.

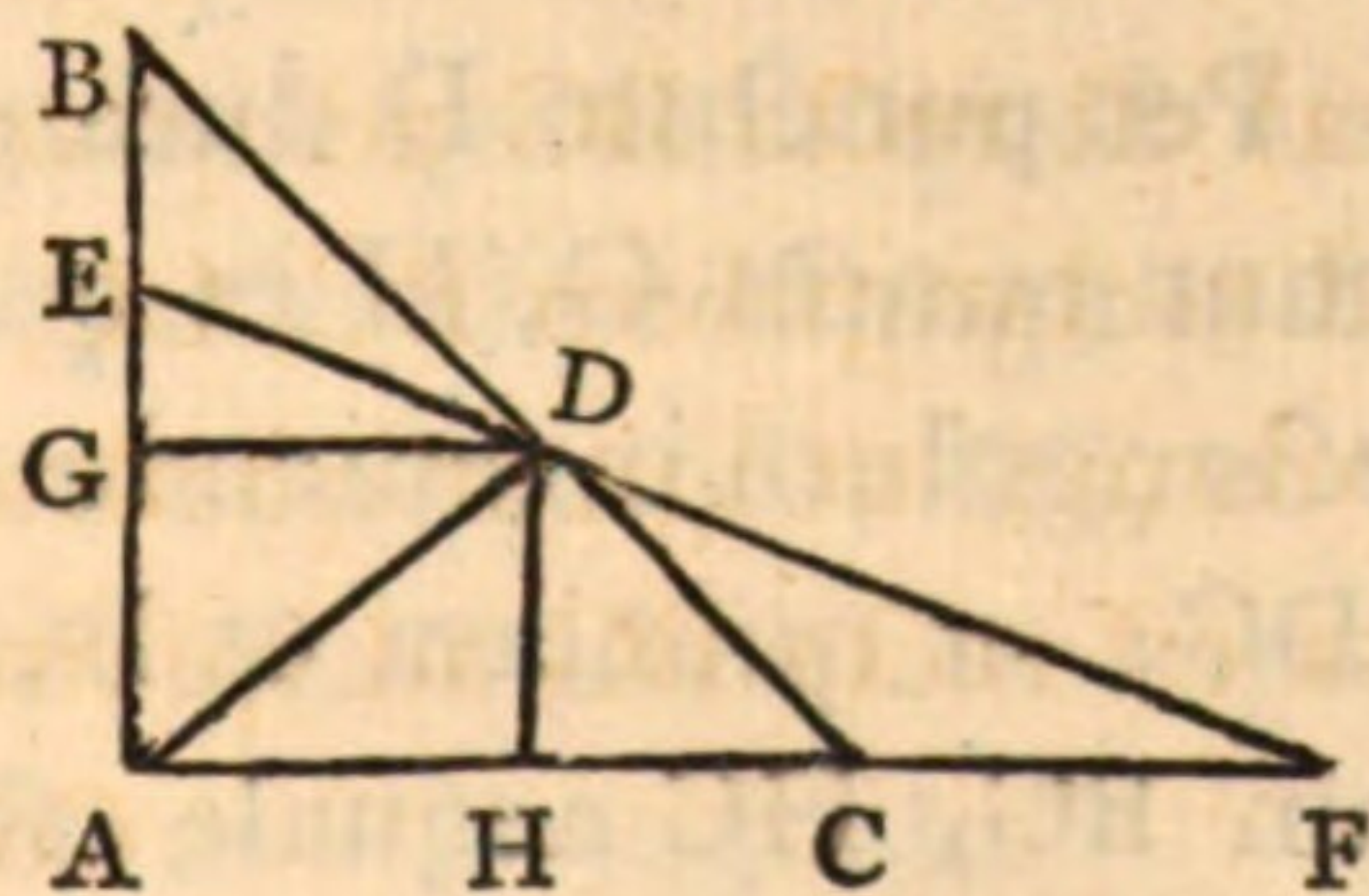
P R O P. XLI.

Quae est Porisma, unum scilicet ex iis quae Pappus tradit inter Porismata Lib. 1. Euclidis, hisce verbis “ Quod recta ... aufert a positione datis segmenta datum rectangulum comprehendentia.”

“ DATIS positione duabus rectis, si a dato extra ipsas puncto ducatur utcunque recta linea, auferet ex positione datis segmenta datis in iis punctis adjacentia quae datum continent rectangulum.”

Sint AB, AC rectae positione datae, et a dato puncto D ducatur utcunque recta BDC ipsis in B, C, occurrens; et puta Porisma verum esse, scilicet segmenta BG, CH a recta BC abscissa datis punctis G, H adjacentia continere rectangulum BG, CH datum. Ducatur per punctum D

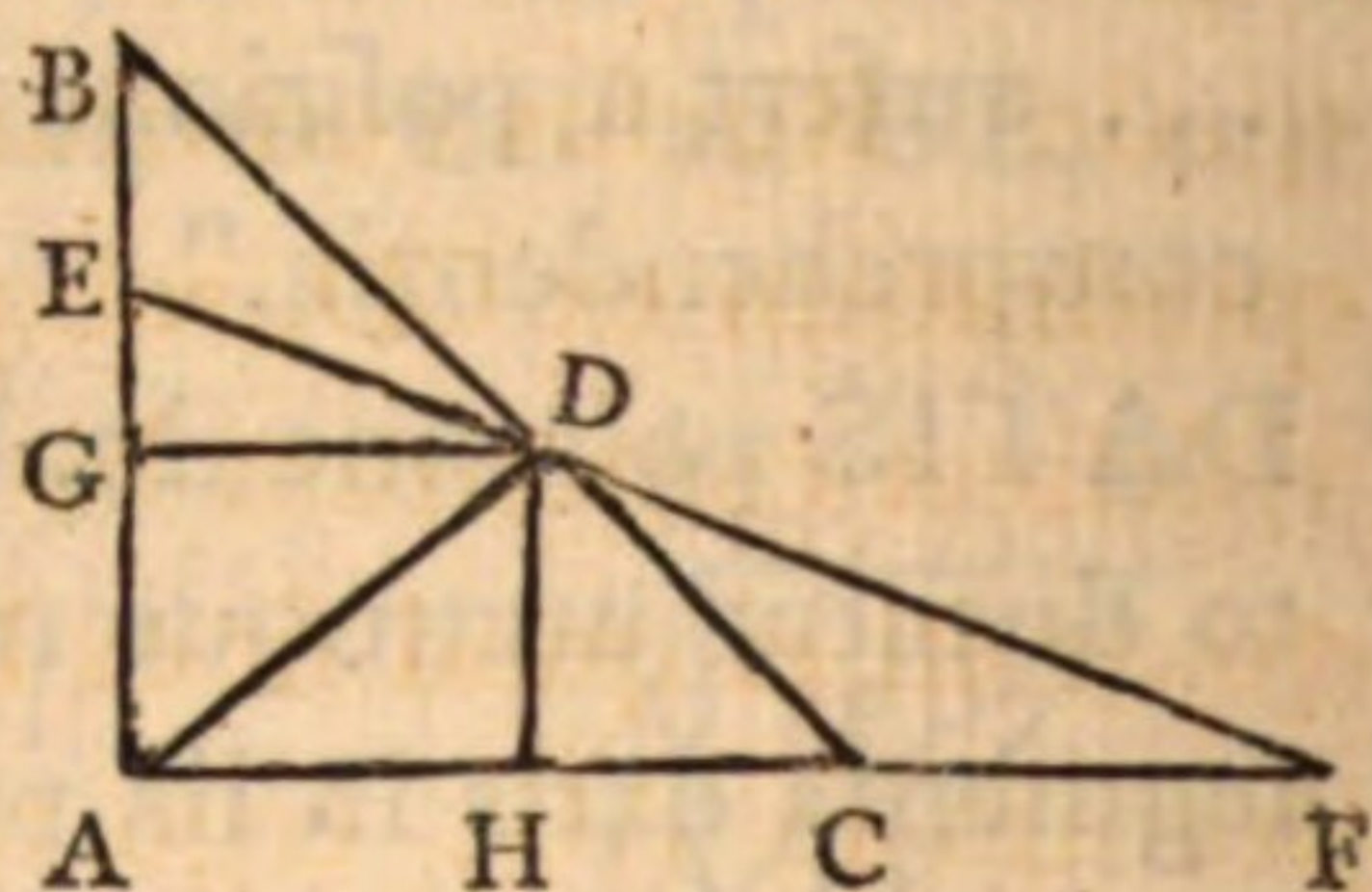
quaevis alia recta EDF, et AD jungatur; igitur, ex hypothese, tum rectangulum EG, FH, tum rectangulum AG, AH aequalia sunt eidem dato rectangulo, et propterea rectangulo BG, CH. Est igitur



tur BG ad FH, ut EG ad CH, quare et BE ad FC, ut BG ad FH. Est etiam ut FH ad AG, ita AH ad EG, quare et FH ad AG, ut AF ad AE. Ratio vero BD ad DC, quoniam rectae AB, BC occurrunt ipsis AF, FE, eadem est, per Lemma ad finem Prop. 22. rationi compositae ex ratione BE ad EA, et ratione AF ad FC, hoc est rationi compositae ex ratione BE ad FC, et ratione AF ad EA, utraque enim ratio eadem est ^ara- ^a 23. 6.

tioni rectanguli BE, AF ad rectangulum EA, FC; ratio igitur BD ad DC eadem est (rationi compositae ex ratione BE ad FC, et ratione AF ad AE, hoc est ex ratione BG ad FH, et FH ad AG, hoc est rationi) BG ad GA.

Est igitur juncta GD parallela ipsi AF. Et quoniam rectangulum BG, HC aequale est ipsi AG, AH, est BG ad GA, hoc est BD ad DC, ut AH ad HC; parallela igitur est DH ipsi BA. Quoniam igitur



datum est punctum D, et est DG parallela positione datae AF, positione data est DG, et positione data est AB, datum igitur est punctum G. Similiter ostendetur datum esse punctum H. Datum igitur est rectangulum GA, AH, et propterea ipsi aequale rectangulum BG, CH.

Componetur ita.

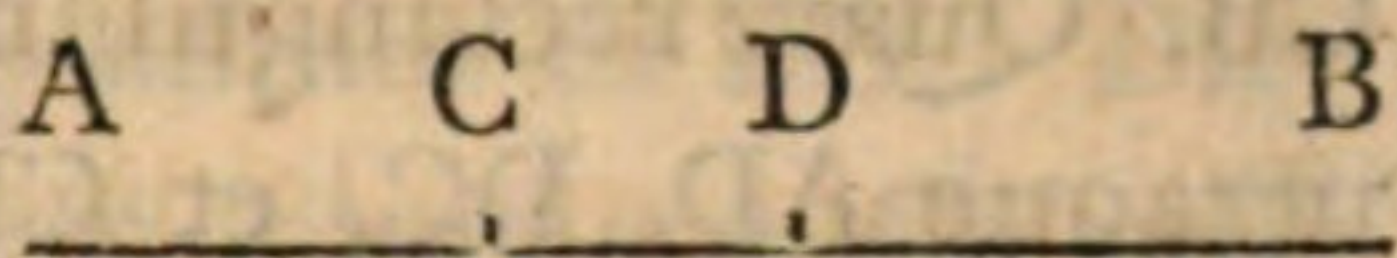
Per punctum D ducantur DG, DH parallelae ipsis AC, AB; erunt puncta G, H ea quae invenienda sunt, et GA, AH erit rectangulum inveniendum. Ducatur enim per D quaevis recta BDC; et quoniam ut BG ad GD, ita DH ad HC, rectangulum BG, HC aequale est rectangulo GD, DH, hoc est ipsi HA, AG.

P R O P. XLII.

Quae est Prop. 148. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 22.

“SIT recta linea AB, et in ipsa sumantur duo puncta C, D;
“fitque quod bis AB, CD continetur aequale quadrato ex
“CB. Dico quadratum ex AD quadratis ex AC, DB aequale
“esse.”

Quoniam enim quod bis continetur AB, CD est aequale quadrato ex CB; commune auferatur contentum bis BD, DC, erit reliquum, quod bis AD, DC continetur quadratis ex CD, DB aequale. Rursus commune auferatur quadratum ex CD, reliquum igitur, videlicet contentum bis AC, CD una cum quadrato ex CD aequale est ei quod fit ex DB quadrato. Commune addatur quadratum ex AC; ergo totum, quod ex AD quadratum, quadratis ex AC, DB aequale erit.



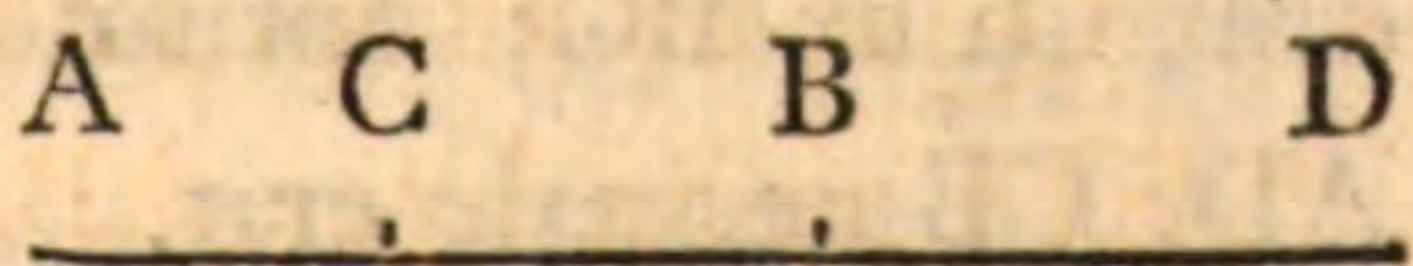
Et retrogradiendo ostendetur Propositionis conversa.

P R O P. XLIII.

Quae est Prop. 149. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 23.

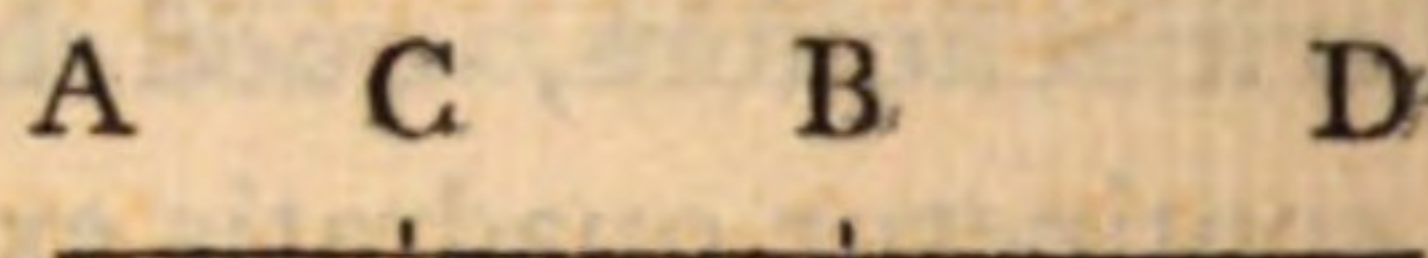
“SIT rectangulum AB, BC aequale quadrato ex BD. Dico
 “tria contingere, videlicet rectangulum quidem quod utra-
 “que AD, DC, et BD continetur aequale esse rectangulo AD,
 “DC; rectangulum vero contentum utraque AD, DC, et CB
 “aequale esse quadrato ex DC; et rectangulum contentum
 “utraque AD, DC, et AB, quadrato ex AD aequale.”

Quoniam enim rectangulum AB, BC aequale est quadrato ex BD, erit, ob proportionem*, et tota ad totam†, et invertendo, componendoque, ut utraque CD, DA ad DA, ita CD ad DB. Rectangulum igitur quod continetur utraque AD, DC et BD, rectangulo



* AB ad BD, ut DB ad BC. † AD ad DC, ut DB ad BC.

AD, DC est aequale. Rursus quoniam tota AD ad totam DC, est ut DB ad BC, componendo, ut utraque AD, DC ad DC, ita erit DC ad CB. Quare rectangulum contentum utraque AD, DC, et CB aequale est quadrato ex DC. Rursus quoniam tota AD ad totam DC, est ut AB ad BD, invertendo componendoque, erit ut utraque CD, DA ad DA, ita DA ad AB. Ergo rectangulum quod utraque AD, DC, et AB continetur aequale est quadrato ex AD.

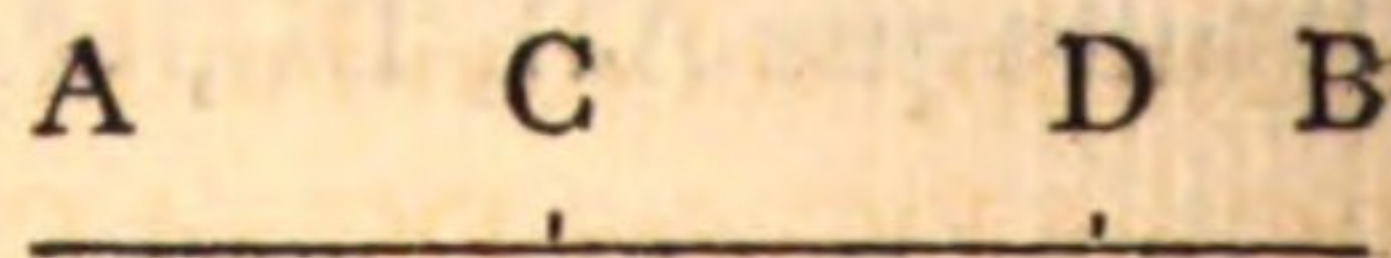


P R O P. XLIV.

Quae est Prop. 150. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 24.

“ SIT recta linea AB, et duo puncta C, D; fitque quadratum
 “ ex CD aequale ei quod bis AC, DB continetur. Dico et qua-
 “ dratum ex AB quadratis ex AD, CB aequale esse.”

Quoniam enim quadratum ex CD aequale est ei quod bis continetur AC, DB, erit contentum bis AC, CB aequale et quadrato ex CD, et ei quod bis AC, CD continetur. Commune addatur quadratum ex AC, ergo contentum bis AC, CB una cum quadrato ex AC aequale est quadrato ex AD. Rursus commune addatur quadratum ex BC; totum igitur quadratum ex AB quadratis ex AD, CB aequale erit.



Et retrogradiendo ostendetur conversâ.

PROP. XLV.

Quae est Prop. 151. Lib 7. Pappi, et Lemma ejus 25.

“ SIT rectangulum AB, BC aequale quadrato ex BD. Dico
 “ tria contingere, videlicet rectangulum quod excessu ipso-
 “ rum AD, DC, et BD continetur aequale esse rectangulo AD,
 “ DC; rectangulum vero contentum excessu ipsarum AD, DC,
 “ et CB aequale esse quadrato ex DC; et rectangulum conten-
 “ tum excessu ipsarum AD, DC, et BA aequale esse quadrato
 “ ex AD.”

Quoniam enim est ut AB ad BD, ita DB ad BC, erit reli-
 qua ad reliquam, “ viz. AD ad DC, ut AB ad BD,” et divi-
 dendo, in fig. 1. vel dividendo in-

verse in fig. 2. ut excessus ipsarum
 AD, DC ad DC, ita AD ad DB.

Rectangulum igitur quod excessu ip-
 sarum AD, DC et DB continetur est
 aequale rectangulo AD, DC. Rursus

A	D	C	B

G	D	A	B

quoniam reliqua AD ad reliquam DC, est ut DB ad BC, di-
 videndo, vel dividendo inverse, erit ut excessus ipsarum AD,
 DC ad DC, ita DC ad CB. Ergo rectangulum contentum ex-
 cessu ipsarum AD, DC et CB aequale est quadrato ex DC.
 Rursus quoniam est ut AD ad DC, ita AB ad BD, erit, con-
 vertendo, ut AD ad excessum ipsarum AD, DC, ita AB ad AD.
 Quare rectangulum quod excessu ipsarum AD, DC et AB con-
 tinetur, quadrato ex AD est aequale. Vel si BC major fuerit
 BA, ut in fig. 2. quoniam est AD ad DC, ut AB ad BD, idem
 sequetur invertendo et dividendo.

Tertia haec demonstrationis pars integra nunc tradita est; corrupta enim videtur esse in Graecis codicibus, ut est apud Commandinum, et inepte in ejus Commentario ad notam D explicata est.

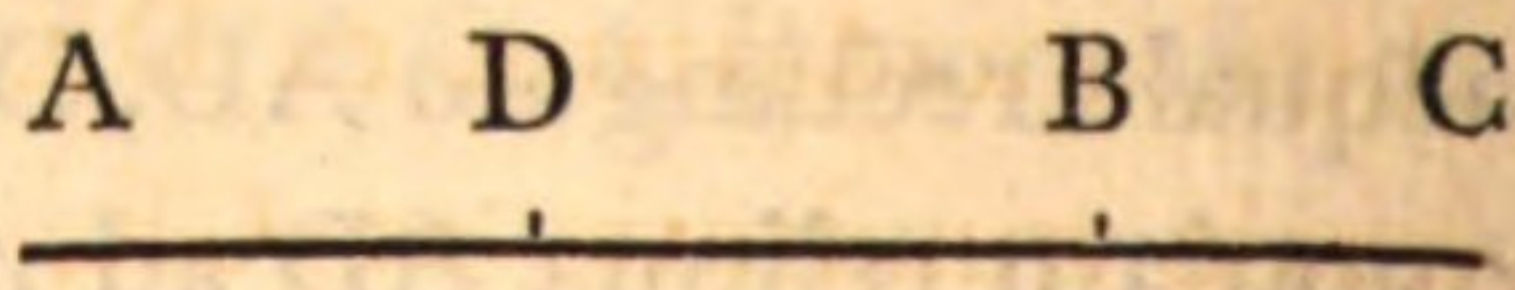
P R O P. XLVI.

Quae non habetur apud Commandinum, sed necessaria est Porismati sequenti.

“ SIT recta linea AB, et duo puncta C, D, quorum C est in
 “ AB producta, D vero inter A, B puncta; fitque quod bis AB,
 “ DC continetur aequale quadrato ex AC, hoc est quadratis
 “ ex AB, BC et rectangulo AB, BC bis; erit quadratum ex
 “ DB aequale quadratis ex AD, BC.”

Quoniam enim quod bis AB, DC continetur, hoc est quod bis AB, BD una cum eo quod bis AB, BC continetur aequale est quadrato ex AC, hoc est quadratis ex AB, BC et rectangulo
 AB, BC bis; auferatur commune
 quod bis AB, BC continetur, erit
 reliquum, quod bis AB, BD continetur aequale quadratis ex AB, BC. Rursum auferatur commune, rectangulum scilicet AD, DB bis una cum quadrato ex DB; erit reliquum quadratum ex DB aequale reliquo, quadratis scilicet ex AD, BC.

Et retrogradiendo ostendetur conversa.



P R O P. XLVII.

Quae est Porisma cui utilis est Prop. 148. et Prop. 150.

Lib. 7. Pappi.

“ SI in recta linea AB sumatur punctum C, vel inter A, B
 “ puncta, vel in AB producta ad utraque partes; datum erit
 “ in eadem recta quartum punctum D tale, ut in AB pro-
 “ ducta ad partes B sumpto quovis puncto E, quadratum ex
 “ segmento inter ipsum et punctum inveniendum D, aequale
 “ erit quadrato ex segmento inter idem punctum E et punc-
 “ tum C, una cum quadrato ex segmento inter punctum in-
 “ veniendum D et punctum A, et rectangulo a segmento in-
 “ ter punctum E et punctum B, et data quadam recta.”

CAS. I. Quando punctum C est inter A, B puncta.

Putamus verum esse Porisma, sitque D punctum, et F recta quae
 invenienda sunt. Igitur si sumatur utcumque punctum E in
 AB producta, erit, ex hypo-
 thesi, quadratum ex DE ae-
 quale quadratis ex CE, AD
 una cum rectangulo F, BE.

G A D H C B E
 —————

Rursum sumatur punctum B, vice puncti E, et, ex hypothesi,
 quadratum ex DB aequale erit quadratis CB, AD. Igitur
 excessus quadrati ex DE supra quadratum ex DB aequalis erit
 excessui quadratorum ex CE, CB una cum rectangulo F, BE;
 hoc est, si fiat GD aequalis DB, et HC aequalis ipsi CB, erit^a 6. 2.
 rectangulum GE, EB aequale rectangulo HE, EB una cum
 ipso F, BE. Recta igitur GE aequalis est ipsis HE, F simul;
 et ablata communi HE, erit reliqua GH aequalis ipsi F. Quo-

niam vero GB dupla est DB, et HB dupla ipsius CB, erit et GH dupla ipsius DC, quare et recta F dupla est ejusdem DC. Et quoniam quadratum ex DB aequale est quadratis ex CB, AD, erit, per conversam Prop. 42. rectangulum AB, DC bis aequale quadrato ex AC. Datae autem sunt rectae AB, AC, data igitur est DC; et datum est punctum C, quare et punctum D datum est; est autem recta F dupla ipsius DC; data igitur est recta F. Quae erunt invenienda.

Componetur ita.

Fiat ut AB bis ad AC, ita AC ad CD quae ponatur a puncto C versus eas ipsius partes ad quas A est respectu puncti B; fumatur vero recta F dupla ipsius DC. Si in AB producta ad partes B fumatur utcumque punctum E, erit quadratum ex DE aequale quadratis ex CE,

AD una cum rectangulo F, BE. Est enim, ex constructione, rectangulum AB, DC

G A D H C B E

bis aequale quadrato ex AC; igitur, per Prop. 42. quadratum ex DB aequale est quadratis ex CB, AD. Fiat GD aequalis DB, et HC aequalis ipsi CB; erit propterea GH aequalis ipsi DC bis, hoc est rectae F, quare GE aequalis erit ipsis HE, F simul; et rectangulum GE, EB hoc est ipsum DB, BE bis una cum quadrato ex BE aequale erit rectangulis HE, EB; F, EB

† † hoc est rectangulo CB, BE bis quadrato ex BE, et rectangulo F, BE. Est autem quadratum ex DB aequale quadratis ex CB, AD; additisque hisce aequalibus, erit^b quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, AD et rectangulo F, EB.

COR. Si autem fumatur punctum E non in AB producta versus partes B, sed vel inter A et B, vel in BA producta ad

partes A, reliquis ut in Propositione manentibus; erit quadratum ex DE una cum rectangulo F, BE, five una cum ipso DC, BE bis aequale quadratis ex CE, AD. Potest hoc eodem modo quo praecedens Porisma investigari; verum ex eo, ut sequitur facile ostenditur.

CAS. 1. Sit punctum E inter C, B puncta. Quoniam igitur in compositione praecedentis ostensum est quadratum ex DB aequale quadratis ex CB, AD, auferatur commune ex CB quadratum, erit quadratum ex DC una cum duplo rectangulo DC, CB aequale quadrato ex AD. Com-

$$\begin{array}{ccccccc} A & & D & & C & & E & B \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

mune apponatur quadratum ex CE, et totum, quadratum scilicet ex DC una cum rectangulo DC, CB bis et quadrato ex CE aequale erit toti, quadratis scilicet ex CE, AD; est autem ^b quadratum ex DC una cum rect-

^b 4. 2.

CAS. 2. Sit punctum E inter puncta A, C, vel in CA producta ad partes A. Quoniam igitur in Cas. 1. Cor. ostensum fuit quadratum ex DC una cum duplo rectangulo DC, CB et quadrato ex CE aequale quadratis ex CE, AD; est autem quadratum ex CD una cum quadrato ex CE aequale

$$\begin{array}{ccccccc} A & & D & & E & & C & & B \\ \hline & & & & & & & & \end{array}$$

^a quadrato ex DE una cum duplo rectangulo DC, CE; erit ^a quadratum ex DE una cum rectangulis DC, CE; DC, CB bis

^a 7. 2.

sumptis, hoc est una cum rectangulo DC, EB bis aequale quadratis ex CE, AD.

CAS. 2. PROP. 47. Quando punctum C est in BA producta ad partes A.

Ostendetur prorsus ut in analysi Cas. 1. Propositionis, recta F dupla ipsius DC, et quadratum ex DB aequale quadratis ex DA, CB; quare per conversam Prop. 44. rectangulum DC, AB bis aequale erit quadrato ex CA; $\text{G H} \quad \text{D C} \quad \text{A} \quad \text{B E}$

 in recta enim DB sumpta sunt duo puncta C, A. Datae autem sunt CA, AB, quare data est DC, et datum erit punctum D; data igitur est CD, et ipsius dupla recta F.

Componetur ita.

Fiat ut AB bis ad AC, ita AC ad CD quae ponatur a puncto C in AC producta ad partes C; fumatur vero recta F aequalis ipsi DC bis. Si in AB producta ad partes B fumatur utcunque punctum E, erit quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, DA una cum rectangulo F, BE. Est enim, ex constructione, rectangulum DC, AB bis aequale quadrato ex CA; ergo, per Prop. 44. quadratum ex DB aequale est quadratis ex DA, CB. Et reliqua compositio fiet iisdem verbis quibus ea Cas. 1. Propositionis.

COR. Si autem fumatur punctum E, vel inter C, B puncta, vel in recta BC producta ad partes C, reliquis manentibus; erit quadratum ex DE una cum rectangulo F, BE, sive DC, BE bis, aequale quadratis ex DA, CE.

CAS. 1. Quando punctum E est inter C, B, iisdem verbis ostenditur quibus Cas. 1. praecedentis Corollarii.

DC A E B

CAS. 2. Quando punctum E est in BC producta ad partes C, iisdem verbis quibus Cas. 2. praecedentis Corollarii ostenditur.

E D C A B

CAS. 3. PROP. 47. Quando punctum C est in AB producta ad partes B.

Primum, si recta CE major fuerit ipsa CB, analysis fiet iisdem verbis quibus ea Cas. 1. hujus Propositionis; ut et compositio usque ad verba † “hoc est rectangulo CB, BE bis” &c. ad notam †. vice quorum legatur, hoc est rectangulo CH, HE bis, quadrato ex HE, et rectangulo F, BE; est autem quadratum ex DB aequale quadratis ex BC, AD, five ex CH, AD; totum igitur, quadratum scilicet ex DE aequale est toti, quadratis scilicet ex CE, AD et rectangulo F, BE. Idem autem ostendetur si fuerit CE aequalis ipsi CB.

G A D B C H E

Sed si recta CE minor fuerit ipsa CB, quoniam, ex hypothesis, quadratum ex DE aequale est quadratis ex CE, AD et rectangulo F, BE; et, si punctum B sumatur vice ipsius E, est quadratum ex DB, ex hypothesis, aequale quadratis ex

G A D B C E H

BC, AD, hoc est^a si fiat CH aequalis ipsi CB, rectangulo BE, EH et quadratis ex EC, AD; igitur erit excessus quadratorum ex DE, DB aequale excessui rectanguli F, BE supra ip-

sum BE, EH, hoc est, si fiat GD ipsi DB aequalis, erit rectangulum GE, EB aequale excessui rectanguli F, BE supra ipsum BE, EH. Est igitur rectangulum GH, BE aequale ipsi F, BE, quare recta GH aequalis est ipsi F. Et quoniam quadratum ex DB aequale est quadratis ex AD, BC, erit, per conversam Prop. 46. rectangulum

AB, DC bis aequale quadrato ex AC. Datae autem sunt AB, AC, data igitur est DC; et datum est punctum C, quare et D datum erit. Est autem recta

G A D B C E H
 ───────────

F aequalis ipsi GH, hoc est (quoniam GB dupla est DB, et BH dupla ipsius BC) rectae DC bis. Igitur data est recta F.

Componetur ita.

Fiat ut AB bis ad AC, ita AC ad CD quae ponatur a puncto C versus A; sumatur vero recta F dupla ipsius DC. Si in AB producta sumatur punctum E, ita ut CE minor sit ipsa CB, erit quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, AD una cum rectangulo F, BE. Est enim, ex constructione, rectangulum AB, DC bis aequale quadrato ex AC; igitur, per Prop. 46. quadratum ex DB aequale est quadratis ex AD, BC. Fiat DG aequalis DB, et CH ipsi CB, est igitur GH aequalis ipsi DC bis, hoc est rectae F; quare rectangulum GH, BE hoc est rectangulum GE, EB una cum ipso HE, EB, hoc est quadratum ex BE una cum rectangulo DB, BE bis et ipso HE, EB aequale est rectangulo F, BE. Est autem quadratum ex DB aequale quadratis ex AD, BC; totum igitur, quadratum scilicet ex DE una cum rectangulo HE, EB aequale est toti, quadratis scilicet ex AD, BC una cum rectangulo F, BE. Aufe-

ratur commune rectangulum HE, EB, et quadratum ex DE
aequale erit ^a quadratis ex AD, CE et rectangulo F, BE. ^a 5. 2.

COR. Si autem fumatur punctum E vel inter A, B puncta,
vel in BA producta ad partes A; erit quadratum ex DE una
cum rectangulo F, BE, hoc est una cum rectangulo DC, EB
bis aequale quadratis ex AD, CE.

Quoniam enim ostensum est quadratum ex DB aequale
quadratis ex AD, BC, commune apponatur quadratum ex EC,
et quadrata ex DB, EC aequalia erunt quadratis ex AD, BC,
EC; auferatur commune ex BC quadratum, et ^b quadrata ex ^b 4. 2.
DB, EB una cum rectangulo EB, BC
bis aequalia erunt quadratis ex AD,
EC. Quadrata autem ex DB, EB ae-
qualia sunt ^c quadrato ex ED una
cum rectangulo EB, BD bis; igitur
quadratum ex DE una cum rectan-
gulis EB, BD et EB, BC bis, hoc est una cum rectangulo DC,
EB bis aequale erit quadratis ex AD, EC.

A D E B C

E A D B C ^c 7. 2.

PROP. XLVIII.

Quae est Porisma cui inservit Prop. 149. et 151. Lib. 7. Pappi.

“ DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quorum C est
“ ad easdem partes puncti B ad quas est A; datum erit in ea-
“ dem recta punctum quartum D quod faciet rectangulum
“ AE, EC a segmentis inter punctum quodlibet E in AB pro-
“ ducta ad partes B, et puncta A, C, vel a segmentis inter
“ ipsum B, et eadem puncta A, C aequale quadrato ex seg-
“ mento ED inter idem punctum E et punctum inveniendum

“ D, una cum rectangulo a segmento EB inter punctum E et
 “ reliquum datum punctum B, et datâ quâdam rectâ.”

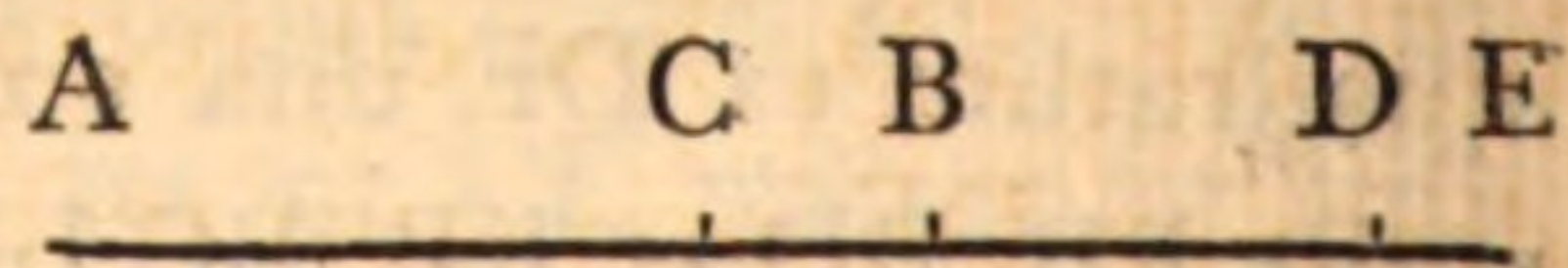
Hujus Porismatis duo sunt casus; duo enim sunt puncta
 D, duaeque rectae datae quae eidem satisfaciunt.

CAS. I. Quando punctum inveniendum D est in AB pro-
 ducta ad partes B.

Puta Porisma verum esse, sitque D punctum inveniendum
 et F recta invenienda; et sumatur utcunque punctum E in
 AB producta ad partes B, vel in ipso B.

Primò, sit punctum E in AD producta ultra D; igitur, ex
 hypothefi, rectangulum AE, EC, hoc est rectangulum AE, CD
 una cum ipso AE, ED aequale erit quadrato ex DE una cum
 rectangulo F, BE; et ablato communi ex DE quadrato, erit
 rectangulum AE, CD una cum

ipso AD, DE aequale rectangulo
 F, BE. Rursus sumatur punctum
 B vice ipsius E, et, ex hypothefi,



rectangulum AB, BC aequale erit quadrato ex BD; igitur,
 per primam partem Prop. 43. rectangulum AD, DC aequale
 erit contento utrâque AD, DC et ipsâ BD. Commune appo-
 natur rectangulum CD, DE una cum ipso AD, DE, hoc est
 rectangulum quod utrâque AD, DC et DE continetur, erit
 totum, rectangulum scilicet AE, CD una cum ipso AD, DE
 aequale toti, rectangulo scilicet contento utrâque AD, DC et
 ipsâ BE. Ostensum autem fuit rectangulum AE, CD una
 cum ipso AD, DE aequale rectangulo F, BE, quod propterea
 aequale erit contento utrâque AD, DC et ipsâ BE. Est igitur
 recta F aequalis ipsis AD, DC simul. Et quoniam quadratum

ex BD aequale est rectangulo dato AB, BC, datum erit punctum D; rectae igitur AD, DC datae sunt, quare data est recta F. Quae erant invenienda.

Componetur ita.

Inter AB, BC media proportionalis inveniatur BD, quae ponatur in AB producta ad partes B, et fumatur recta F aequalis ipsis AD, DC simul, fitque E punctum quodlibet in AD producta ultra D. Erit rectangulum AE, EC aequale quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE. Quoniam enim rectangulum AB, BC aequale est, ex constructione, quadrato ex BD, erit, per primam partem Prop. 43. rectangulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC et ipsâ BD. Igitur, ut in analysi ostensum, rectangulum AE, CD una cum ipso AD, DE aequale erit contento utrâque AD, DC et ipsâ BE. Commune addatur quadratum ex DE, et rectangulum AE, CD una cum ipso AE, ED, hoc est rectangulum AE, EC aequale erit quadrato ex DE una cum rectangulo contento utrâque AD, DC, hoc est rectâ F et ipsâ BE.

Secundò, fit punctum E inter puncta B, D; quoniam igitur, ex hypothefi, rectangulum AE, EC aequale est quadrato ex ED una cum rectangulo F, BE, commune apponatur rectangulum AE, ED, et rectangulum AE, CD aequale erit ipso AD, DE una cum rectangulo F, BE. Osten-

A C B E D

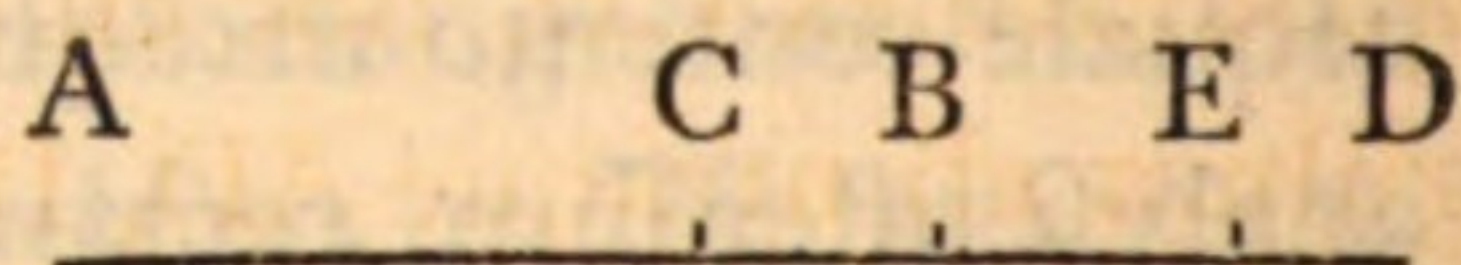
detur autem, ut in prima analysi, rectangulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC et ipsâ BD, igitur ablato communi rectangulo ED, DC, erit AE, CD rectangulum aequale rectangulo AD, DB una cum ipso CD, BE. Igitur, ex praemissis, rectangulum AD, DE una cum

rectangulo F, BE aequale est rectangulo AD, DB una cum ipso CD, BE; commune auferatur rectangulum AD, DE, et reliquum rectangulum F, BE aequale erit reliquo, rectangulo scilicet AD, BE una cum ipso CD, BE. Igitur recta F aequalis est ipsis AD, DC. Punctum autem D et rectae AD, DC data ostendentur ut in prima analysi; data igitur est recta F.

Componetur ita.

Inveniantur rectae BD, F ut in priore compositione; et sumatur utcumque punctum E inter puncta B, D; igitur, ut in ea compositione ostensum, erit rectangulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC et ipsâ

BD. Et quoniam in analysi hac secunda ostensum fuit rectangulum

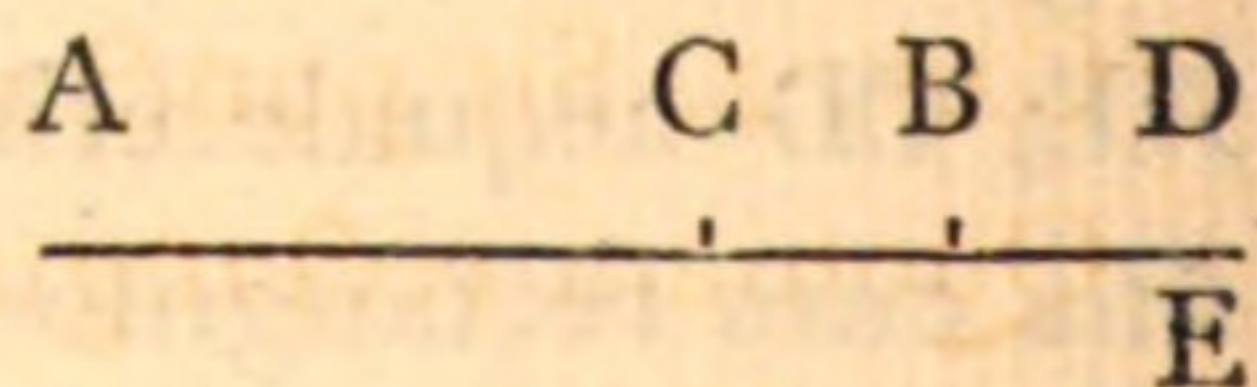


AE, CD aequale rectangulo AD,

DB una cum ipso CD, BE, hoc est ipsis AD, BE; AD, DE et CD, BE; auferatur commune AE, ED, et reliquum AE, EC aequale erit reliquo, quadrato scilicet ex ED et rectangulo AD, BE una cum ipso CD, BE, hoc est quadrato ex ED et contento utrâque AD, DC et ipsâ BE, sive rectangulo F, BE.

Tertiò, cadat punctum E in ipsum D; igitur, ex hypothefi, rectangulum AD, DC, hoc est, ut in praemissis ostensum, rectangulum quod utrâque AD, DC et ipsâ

BD sive BE continetur aequale est rectangulo F, BE; quare et in hoc casu



recta F aequalis est ipsis AD, DC si-

mul. Punctum autem D datum ostendetur ut in praemissis, et propterea data erit recta F.

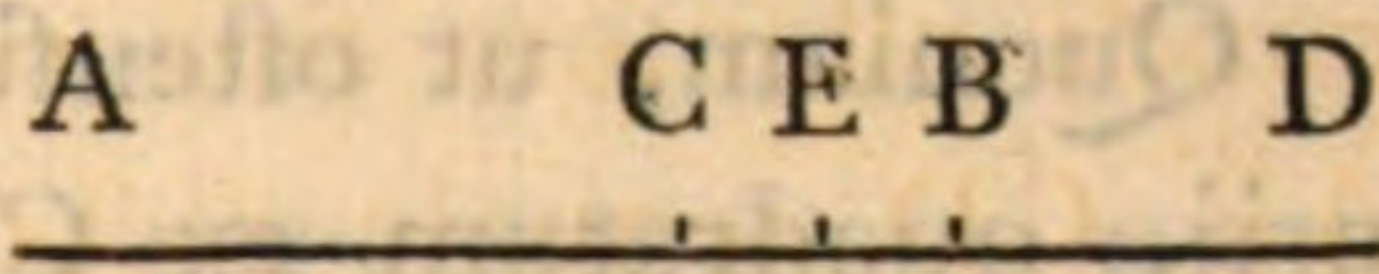
Fiat autem eadem constructio quae prius facta fuit, et, ut in praecedentibus compositionibus ostensum fuit, erit rectan-

gulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC, et ipsâ BD, hoc est rectangulum AE, EC aequale erit rectangulo F, BE.

COR. 1. Si punctum E sumatur inter punctum D et illud punctorum C, A quod propius est ipsi B; vel in BA producta ultra AC, reliquis manentibus; erit rectangulum AE, EC una cum ipso F, BE aequale quadrato ex ED.

CAS. 1. Sit punctum E inter C, B puncta.

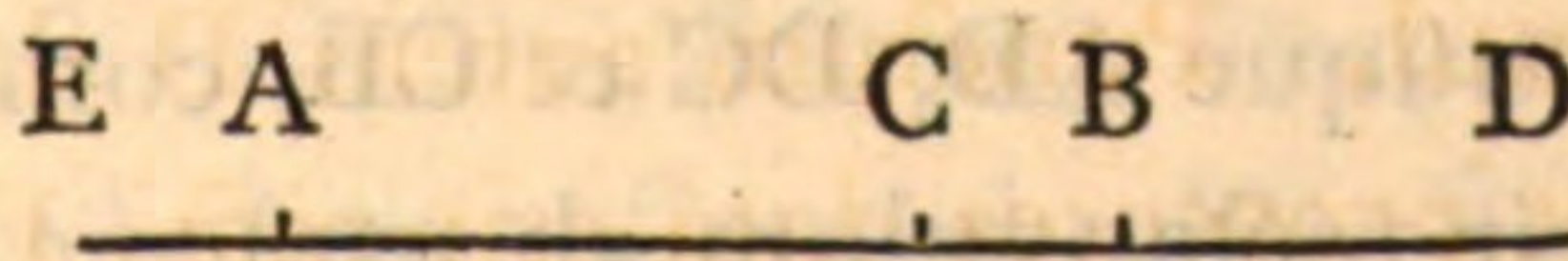
Quoniam rectangulum AB, BC aequale est, ex constructione, quadrato ex BD, erit, per partem secundam Prop. 43. rectangulum contentum utrâque AD, DC et ipsâ CB aequale quadrato ex CD, hoc est erit rectangulum ab utrâque AD, DC et CE una cum eo ab utrâque AD, DC et EB aequale quadrato ex CD. Commune auferatur rectangulum DC, CE, erit reliquum, rectangulum scilicet AD, CE [una cum eo ab utrâque AD, DC et EB aequale rectangulo CD, DE. Rursus commune auferatur rectangulum CE, ED, reliquum, rectangulum scilicet AE, EC una cum eo ab utraque AD, DC et EB aequale erit quadrato ex ED; hoc est erit rectangulum AE, EC una cum ipso F, BE aequale quadrato ex ED.



CAS. 2. Sit punctum E in BA producta ultra AC.

Quoniam rectangulum AB, BC aequale est quadrato ex BD, erit, per tertiam partem Prop.

43. rectangulum ab utrâque AD, DC et AB aequale quadrato ex AD. Commune addatur



rectangulum ab utrâque AD, DC et EA, erit totum rectan-

gulum ab utrâque AD, DC et EB aequale toti, rectangulo scilicet ED, DA et ipso EA, CD. Apponatur rursus commune rectangulum AE, EC, et totum, rectangulum scilicet AE, EC una cum eo ab utrâque AD, DC et EB aequale erit toti, rectangulo scilicet ED, DA una cum ipso DE, EA, hoc est quadrato ex ED. Rectangulum igitur AE, EC una cum ipso F, BE aequale est quadrato ex ED.

E A C B D

COR. 2. Si punctum E sumatur inter puncta A, C, reliquis manentibus, erit rectangulum AE, EC una cum quadrato ex ED aequale rectangulo F, BE.

Quoniam, ut ostensum fuit in Cas. 1. praecedentis Corollarii, quadratum ex CD aequale est rectangulo ab utrâque AD, DC et CB, commune apponatur rectangulum ab utrâque AD, DC et EC, et totum, rectangulum scilicet AD, EC una cum ipso ED, DC, hoc est rectangulum AE, EC una cum DE, EC et ipso ED, DC, hoc est rectangulum AE, EC una cum quadrato ex ED aequale erit toti, rectangulo scilicet ab utrâque AD, DC et EB, hoc est rectangulo F, EB.

A E C B D

Et si punctum E cadat in A, erit quadratum ex AD five ED aequale rectangulo F, AB five F, EB. Quoniam enim quadratum ex CD aequale est rectangulo ab utrâque AD, DC et CB, commune apponatur rectangulum ab utrâque AD, DC et AC, et totum, rectangulum scilicet AD, AC una cum ipso AD, DC hoc est quadratum ex AD aequale erit

A C B D

 E

toti rectangulo ab utrâque AD, DC et AB, hoc est rectangulo F, AB.

CAS. 2. PROP. 48. Quando punctum inveniendum D est ad easdem partes puncti B ad quas est A.

Sit D punctum inveniendum, et F recta invenienda. Igitur sumpto utcunque puncto E in AB producta ad partes B, erit, ex hypothese, rectangulum AE, EC aequale quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE. Sumatur rursus punctum B vice ipsius E, et, ex hypothese, rectangulum AB, BC aequale erit quadrato ex DB. Igitur, per primam partem Prop. 45. rectangulum contentum excessu ipsarum AD, DC et ipsâ BD est aequale rectangulo AD, DC; et addito communi rectangulo BD, DC, erit rectangulum AD, DB aequale ipsi AB, DC. Quoniam vero rectangulum AE, EC aequale est quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE, hoc est rectangulo DE, EC una cum ED, DC et ipso F, BE; ablato communi rectangulo DE, EC, erit reliquum rectangulum AD, CE aequale reliquo, rectangulo scilicet ED, DC et ipsi F, BE. Commune apponatur rectangulum AD, DC, et totum rectangulum AD, DE aequale erit toti, rectangulo scilicet AE, DC et ipsi F, BE. Ostensum autem fuit rectangulum AD, DB aequale ipsi AB, DC; ablatis igitur hisce ex praecedentibus aequalibus, erit reliquum rectangulum AD, BE aequale reliquo, rectangulo scilicet DC, BE una cum ipso F, BE; quare recta AD aequalis est ipsis DC, F simul. Et quoniam quadratum ex DB aequale est dato rectangulo AB, BC, datum erit punctum D; quare rectae AD, DC et ipsa F datae erunt. Quae fuerunt invenienda.

A	D	C	B	E

Componetur ita.

Inter AB, BC media proportionalis inveniatur BD quae ponatur in AB ad partes A, et sumatur recta F aequalis excessui ipsarum AD, DC; sitque punctum E utcumque sumptum in AB ultra B producta; erit rectangulum AE, EC aequale quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE.

Quoniam excessus rectarum AD, DC aequalis est ipsi F, erit AD aequalis rectae DC una cum recta F, et rectangulum AD, DE aequale erit rectangulo CD, DE una cum ipso F, DE. Est autem, ex constructione, rectangulum AB, BC aequale quadrato ex DB; igitur, per primam partem Prop. 45. rectangulum AD, DC aequale est (contento excessui ipsarum AD, DC et ipsa DB, hoc est) rectangulo F, DB; et rectangulum AD, DE ostensum fuit aequale ipsi CD, DE una cum ipso F, DE, ex quibus ablatis praecedentibus aequalibus, erit reliquum rectangulum AD, CE aequale reliquo, rectangulo scilicet CD, DE una cum ipso F, BE. Commune apponatur rectangulum CE, ED, et totum rectangulum AE, EC aequale erit toti, quadrato scilicet ex DE una cum rectangulo F, BE.

A D C B E
 —————

COR. I. Si inter puncta C, B sumatur punctum E; vel si sumatur E in BA producta ultra AC; reliquis manentibus. Erit rectangulum AE, EC una cum ipso F, BE aequale quadrato ex DE.

CAS. I. Quando punctum E est inter puncta C, B.

Quoniam rectangulum AB, BC aequale est quadrato ex DB; erit, per partem secundam Prop. 45. rectangulum contentum excessui ipsarum AD, DC et ipsa CB, hoc est rectan-

gulum F, CB aequale quadrato ex DC; commune apponatur rectangulum scilicet DC, CE una cum ipso AE, EC, erit totum, rectangulum scilicet F, CB una cum rectangulo DC, CE et ipso AE, EC aequale toti, rectangulo scilicet ED, DC et ipso AE, EC: est autem rectangulum F, CE una cum ipso DC, CE aequale rectangulo AD, CE, quia recta F una cum DC est aequalis rectae AD. Ablatis igitur aequalibus hisce rectangulis ex praecedentibus, erit reliquum rectangulum F, EB una cum ipso AE, EC aequale reliquo, rectangulo scilicet ED, DC et ipso DE, EC, hoc est quadrato ex DE.

A D C E B

CAS. 2. Quando E est in BA producta ultra AC.

Quoniam rectangulum AB, BC aequale est quadrato ex DB, erit, per partem tertiam Prop. 45. rectangulum contentum excessu ipsarum AD, DC et ipsa AB, hoc est rectangulum F, AB aequale quadrato ex AD.

Commune apponatur rectangulum

E A D C B

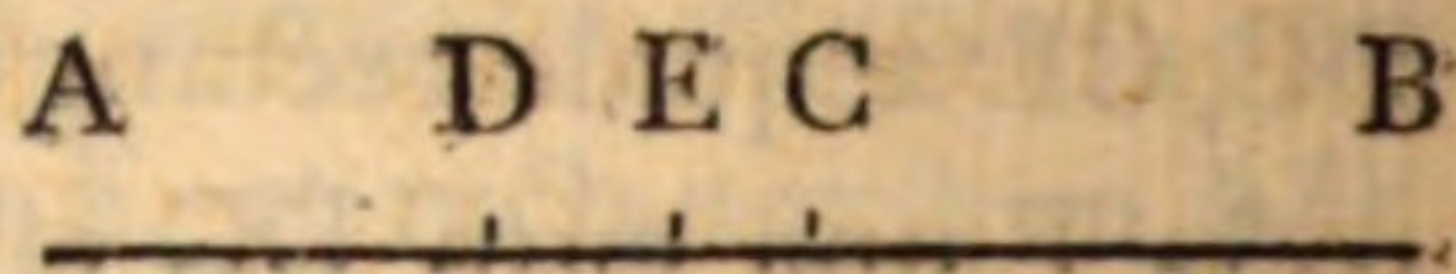
F, EA, erit F, EB rectangulum aequale quadrato ex AD una cum rect-

angulo ab excessu ipsarum AD, DC et EA. Rursus commune addatur rectangulum EA, DC, erit EA, DC una cum F, EB rectangulo aequale quadrato ex AD una cum rectangulo EA, AD, hoc est rectangulo ED, DA. Addatur commune rectangulum DE, EA, erit rectangulum AE, EC una cum ipso F, EB aequale quadrato ex ED.

COR. 2. Si inter puncta A, C sumatur punctum E, erit rectangulum AE, EC una cum quadrato ex DE aequale rectangulo F, EB.

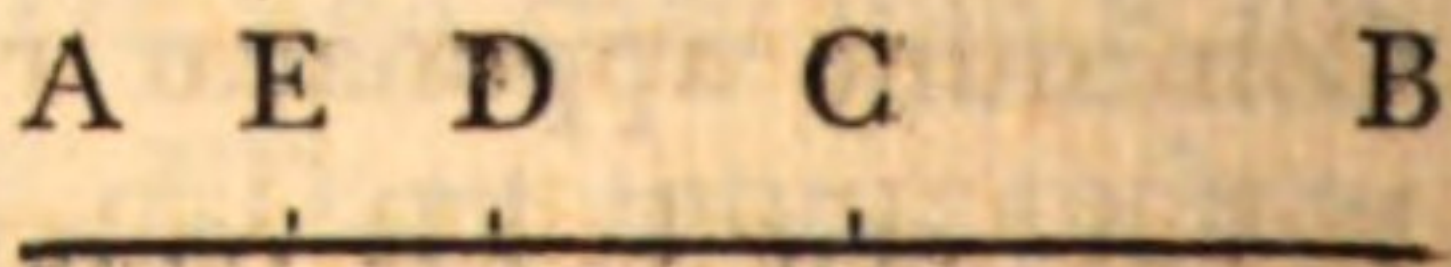
CAS. 1. Quando E est inter C, D puncta.

Quoniam ostensum fuit in Cas. 1. Cor. 1. quadratum ex DC, hoc est rectangulum DC, CE una cum ipso CD, DE aequale contento excessu ipsarum AD, DC, hoc est recta F et ipsa CB; est autem rectangulum AD, EC aequale ipsi DC, CE una cum F, EC, quia recta AD aequalis est ipsis DC, F simul; aequalibus hisce additis, erit rectangulum AC, CE una cum ipso CD, DE aequale rectangulo DC, CE una cum ipso F, EB. Auferatur commune DC, CE, et reliquum, rectangulum scilicet AE, EC una cum quadrato ex DE aequale erit rectangulo F, EB.



CAS. 2. Quando punctum E est inter A, D puncta.

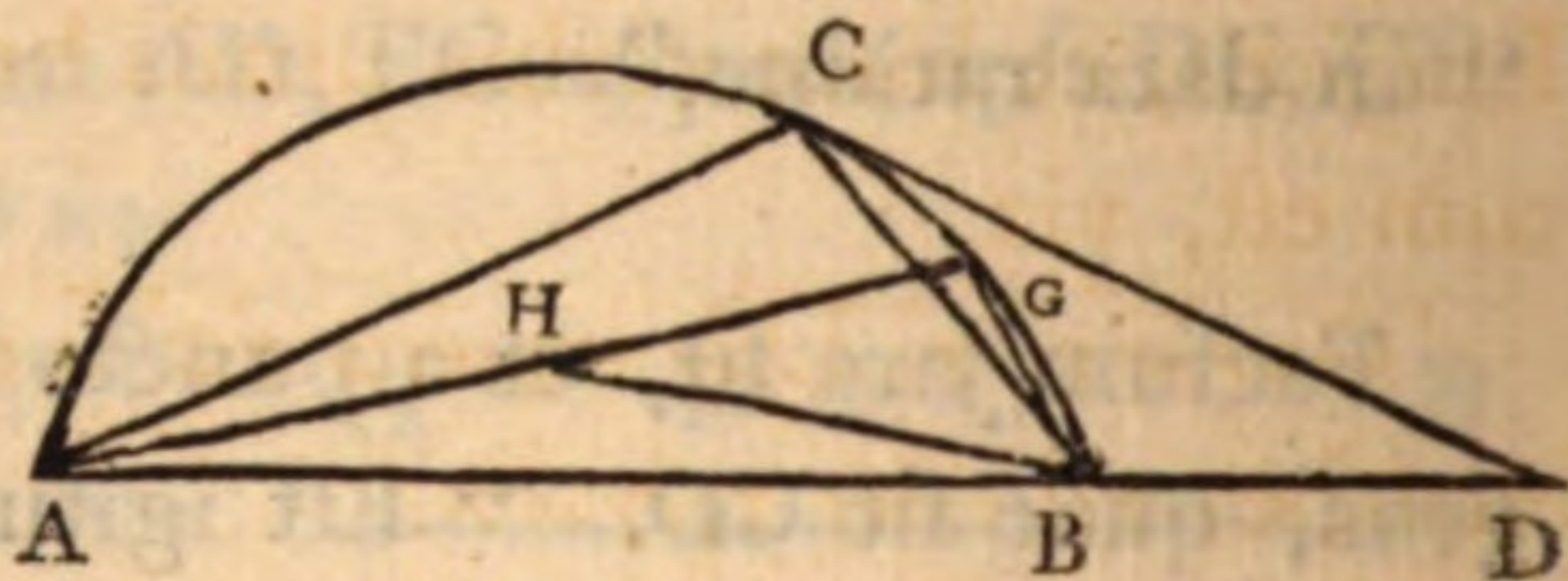
Quoniam in Casu 1. Cor. 1. quadratum ex DC aequale ostensum fuit rectangulo F, CB, est autem rectangulum AD, EC aequale ipsi DC, CE una cum F, EC; aequalibus hisce additis, erit quadratum ex DC una cum rectangulo AD, EC aequale ipsi DC, CE una cum rectangulo F, EB; auferatur commune, quadratum scilicet ex DC una cum rectangulo ED, DC, hoc est rectangulum DC, CE; et reliquum rectangulum AE, EC una cum quadrato ex ED aequale erit rectangulo F, EB.



In praecedente Propositione et ejusdem Corollariis punctum C positum est inter puncta A, B; si vero punctum A ponatur inter puncta C, B, eadem demonstrationes huic Casui intervenient si ubique legatur A pro C, et C pro A in iisdem.

Possunt haec duo ultima Porismata solvi sine ope Lemmatum Pappi, sed minus eleganter.

Quoniam enim ut quadratum ex E ad quadratum ex F, ita est AD ad DB; ut autem AD ad DB, ita quadratum ex AC ad quadratum ex CB, quia CD circulum contingit; erit ut quadratum ex E ad quadratum ex F, ita quadratum ex AC ad illud ex CB. Quare et ut E ad F, ita AC ad CB; ergo inflexa ACB Problema efficit.



E
F

Hanc Propositionem, quae in Graeco textu corrupta est, in loco uno et altero bene restituit Commandinus in commentario ad literas C, E in margine; in eo autem qui habetur ad literam D, ex Graecis καὶ ἐστὶ δύο δοθέντα non recte delendum putat verbum δύο, hoc enim significatur duo puncta A, B, data esse.

Problema autem facilius quam apud Pappum solvetur ut sequitur.

^a 92. Dat. in
nova edit.

^b 44. Dat.

Quoniam AB basis segmenti data est, datus erit ^a angulus ACB, et, ex hypothese, data est ratio AC ad CB; triangulum igitur ACB specie datum est ^b, quare datus est angulus ABC, et recta BC positione data erit. Datum igitur est punctum C in quo BC circumferentiae positione datae occurrit.

Componetur ita.

Ducantur AG, BG utcunque ad circumferentiam, et ut E ad F, ita fiat HG ad GB, et BH jungatur; angulo autem GBH aequalis fiat angulus ABC, et AC jungatur. Erit AC ad CB, ut E ad F. Quoniam enim angulus ABC aequalis est angulo GBH, et est ACB angulus ipsi AGB in eodem segmen-

te aequalis, triangulum ACB aequiangulum erit ipsi HGB ;
ut igitur AC ad CB, ita est (HG ad GB, et ita est) E ad F.

Problema hoc infervit constructioni Porismatis sequentis,
quod quidem Porisma videtur antepenultimum esse Lib. 3.
Euclidis, et hisce verbis nimis breviter apud Pappum descrip-
tum est, viz.

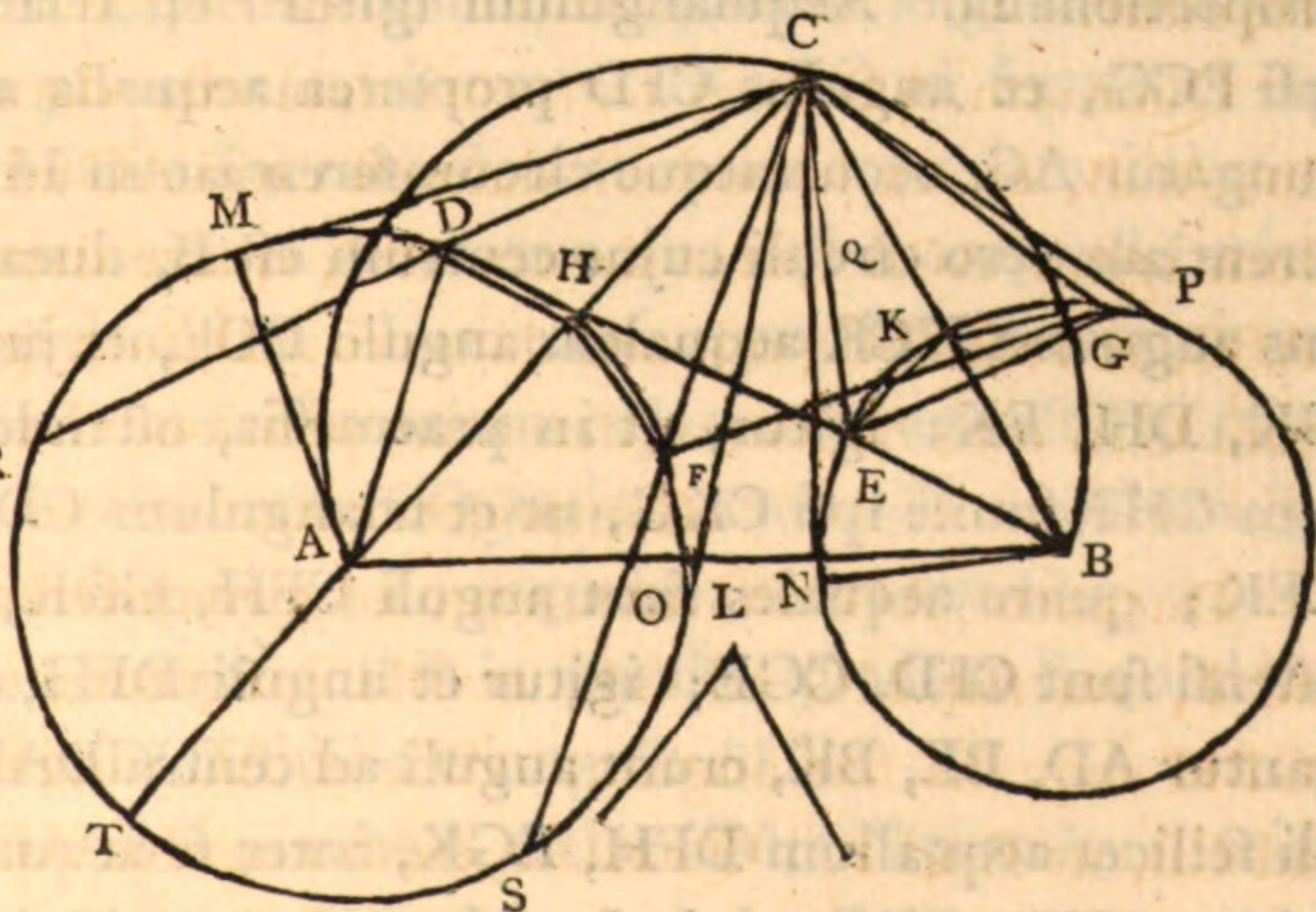
“Οτι ἐστὶ τὶ δοθὲν σημεῖον ἀφ’ ὃ αἱ ἐπιζευγνυμένα ἐπὶ τὸδε * δοθὲν
περιέχουσι τῷ εἶδει τρίγωνον.

Descriptio haec mutila certe, et forsā corrupta, ita sup-
plenda et explicanda videtur, ut in Propositione sequente.

P R O P. L.

“ DATIS positione duobus circulis, datum erit punctum a
“ quo si ad circumferentias circulorum ducantur duae rectae
“ angulum dato angulo aequalem comprehendentes, conti-
“ nebunt hae una cum recta ipsarum terminos jungente, tri-
“ angulum specie datum.”

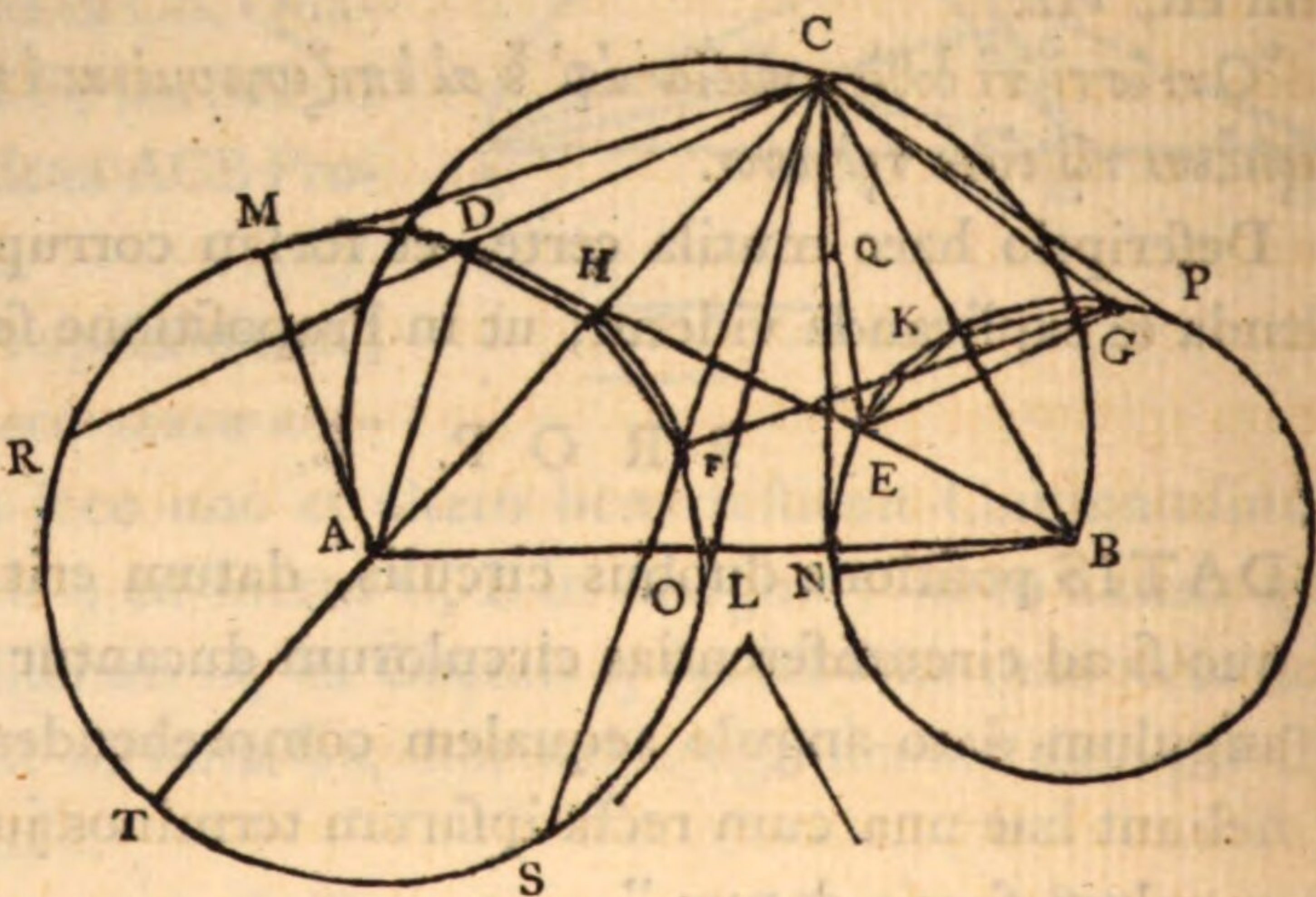
Sint A, B
centra circu-
lorum, et pu-
ta C esse
punctum in-
veniendum ;
igitur si du-
cantur CD,
CE ad cir-
cumferenti-
as, vel conve-
xas, vel con-



* Forsan τόνδε sc. κύκλον.

cavas, datum angulum comprehendentes, et jungatur DE, specie datum erit triangulum DCE. Similiter, si ducantur aliae duae CF, CG angulum aequalem ipsi DCE comprehendentes, junctâ FG, specie datum erit triangulum FCG. Quoniam igitur similia sunt triangula DCE, FCG, ut DC ad CE, ita est FC ad CG,

et permu-
tando ; et
quoniam ae-
quales sunt
DCE, FCG
anguli, ae-
quales erunt
et anguli
DCF, ECG,
et circa ipsos
latera sunt



- * 6. 6. proportionalia. Aequiangulum igitur ^a est triangulum DCF ipsi ECG, et angulus CFD propterea aequalis est ipsi CGE. Jungatur AC, occurratque circumferentiae in H; ad circumferentiam vero circuli cujus centrum est B, ducatur CK faciens angulum HCK aequalem angulo DCE, et jungantur FH, GK, DH, EK; igitur, ut in praemissis, ostendetur triangulum CHF simile ipsi CKG, ut et triangulum CDH simile ipsi CEK; quare aequales sunt anguli CFH, CGK, et aequales ostensi sunt CFD, CGE; igitur et anguli DFH, EGK. Jungantur AD, BE, BK, erunt anguli ad centra DAH, EBK, dupli scilicet aequalium DFH, EGK, inter se aequales. Anguli igitur AHD, BKE ad bases triangulorum isoscelium ADH,

BEK aequales sunt; et quoniam similia sunt CDH, CEK tri-
 angula, aequales sunt anguli CHD, CKE; ergo anguli AHD,
 CHD simul aequales sunt angulis BKE, CKE simul; est au-
 tem AHC recta linea, igitur^b et recta est BKC. Et quoniam^b 14. 1.
 in triangulis ADC, BEC aequales sunt anguli DAC, EBC, ut
 et DCA, ECB, erit ut AC ad AD, ita BC ad BE, et permutan-
 do; datae autem sunt AD, BE, quare et ratio AC ad BC data
 est; et datus est angulus ACB, specie igitur^c datum est tri-^c 44. Dat..
 angulum ABC. Et quoniam dati sunt anguli BAC, ABC et
 data est recta AB positione, datae erunt AC, BC positione; da-
 tum igitur est punctum C. Quoniam vero est DC ad CE, ut
 AC ad CB, et aequales sunt DCE, ACB anguli, erit triangu-
 lum DCE simile ipsi ACB quod datum esse specie ostensum
 est. Quae fuerunt ostendenda.

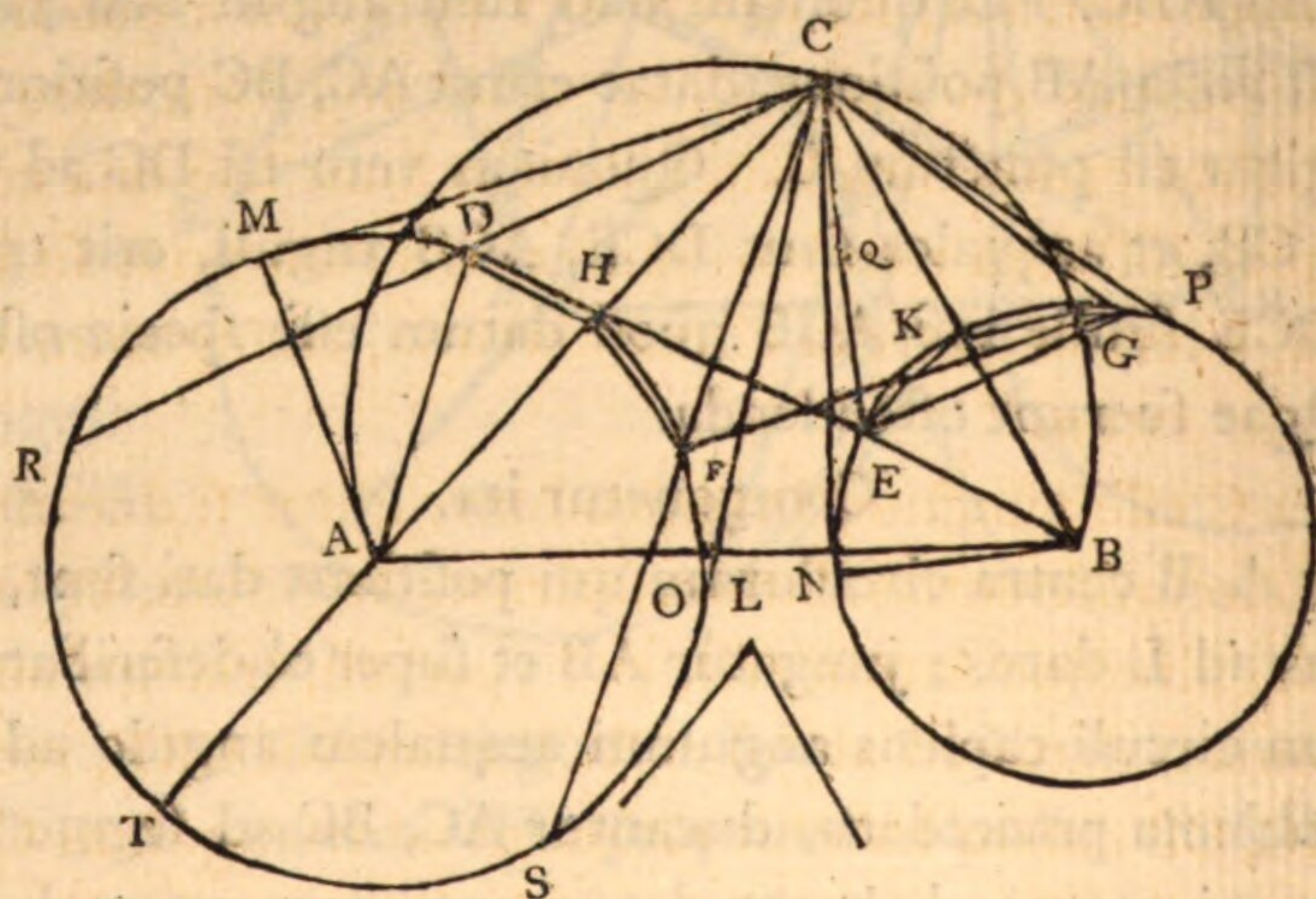
Componetur ita.

Sint A, B centra circulorum qui positione dati sunt, sitque
 angulus ad L datus; jungatur AB et super eâ describatur seg-
 mentum circuli capiens angulum aequalem angulo ad L, et,
 per Problema praecedens, ducantur AC, BC ad segmenti cir-
 cumferentiam quae habeant datam rationem quam habet ea
 quae est a centro circuli A ad eam quae est a centro B; erit C
 punctum inveniendum. Hoc est si a puncto C ducatur ut-
 cunque CD ad circumferentiam cujus centrum est A, et ab
 eodem ducatur alia recta CQ faciens cum CD angulum ipsi
 ACB, five dato angulo ad L, aequalem, occurret CQ circum-
 ferentiae cujus centrum est B in puncto quodam E quod fa-
 ciet triangulum DCE simile triangulo ACB.

Ducantur enim a puncto C rectae CM, CN circulos contin-
 gentes ex una parte, et CO, CP ex altera, et jungantur AM,

M m m

BN. Quoniam igitur, ex constructione, est AC ad BC, ut AM
 7.6. quae est a centro A ad BN quae est a centro B, erunt^d trian-
 gula rectangula AMC, BNC aequiangula; aequales igitur sunt
 anguli ACM, BCN, et propterea anguli MCN, ACB sunt ae-
 quales. Similiter aequales ostendentur OCP, ACB anguli;
 aequales igitur sunt anguli MCN, OCP. Quoniam igitur rec-
 ta CD cadit intra angulum MCO, recta CQ quae facit angu-
 lum DCQ aequalem ipsi ACB, hoc est ipsi MCN, five OCP ne-



cessario cadet intra angulum NCP, quare et circumferentiae
 necessario occurret. Occurrat in E quae sit ad eandem cir-
 cumferentiae partem ad quam est D, convexam scilicet aut
 concavam, et jungantur AD, BE. Quoniam igitur aequales
 sunt ACB, DCE anguli, aequales erunt ACD, BCE, et, ex con-
 structione, est AC ad CB, ut AD ad BE, et, permutando, AC
 ad AD, ut CB ad BE, et reliqui anguli ADC, BEC, propter
 circulum, sunt simul vel majores, vel non majores angulo
 recto, aequiangula igitur erunt^d ADC, BEC triangula. Ut

igitur AC ad CD, ita BC ad CE, et permutando; et quoniam aequales sunt anguli ACB, DCE, erit triangulum DCE simile ipsi ACB.

COR. Et ope hujus solvetur Porisma sequens, quod mihi ut Problema proposuit D. Gulielmus Trail, adolescens egregius, qui pro aetate multum in mathesi profecit.

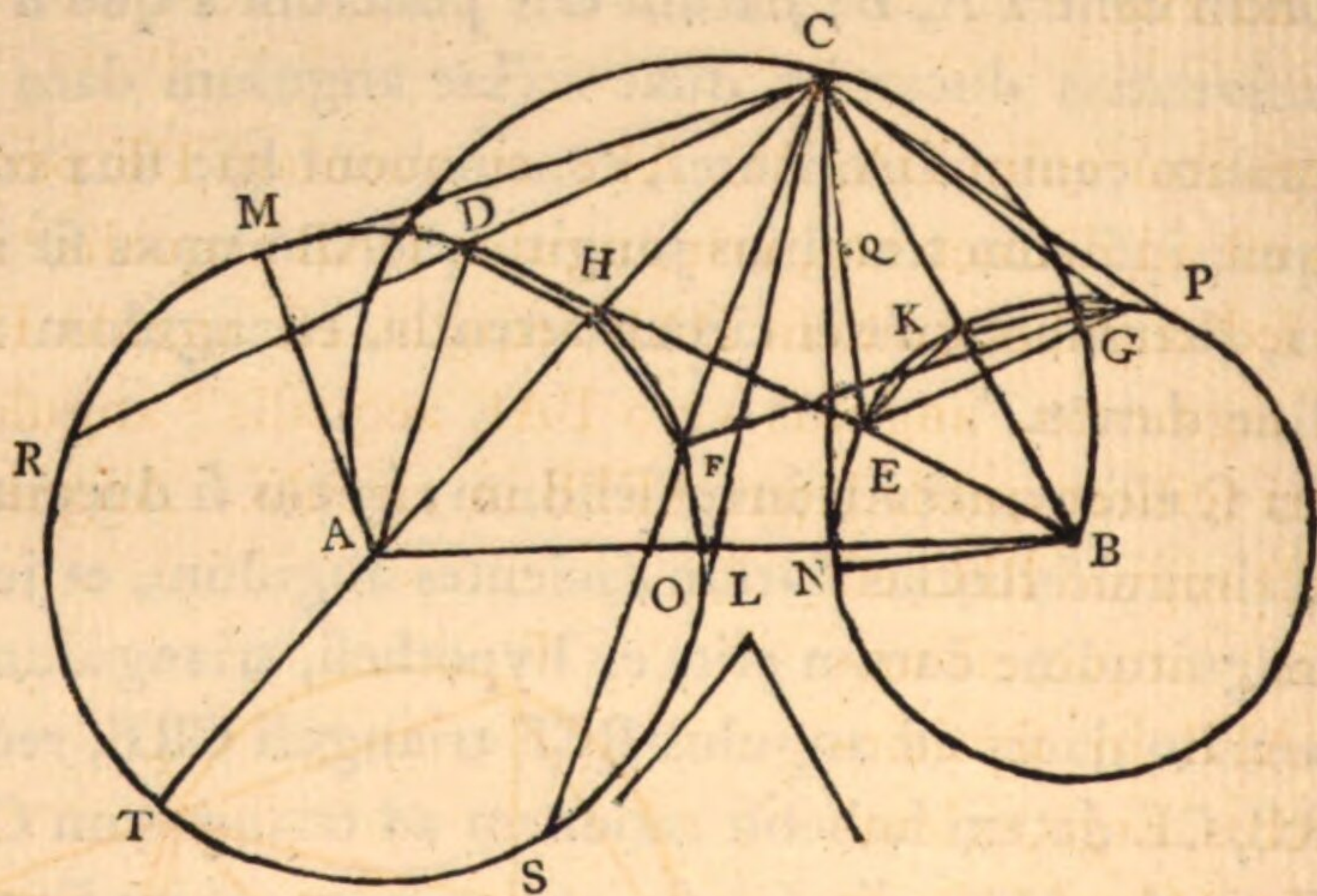
PORISMA. "Datis positione duobus circulis DHF, EKG
"quorum centra A, B; datum erit punctum a quo si ad cir-
"cumferentias ducantur duae rectae angulum dato angulo
"aequalem comprehendentes, continebunt hae una cum rec-
"ta quae ipforum terminos jungit, quorum unus sit in con-
"cava, altera in convexa circumferentia, triangulum magni-
"tudine datum."

Putat C esse punctum inveniendum; igitur si ducantur CR, CE ad circumferentias datum facientes angulum, et jungatur RE, magnitudine datum erit, ex hypothese, triangulum CRE. Et quoniam datus est angulus RCE trianguli CRE, rectangulum RC, CE datam habebit rationem ad triangulum CRE per Cor. Prop. 62. Dat. edit. Glasg. et datum magnitudine est triangulum, quare rectangulum RC, CE datum est.

Similiter si ducantur aliae duae rectae CS, CG, datum ostendetur rectangulum SC, CG, quod propterea aequale est ipsi RC, CE; est igitur SC ad CR, ut EC ad CG. Occurrat RC circumferentiae rursus in D, et SC eidem in F, et propter circumferentiam erit SC ad CR, ut CD ad CF; quare ut DC ad CF, ita est EC ad CG. Ostendetur autem, ut in hac Propositione, esse AC ad CB, ut AD ad BE, et datum esse punctum C.

Componetur ita.

Inveniatur punctum C ut in hac Propositione, et occurrat AC circumferentiae concavae in T, et BC convexae in K; si a puncto C ducantur utcunque duae rectae CR, CE, una ad concavam, altera ad convexam circumferentiam, et jungatur RE, ut et TK, triangulum RCE aequale erit triangulo dato TCK. Occurrat TC circumferentiae rursus in H, et, per Propositionem hanc, similia erunt triangula DCE, HCK; ut igitur



tur DC ad CH, ita EC ad CK, sed ut DC ad CH, ita propter circumulum est TC ad CR, est igitur TC ad CR, ut EC ad CK; quare rectangulum RC, CE aequale est ipsi TC, CK. Quoniam vero aequales sunt anguli RCE, TCK, erit ut rectangulum RC, CE ad triangulum RCE, ita rectangulum TCK ad triangulum TCK; aequalia autem ostensa sunt rectangula, igitur triangulum RCE est aequale dato triangulo TCK. Q. E. D.

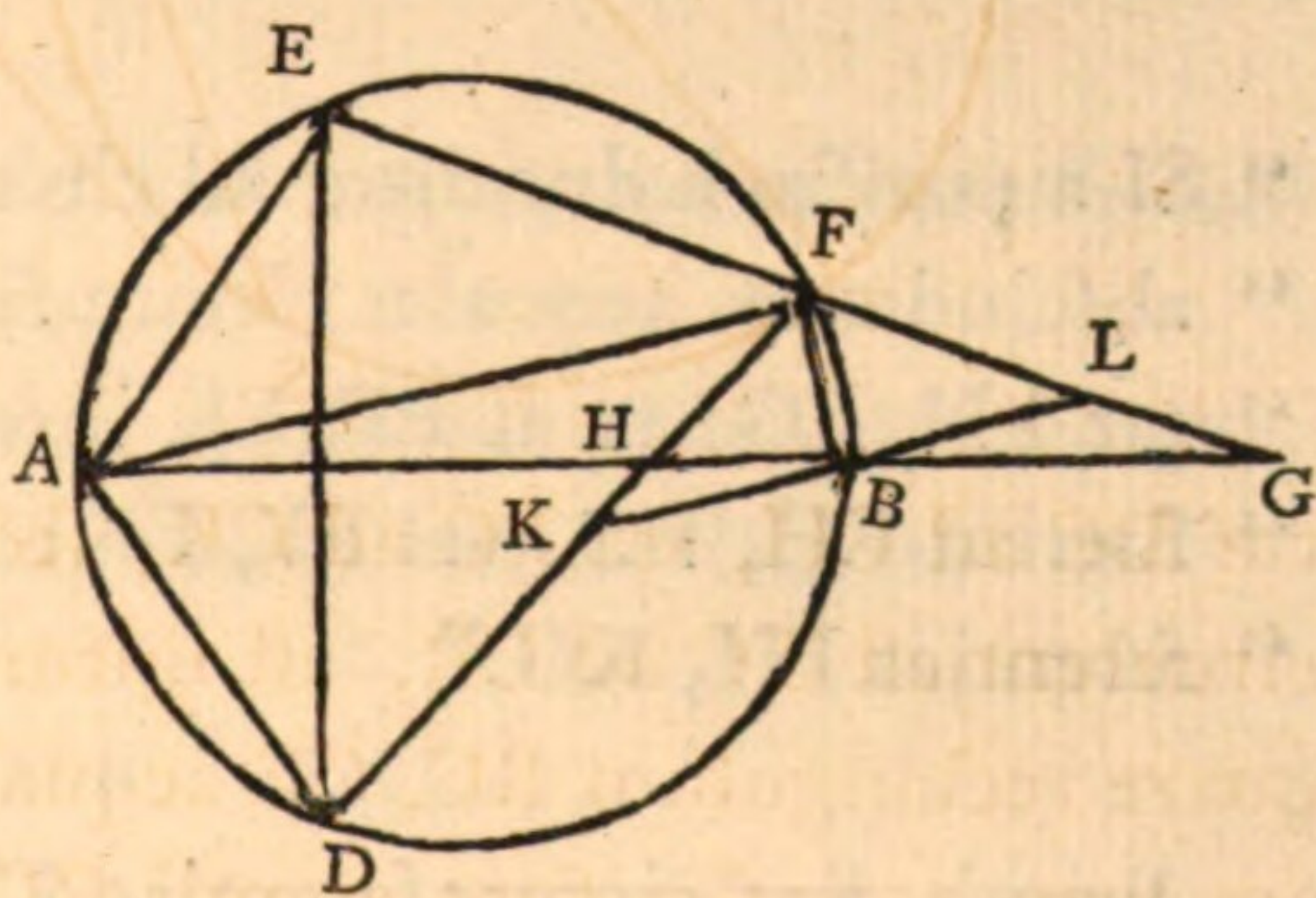
5to Januarii, 1767.

P R O P. LI.

Quae est Prop. 156. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 30.

“ SIT circulus cujus diameter AB, et a quovis puncto cir-
 “ cumferentiae D ad ipsam perpendicularis agatur DE, duca-
 “ turque utcunque DF circumferentiae rursus occurrens in F,
 “ et ipsi AB in H; juncta vero EF producat ut cum diame-
 “ tro in puncto G conveniat. Dico ut AG ad GB, ita esse
 “ AH ad HB.

Jungantur enim DA, AE, AF; et quoniam DE perpendi-
 cularis est ad diametrum, erit angulus DAB aequalis ^a angulo ^a 3.3. et 4.1.
 BAE; sed angulus quidem DAB aequalis est angulo HFB in
 eodem segmento, angulus vero BAE aequalis ^b angulo BFG ^b 22. 3.
 exteriori scilicet quadrilateri AEFB in circulo. Angulus igitur
 HFB angulo BFG est
 aequalis; atque est an-
 gulus AFB in semicir-
 culo rectus. Ergo, ex lem-
 mate, ut AG ad GB, ita
 est AH ad HB.

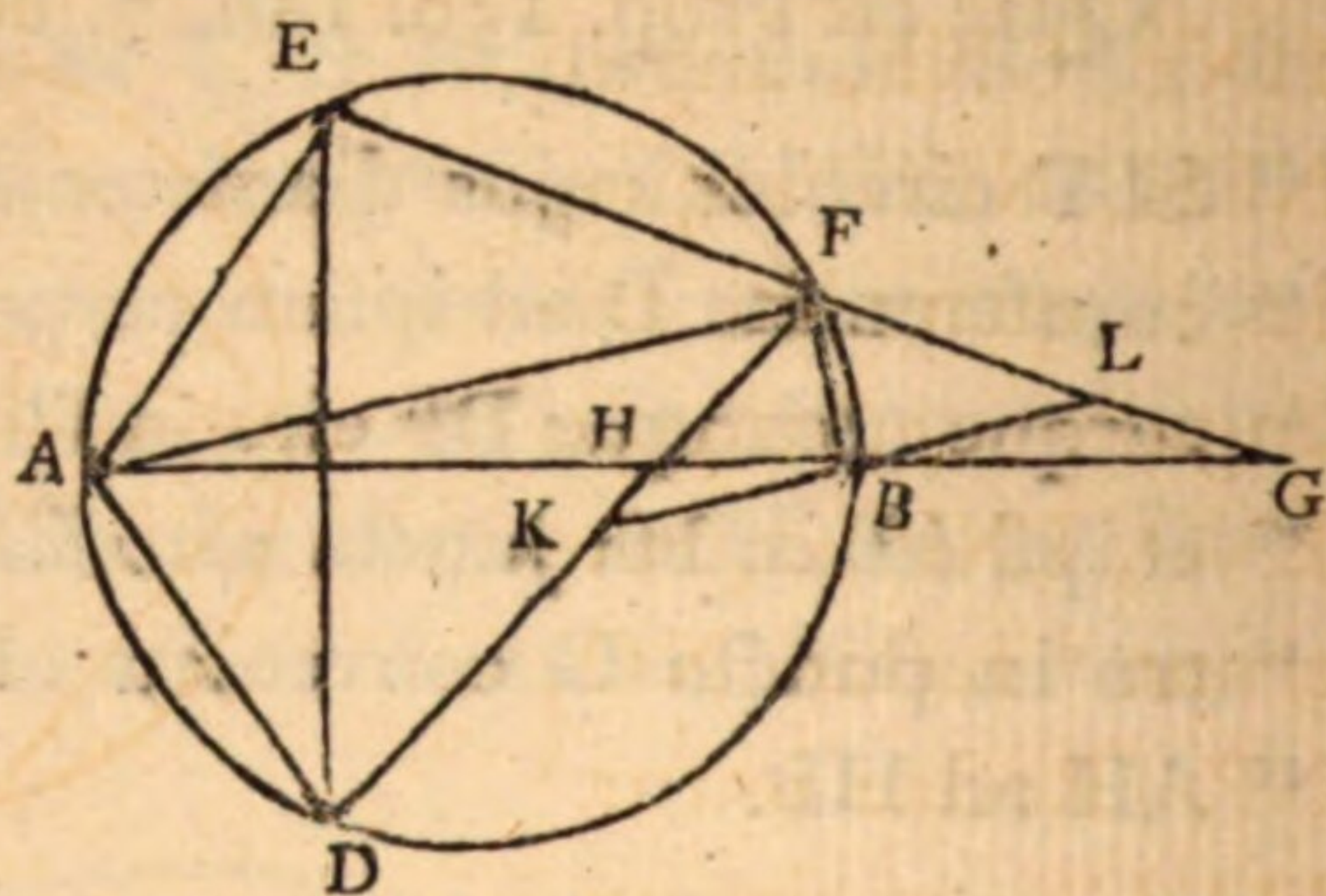


Lemma hoc non extat
 apud Pappum, est vero
 Propositio quae conversa
 est Prop. 52. Lib. 6. Pappi, et a Commandino in Commenta-
 rio ad eam Propositionem demonstrata habetur ut sequitur,
 paucis mutatis.

Per punctum B ducatur KL parallela ipsi AF, occurratque
 rectis FH, FG in K, L; quoniam igitur rectus est angulus

AFB, recti erunt FBK, FBL, et aequales sunt anguli KFB, BFL, igitur recta KB ae-

^a 26. 1. qualis ^a est ipsi BL. Est autem AG ad GB, ut (AF ad BL, five KB, hoc est ut) AH ad HB. Et contra, si hoc fuerit, ostendetur KB aequalis BL, et propterea angulus KFB aequalis ipsi BFG.



COR. Hinc si datum fuerit punctum H, reliquis ut in Propositione manentibus, datum erit G, et contra; circulo sc. positione dato.

P R O P. LH.

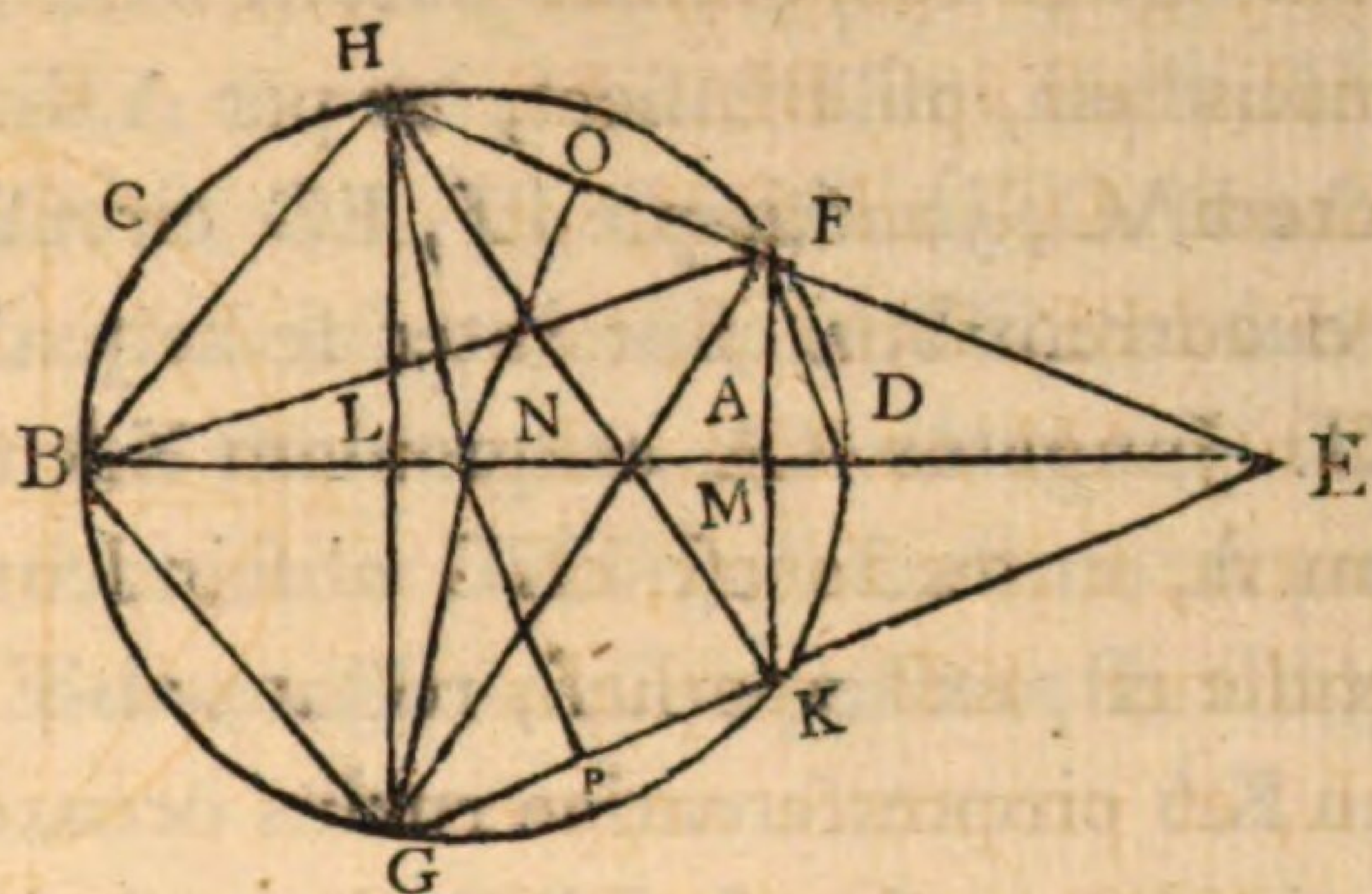
“ SI a puncto E ducantur ad circulum BCD rectae EFH, EKG
 “ abscindentes aequales circumferentias FH, KG, erunt duc-
 “ tae EH, EG, ut et EF, EK inter se aequales. Et si aequales
 “ fuerint EH, EG, vel EF, EK; abscindent aequales circum-
 “ ferentias FH, KG.”

Primò, sint circumferentiae FH, KG aequales; erit igitur recta FH aequalis ipsi KG; quare perpendiculares NO, NP ductae a centro N ad ipsas aequales erunt ^a. Recta igitur EO
^a 14. 3. aequalis erit ^b ipsi EP; et aequales sunt OH, PG; igitur et EH, EG, ut et EF, EK sunt inter se aequales.

Et si aequales fuerint EH, EG, abscindent aequales cir-

cumferentias FH, KG. Ductis enim a centro rectis NH, NG,

erunt^c, in triangulis HNE, GNE, anguli NEH, NEG aequales; quare in triangulis rectangulis ENO, ENP aequales erunt^d rectae NO, NP. Rectae igitur^a FH, GK, et circumferentiae quas abscindunt aequales erunt.



^c 8. 1.

^d 26. 1.

^a 14. 3.

Sunt duae hae Propositiones Lemmata ad Porisma penultimum Lib. 3. Porismatum Euclidis, quod in textu Graeco praefationis Pappi Alexandrini ad Librum ejus 7. quem praefixit clariss. Halleius editioni suae Apollonii de Sectione Rationis, Oxonii anno 1706. impressae, his verbis continetur, viz.

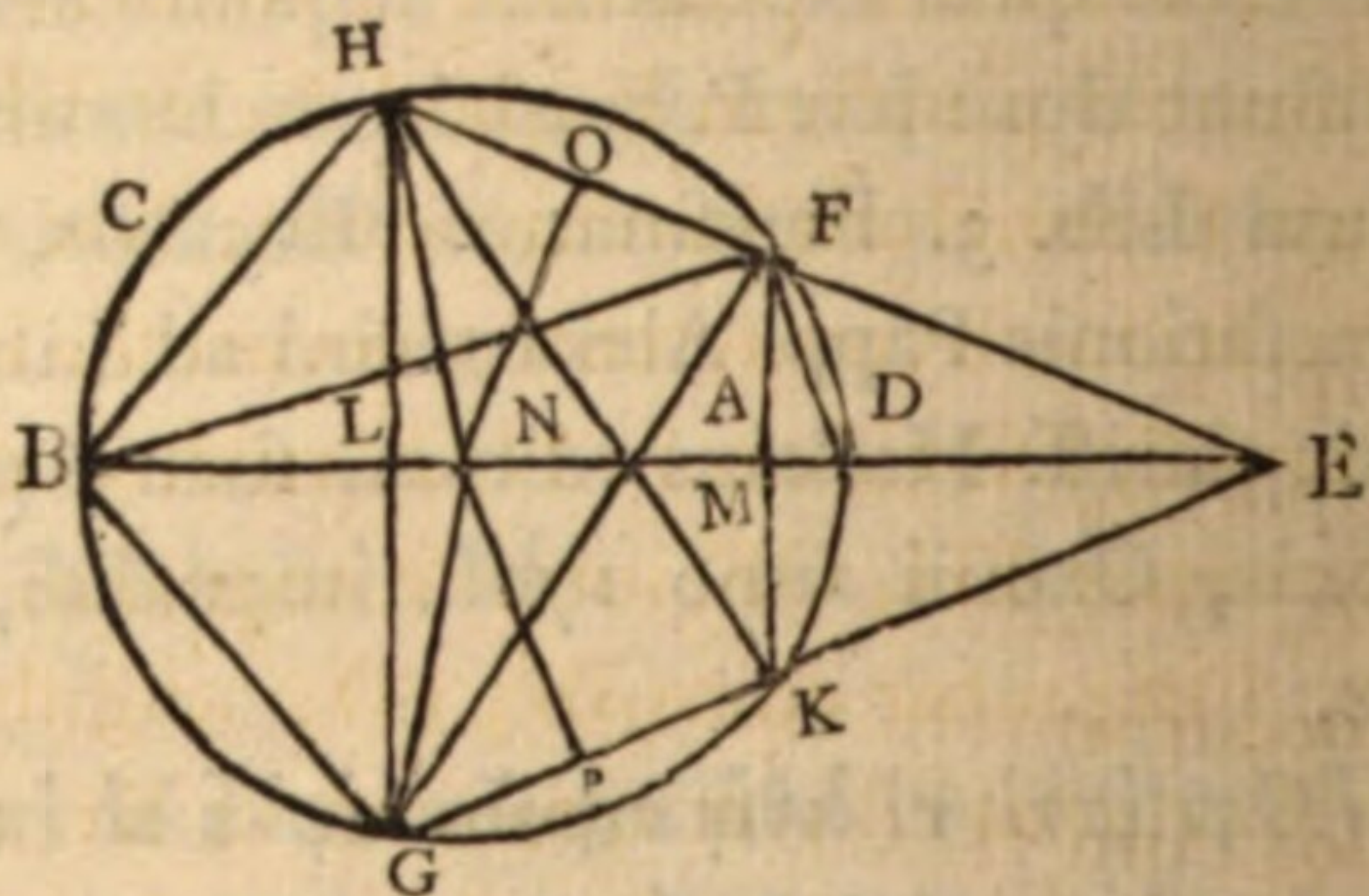
“Οτι ἐστὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ἂν αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὸδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας.

Porisma hisce verbis breviter et obscure nimis descriptum, non parva indagine, ita explicandum inveni, scilicet,

P R O P. LIII.

“ DATO puncto intra vel extra circulum positione datum, si
 “ per illud ducatur utcunque recta linea circulo occurrens;
 “ datum erit aliud punctum a quo si ad puncta in quibus
 “ ducta circumferentiae occurrit, ducantur duae rectae li-
 “ neae, abscindent hae a circulo circumferentias aequales.”

Puta verum esse Porisma; et datum sit punctum A intra vel extra circulum positione datum BCD; sitque E punctum inveniendum, tale scilicet, ut per A ducta ad circulum quavis recta FAG, junctisque EF, EG circumferentiae rursus in H, K occurrentibus, sint inter se aequales circumferentiae FH, KG. Jungatur KA, et quoniam KA transit per datum punctum A, et ducta est EKG abscindens circumferentiam KG, necesse est, ex hypothesi, rectam ab E ductam ad punctum in quo KA circumferentiae rursus occurrit abscindere circumferentiam aequalem ipsi KG, hoc est circumferentiae FH. Patet vero ex 8, et 29, 3.



nullam rectam prae-
ter ipsam EFH posse
abscindere circum-
ferentiam ad partes
C circuli aequalem
ipsi FH; transit igi-
tur recta KA per
punctum H. Quoni-

am vero circumferentiae FH, GK sunt inter se aequales, junctis FK, HG, erit angulus HGF aequalis ipsi GFK; et sunt alterni, quare parallelae sunt FK, HG. Est igitur GA ad AF, ut (GH ad KF, hoc est ut) GE ad EK. Quoniam vero rectae EFH, EKG aequales abscindunt circumferentias, erit, per Prop. 52. recta EK aequalis ipsi EF. Ut igitur GA ad AF, ita

* 3. 6. est GE ad EF; quare juncta EA bifariam^a fecat angulum FEK. Occurrat FK ipsi AE in M, et quoniam FE, EM aequales sunt ipsis KE, EM, et aequales continent angulos, recta

^b 4.1 EM bifariam et ad rectos angulos secabit ^b ipsam FK, ut et

GH, quare et per centrum circuli transibit. Occurrat EA circumferentiae in B, D punctis; et quoniam HG perpendicularis est ad diametrum BD, et ductae sunt rectae GAF, HFE, erit, per Prop. 51. ut BE ad ED, ita BA ad AD; datae autem sunt BA, AD, quare data est ratio BE ad ED; et data est BD magnitudine, quare et DE magnitudine data est, sed et positione, datum enim est centrum circuli, datumque est punctum A in recta BDE; datum igitur est punctum E. Quod fuit inveniendum.

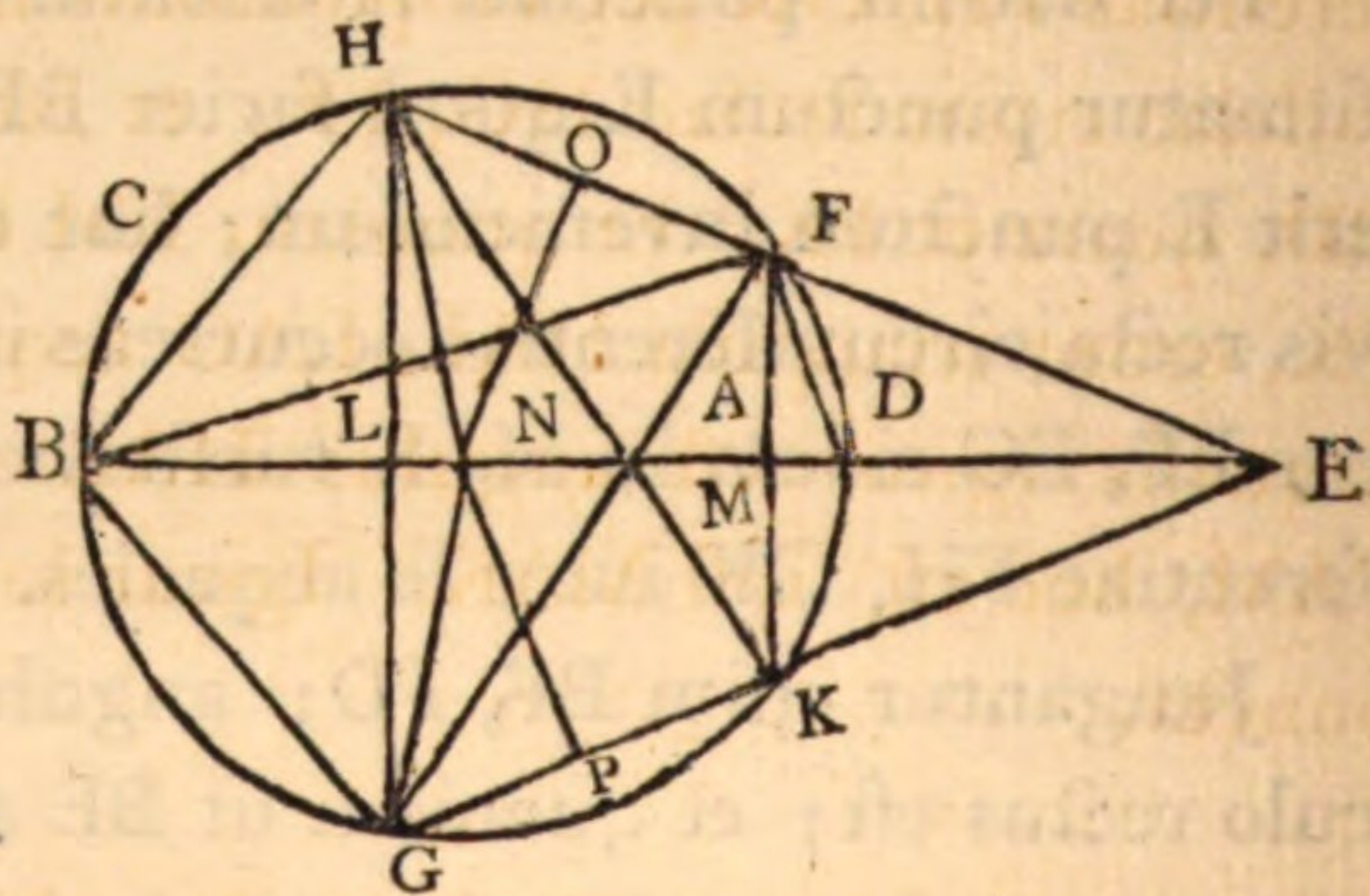
Componetur vero ita.

Per datum punctum A ducatur diameter BAD, et in ea sumatur punctum E quod faciet BE ad ED, ut BA ad AD; erit E punctum inveniendum; hoc est si per A ducatur quaevis recta circumferentiae occurrens in F, G punctis, et jungantur EF, EG eidem in H, K rursus occurrentes; erunt circumferentiae FH, GK inter se aequales.

Jungantur enim BF, FD; angulus igitur BFD in semicirculo rectus est; et quoniam ut BE ad ED, ita est BA ad AD, erunt, per conversam Lemmatis ad finem Prop. 51. anguli AFD, DFE inter se aequales; sunt igitur anguli DFE, BFA simul aequales angulo recto BFD, et sunt anguli DFE, BFH simul aequales angulo recto; aequales igitur sunt anguli BFA, BFH; quare, ductis NH, NG a centro N, erunt anguli ad centrum BNH, BNG aequales, et propterea qui ipsis sunt deinceps anguli HNE, GNE sunt aequales inter se. In triangulis igitur HNE, GNE, basis HE basi GE aequalis est^b; rectae igitur EH, EG aequales abscindunt circumferentias FH, KG, per Prop. 52.

COR. 1. Si a puncto E ducantur duae rectae EFH, EKG ad circulum BCD, abscindentes aequales circumferentias FH, KG, et juncta FG, vel HK occurrat diametro BD quae per E transit in A; erit BE ad ED, ut BA ad AD. Et si datus fuerit circulus positione, datumque sit alterum ex punctis A, E, puta E; datum erit et reliquum A; et propterea FG verget ad punctum datum.

Jungatur enim GH, cui occurrat BE in L, fitque N centrum, et jungantur NG, NH. Quoniam igitur EH, EG aequales abscindunt circumferentias, erit EH aequalis ipsi EG, per Prop. 52. igitur in triangulis HEN, GEN aequales sunt ^a anguli NEH, NEG; quare in triangulis LEH, LEG aequales et recti sunt ^b anguli HLE, GLE. Quoniam igitur HG perpendicularis est ad diametrum BD, et ductae sunt GAF HFE, erit BE ad ED, ut BA ad AD, per Prop. 51. Et si datum fuerit punctum E, datum erit et A, et contra, circulo scilicet positione dato.



COR. 2. Si in BD diametro circuli fumatur utcunque punctum A quod non fit centrum, et in eadem fumatur punctum E ita ut BA sit ad AD, ut BE ad ED; et a punctis A, E inflectantur utcunque AF, EF ad circumferentiam ei rursus

in G, H occurrentes; juncta GH perpendicularis erit ad diametrum BD.

Quoniam enim anguli LNH, LNG aequales ostensi sunt in compositione praecedente, erunt anguli ad L recti in triangulis NLH, NLG. Est igitur GH ad LN perpendicularis.

COR. 3. Iisdem manentibus ut in Cor. 2. Si praeterea jungatur EG quae circumferentiae rursus occurat in K; erunt H, A, K puncta in recta linea.

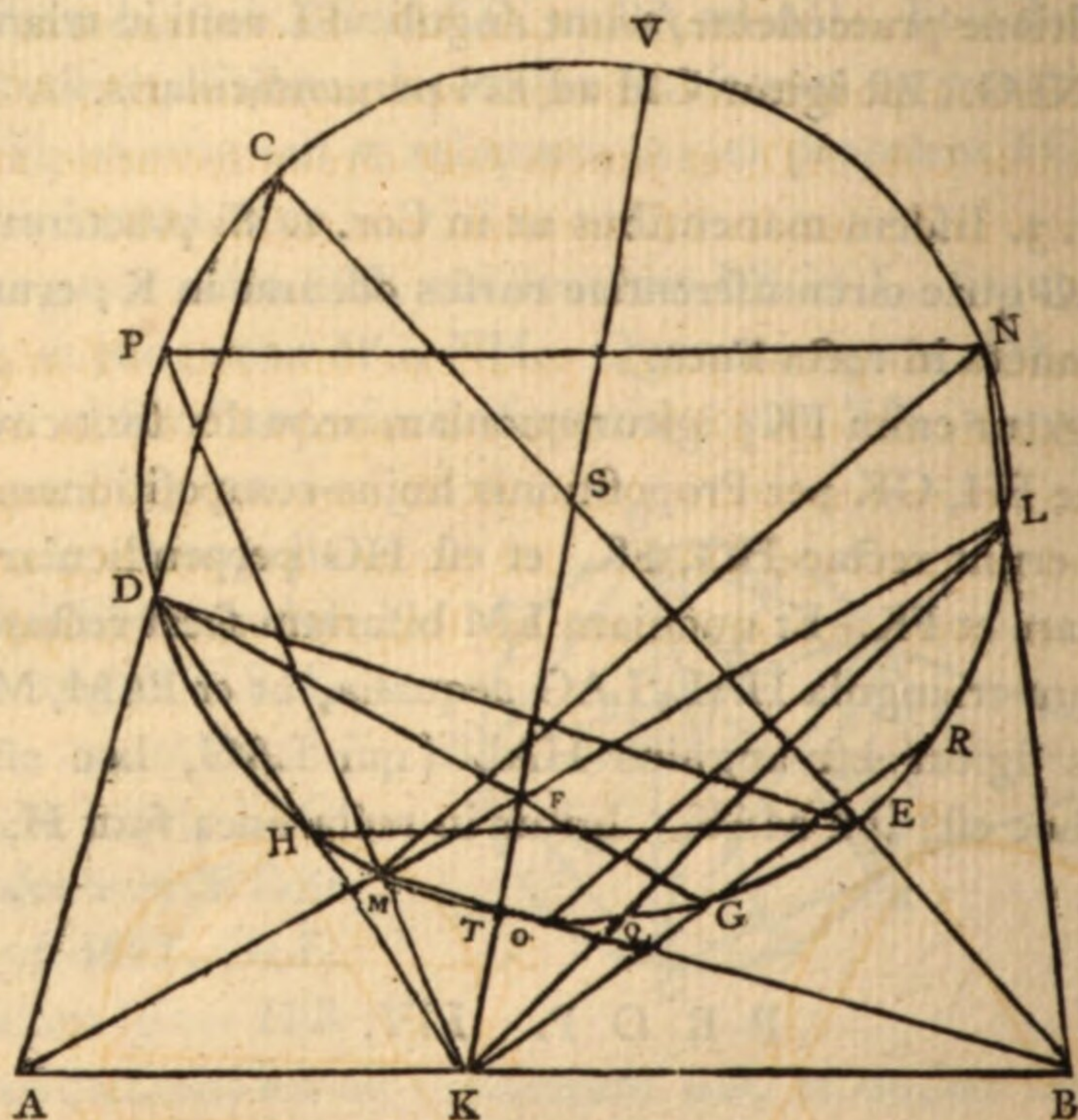
Jungatur enim FK; igitur quoniam aequales sunt circumferentiae FH, GK per Propositionis hujus compositionem, parallelae erunt rectae HG, FK, et est HG perpendicularis ad BD, quare et FK. Et quoniam LM bifariam secat rectas HG, FK, erunt triangula HAL, LAG aequalia, ut et FAM, MAK; aequalis igitur est angulus HAL (ipso LAG, hoc est ipso FAM, hoc est) ipso MAK. Igitur in recta linea sunt H, A, K puncta.

P R O P. LIV.

“ SI a puncto K ad circulum DCE ducantur duae rectae
 “ KMP, KQL abscindentes aequales circumferentias MP,
 “ QL, et sumantur circumferentiae aequales PH, LG ex ip-
 “ sis PM, LQ; junctae KH, KG abscindent circumferentias
 “ aequales.”

Ducantur enim a centro S rectae SP, SH, SL, SG; et quoniam KP, KL abscindunt circumferentias aequales, e-

- ^a Pr. 52. runt ^a rectae KP, KL inter se aequales; igitur in triangulis
^b 8. 1. KPS, KLS aequales sunt ^b anguli KSP, KSL; et aequales



- ^c 27. 3. sunt ^c anguli HSP, GSL, reliqui igitur KSH, KSG sunt aequales; basis igitur ^d KH basi KG est aequalis; quare rectae KH, KG abscindunt ^a aequales circumferentias, viz. HD, GR.

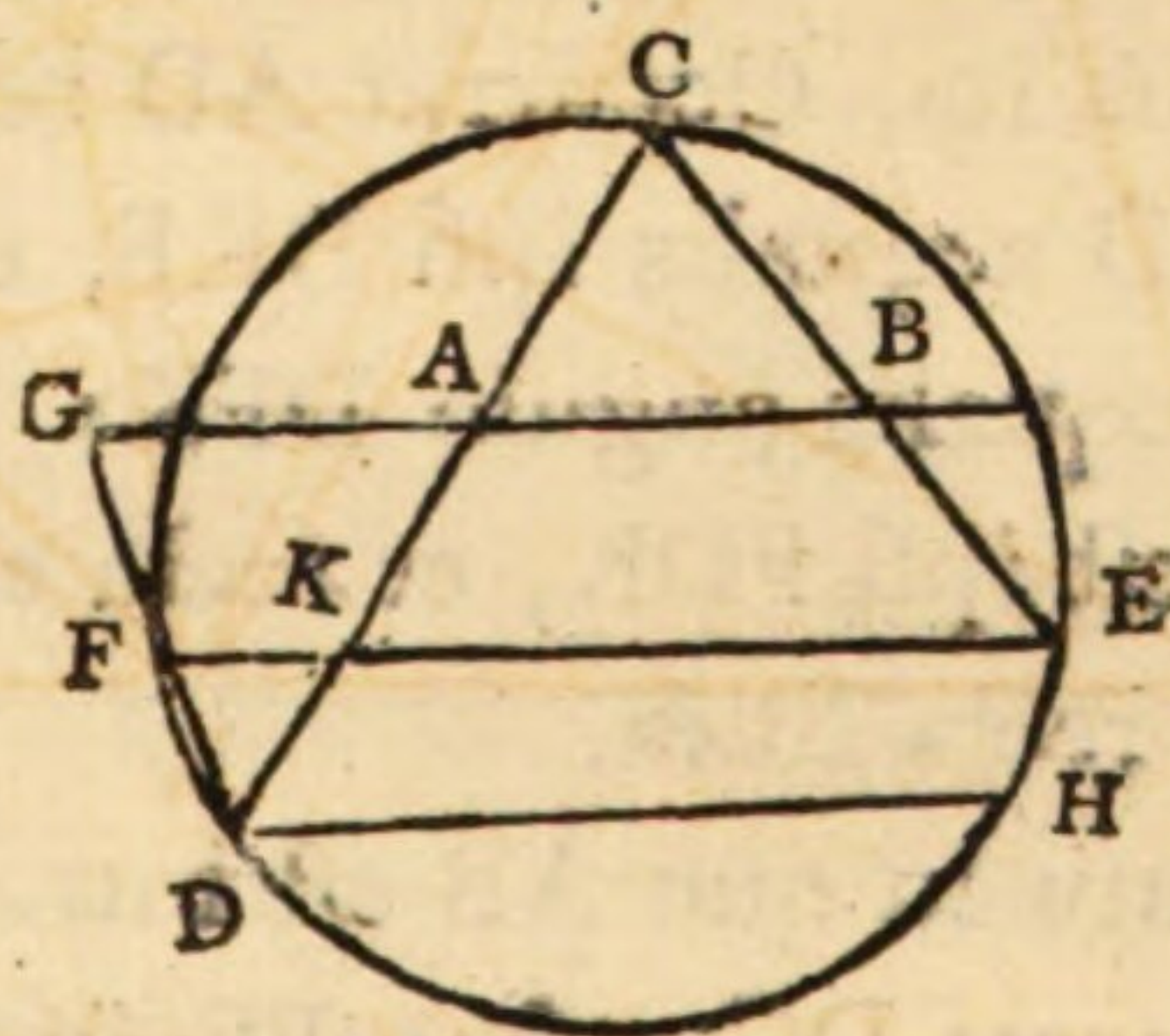
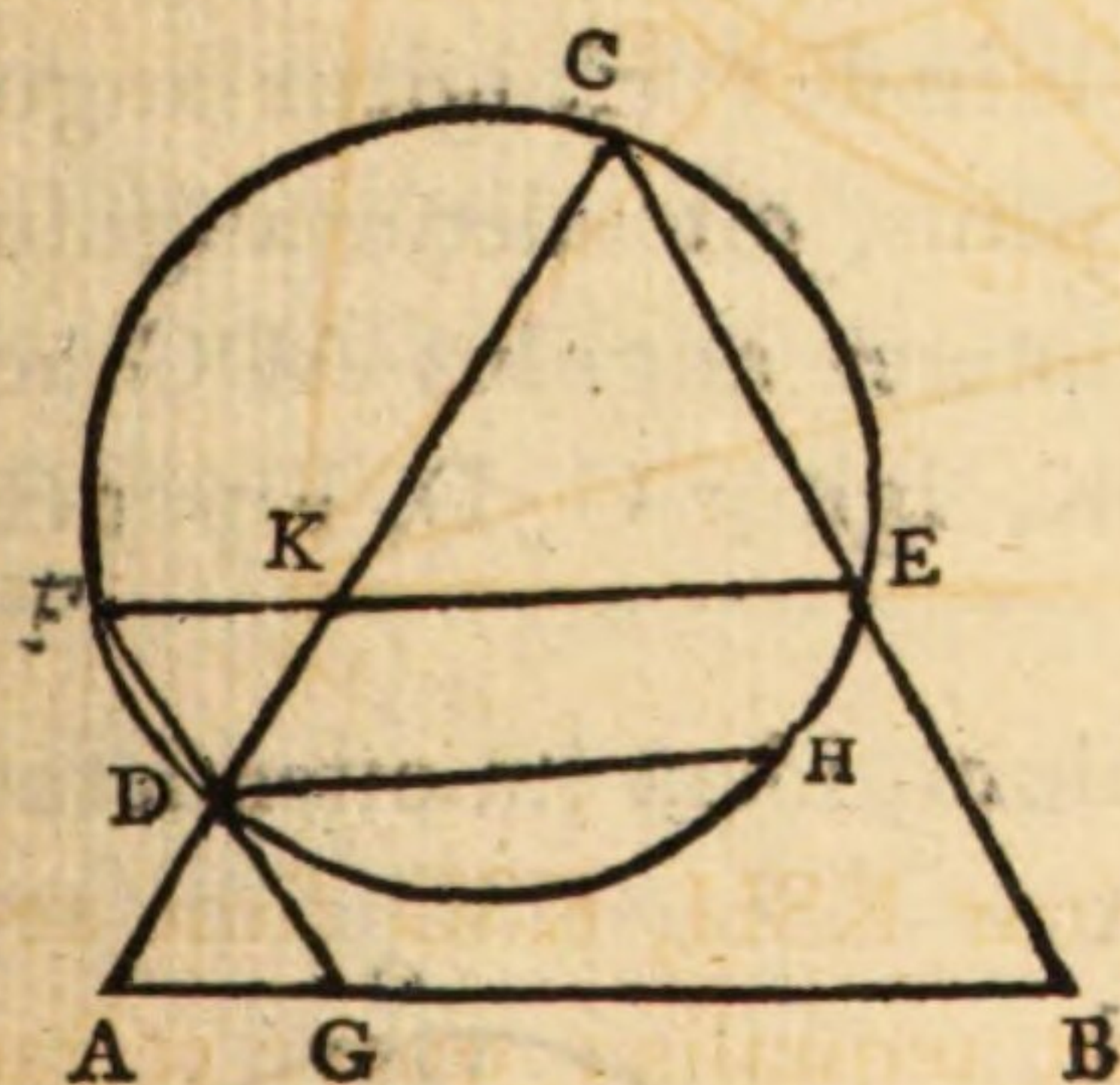
Vid. figg. 2. 3. Caf. 2. Prop. 57.

P R O P. LV.

- “ SI a duobus punctis A, B inflectantur ad circumferentiam
 “ circuli CDE rectae AC, BC eidem rursus in punctis D, E

“ occurrentes, et ab alterutro eorum E ducatur recta EF pa-
 “ rallela junctae AB, occurratque circumferentiae rursus in
 “ F, et juncta DF rectae AB occurrat in G; erit rectangulum
 “ BA, AG aequale rectangulo CA, AD. Et contra, si in recta
 “ AB fumatur punctum G faciens rectangulum BA, AG ae-
 “ quale ipsi CA, AD, et juncta GD circumferentiae rursus
 “ occurrat in F; juncta FE parallela erit rectae AB.”

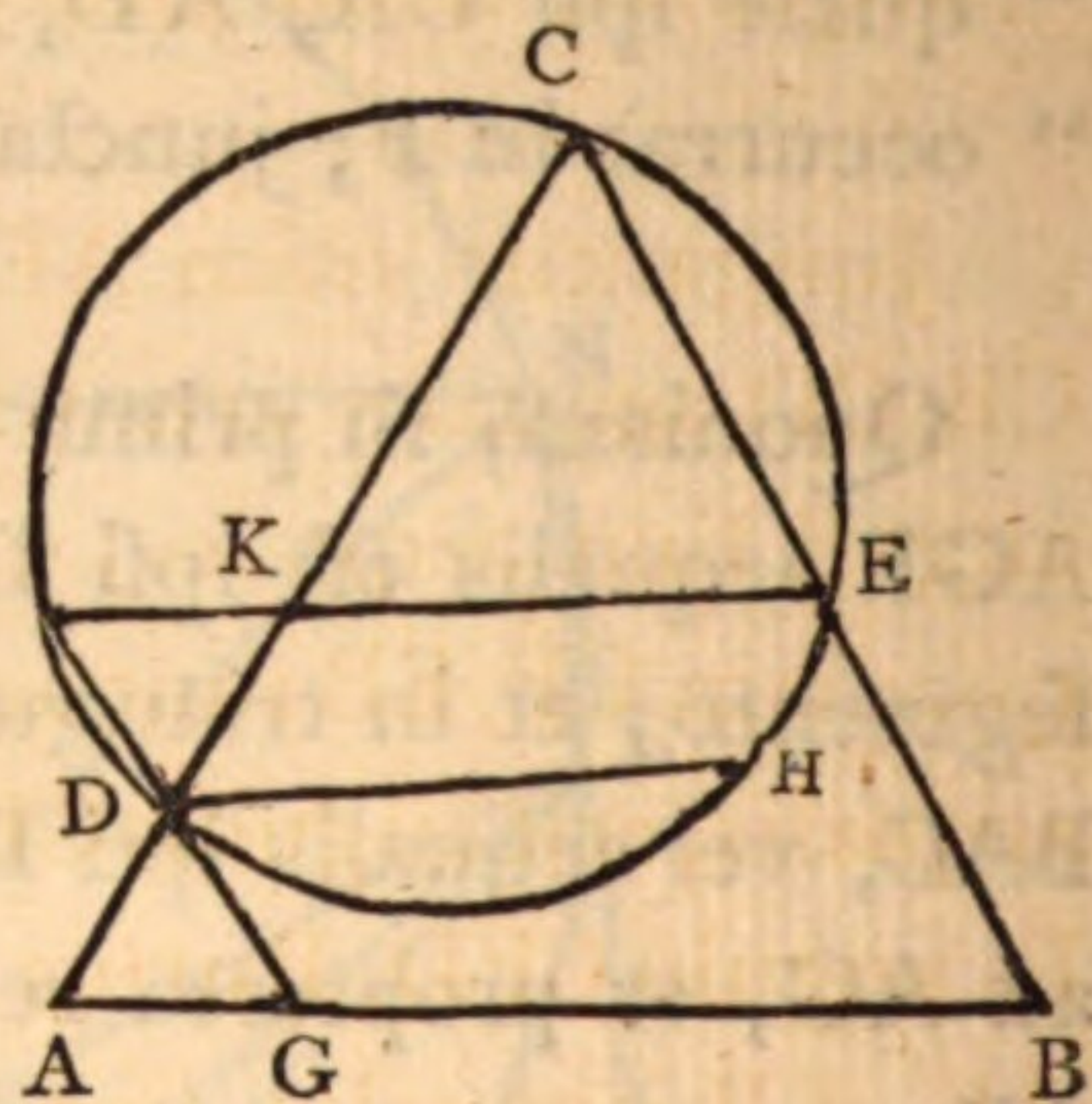
Quoniam, in prima parte, parallelae sunt AB, FE angulus AGF aequalis est ipsi DFE, hoc est angulo DCE, in eodem segmento; et in triangulis ACB, AGD communis est angulus BAC, vel aequalis ipsi DAG. Est igitur ^a BA ad AC, ut AD ^a 4. 6. ad AG, et propterea rectangulum BA, AG aequale ipsi CA, AD.



Et quoniam, in secunda parte, rectangulum BA, AG aequale ponitur ipsi CA, AD, erit BA ad AC, ut AD ad AG; angulus igitur ^b AGD aequalis est angulo ACB five DCE, hoc ^b 6. 6. est ipsi DFE in eodem segmento. Quare recta FE parallela est ipsi AB.

COR. Et in casu in quo AB est extra circulum, si rectangulum BA, AG aequale fuerit ipsi CA, AD, et recta EF parallela sit ipsi AB; in recta linea erunt G, D, F.

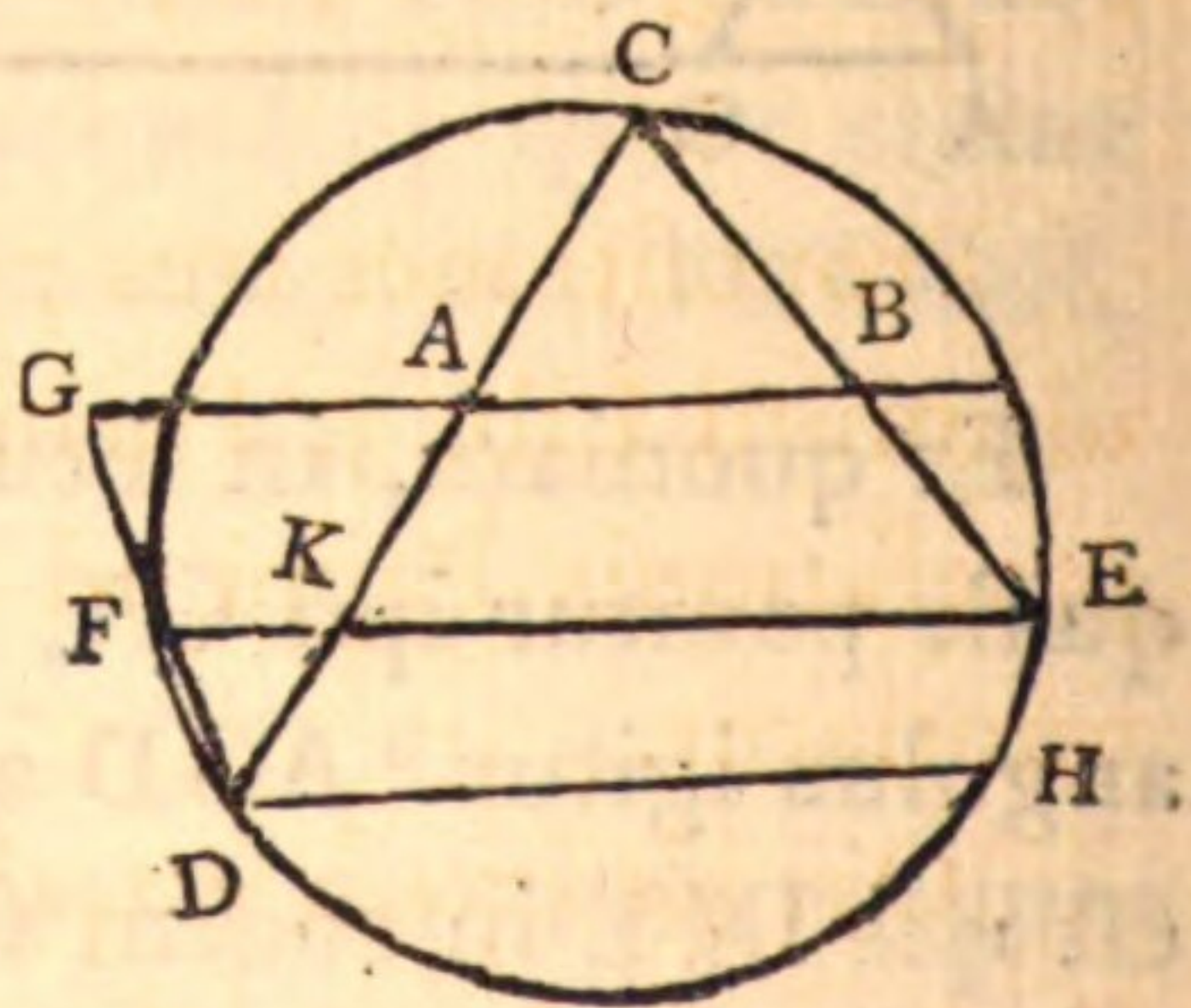
Ducatur enim DH parallela ipsi AB, erit igitur angulus AGD aequalis ipsi GDH. Quoniam vero rectangulum BA, AG est aequale ipsi CA, AD, erit angulus AGD aequalis angulo ACB five DCE, hoc est angulo DFE. Angulus igitur GDH est aequalis ipsi DFE. Angulus autem DFE una cum ipso FDH aequalis est duobus rectis, quia parallelae sunt DH, FE; quare et angulus GDH una cum ipso FDH aequalis est duobus rectis, et propterea puncta G, D, F sunt in recta linea. 14. I.



Potius ita, Occurrat AD rectae FE in K; est igitur angulus GAD aequalis ipsi DKF, et, ut prius, ostendetur angulus AGD aequalis angulo DFK; et propterea angulus ADG aequalis est ipsi FDK, et recta est ADK, igitur G, D, F puncta sunt in recta linea.

In casu in quo AB est intra circulum, idem ita ostendetur,

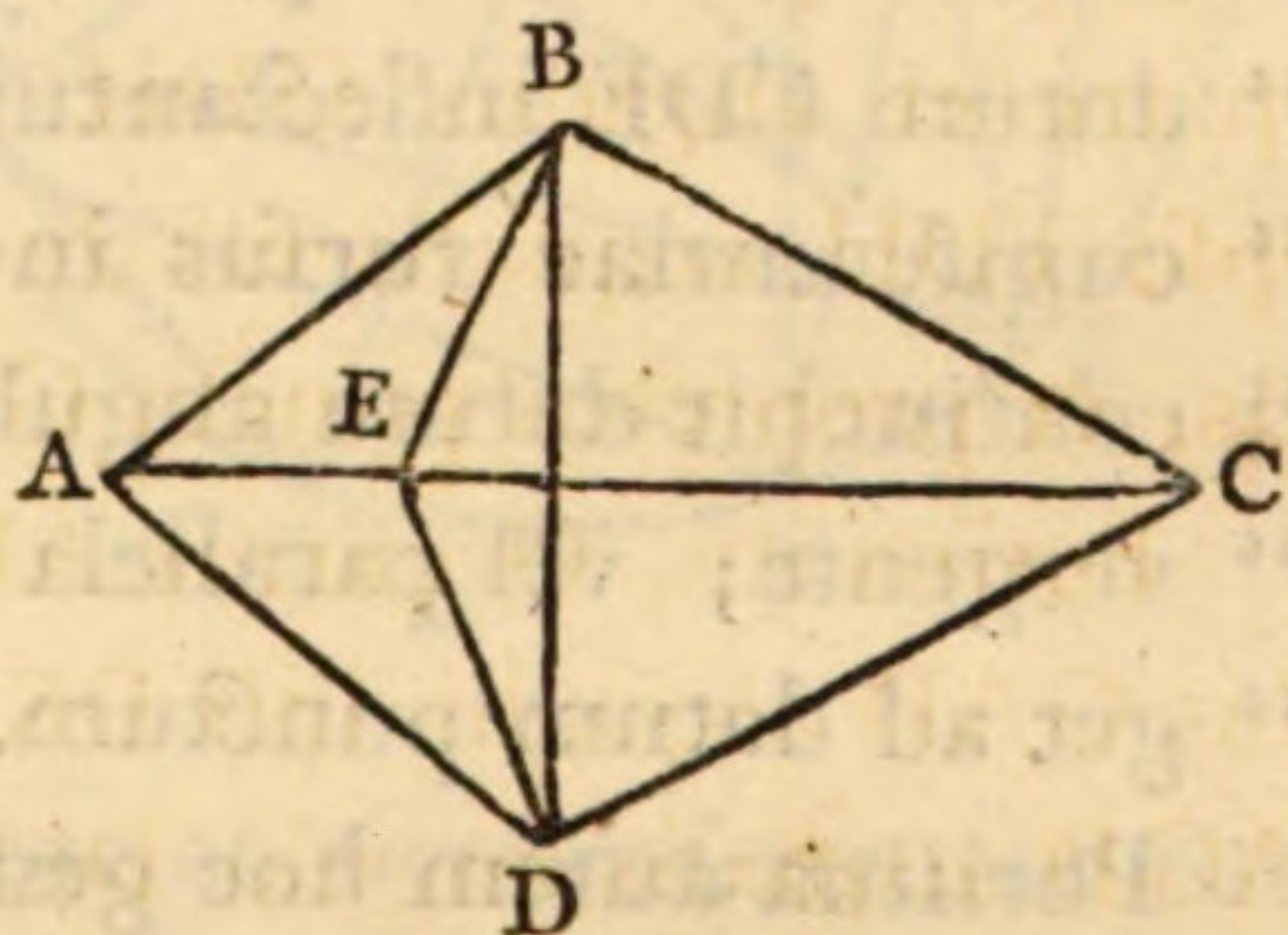
Occurrat DC rectae FE in K, et quoniam est BA ad AC, ut EK ad KC; ut vero BA ad AC, ita est AD ad AG ex hypothesis, et ut EK ad KC, ita, propter circulum, est KD ad KF; igitur ut AD ad AG, ita est KD ad KF, et parallelae sunt AG, KF, in recta linea igitur sunt puncta D, F, G.



P R O P. LVI.

“SIT figura quadrilatera ABCD cujus duo latera adjacentia
 “AB, AD sunt inter se aequalia, ut et reliqua CB, CD inter se
 “aequalia; si ducantur BE, DE facientes angulos CBE, CDE
 “aequales, erunt puncta A, E, C in recta linea.”

Jungantur enim AE, CE, BD, et quoniam aequales sunt CB, CD aequales erunt anguli CBD, CDB, quare et EBD, EDB anguli sunt aequales; est igitur recta BE aequalis ipsi ED. Et quoniam CE, EB sunt aequales ipsis CE, ED et basis CB basi CD aequalis, erit angulus CEB aequalis angulo CED. Rursus quoniam AE, EB aequales sunt ipsis AE, ED, et basis AB basi AD aequalis, erit angulus AEB angulo AED aequalis. Igitur AEB, BEC simul aequales sunt angulis AED, DEC simul; et omnes quatuor conficiunt quatuor rectos, quare ipsorum dimidium, angulus scilicet AEB una cum ipso BEC, aequalis est duobus rectis; puncta igitur A, E, C sunt in recta linea.



Propositiones tres praecedentes Lemmata sunt ad Porisma ultimum Lib. 3. Porismatum Euclidis, quod in textu Graeco praefationis Pappi ad Librum suum 7. verbis sequentibus enuntiatur.

“Οτι ἢδε ἦτοι ἐν παραθέσι ἔσαι, ἢ μετὰ τινος εὐθείας ἐπὶ τὸ δοθὲν
 “σημεῖον” νεύσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν.

Quod recta haec vel erit parallela positione datae, vel cum quadam recta ad datum "punctum" vergente datum continebit angulum.

Postquam Porisma in Prop. 49. Dom. Matthaeo Stewart ostendissem, rogavi ut explicationem hujus tentaret, quod de duabus rectis a punctis datis ad circumferentiam circuli positione dati inflexis intelligendum esse suspicari me dicebam. Post breve tempus scripsit mihi se hoc verum esse invenisse, et Porismatis constructionem indicavit. Magis autem explicite et generaliter Porisma ita ut sequitur enuntiari potest. Vid. figg. Pr. 57.

" SI a duobus punctis datis A, B ad circulum positione
" datum CDE inflectantur utcunque duae rectae AC, BC cir-
" cumferentiae rursus in D, E occurrentes; juncta DE vel
" continebit datum angulum cum recta ad datum punctum
" vergente; vel parallela erit rectae positione datae, vel ver-
" get ad datum punctum."

Porisma autem hoc generale in alia tria dividitur, quorum investigationem ut sequitur in sequentibus Propositionibus 57. 58. 59. confeci.

P R O P. LVII.

Quae est Pars prima praecedentis,

" QUANDO scilicet recta quae jungit intersectiones inflexa-
" rum et circumferentiae datum continet angulum cum recta
" quae ad datum punctum vergit."

CAS. I. Quando puncta A, B sunt in recta quae transit per centrum circuli.

Data sint puncta A, B, et sit circulus CDE positione datus; et inflexis utcunque rectis AC, BC ad circumferentiam, ei rursus in D, E occurrentibus, junctaque DE, puta Porisma verum esse, rectam scilicet DE datum continere angulum cum recta quae ad datum punctum vergit, et hoc vel ad intersec-

tionem ipsius

DE et rectae

AC, vel ad in-

tersectionem

rectae DE et

ipsius BC; pu-

ta ad D inter-

sectionem ip-

sarum ED,

AC; et puta F

punctum esse

quod inveni-

endum est, junctaque DF producat et circumferentiae rur-

sus occurrat in G; datus igitur, ex hypothese, est angulus

EDF, ut et angulus qui ipsi deinceps est. A puncto C ad AB

perpendicularis ducatur CH, et ad punctum H in quo rur-

sus circumferentiae occurrit, inflectantur AH, BH quae ei-

dem rursus occurrant in K, L, et jungantur LK, KF; igitur,

rursus ex hypothese, datus est angulus LKF qui propterea ae-

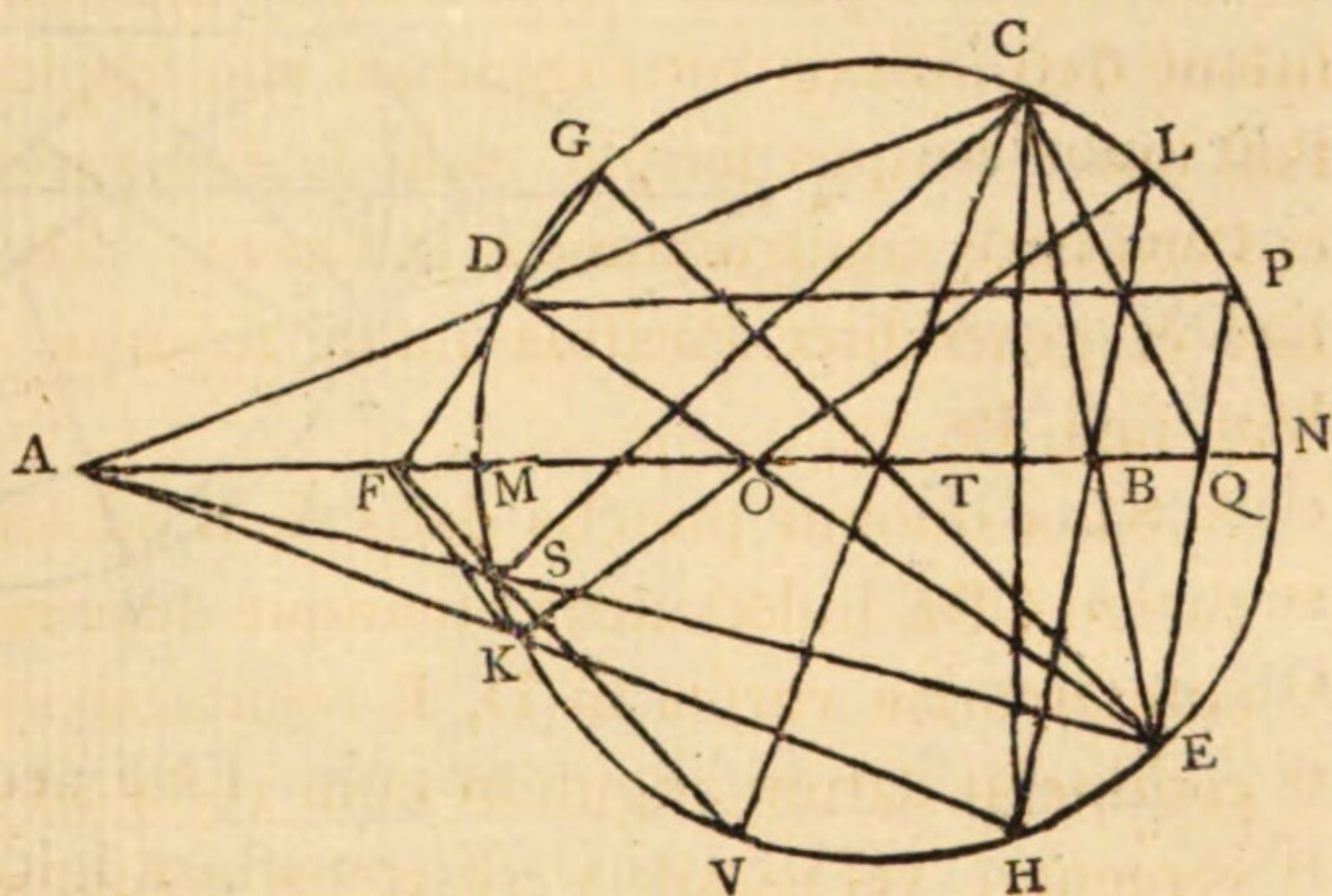
qualis est ipsi EDF. Occurrat AB circumferentiae in M, N, et

ED, LK sibi mutuo occurrant in O; et quoniam CH perpen-

dicularis est ad diametrum MN, erit ^a recta AC aequalis ipsi ^a 4. 1.

AH, igitur circumferentiae DC, KH quas abscindunt sunt inter

se aequales ^b, et aequales sunt CM, MH, igitur et circumferen- ^b Pr. 52.

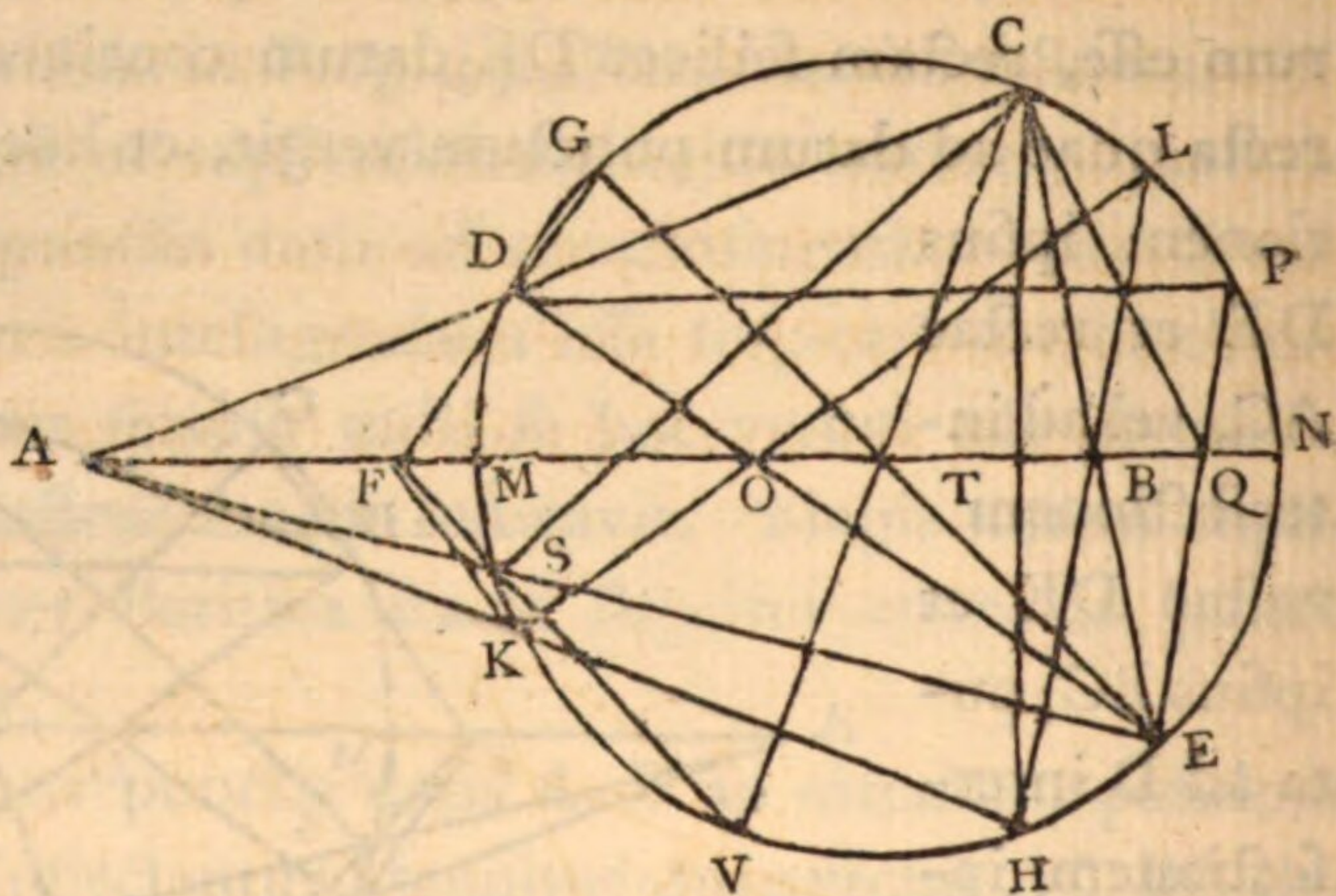


O o o

tiae DM, MK sunt aequales. Similiter quoniam aequales sunt rectae BC, BH, circumferentiae LN, NE aequales ostendentur; punctum igitur O intersectio ipsarum ED, LK est in diametro MN.

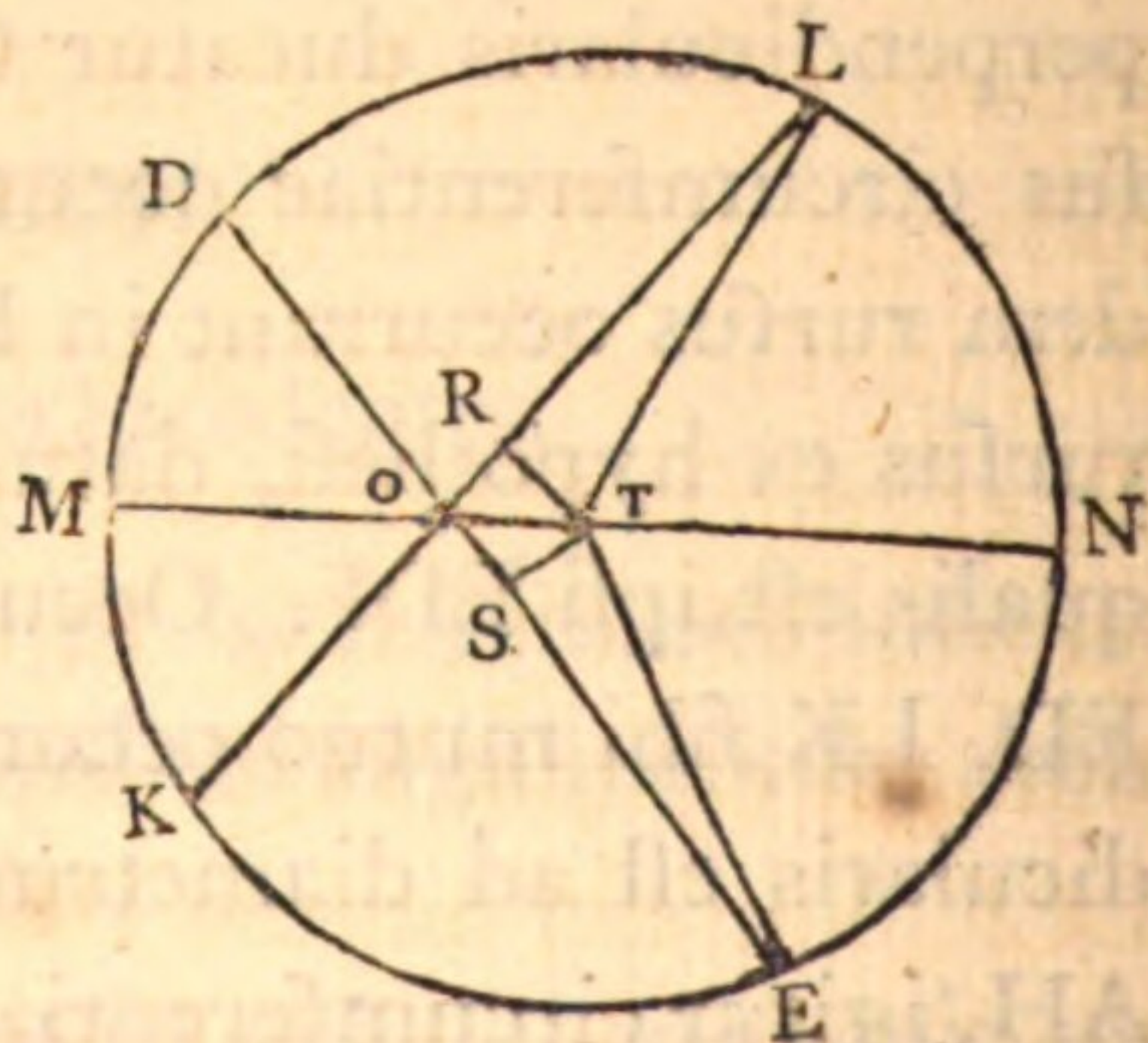
* Et quoniam circumferentia DM aequalis est ipsi MK, erit recta OD aequalis ipsi OK, et est rec-

ta AD aequalis ipsi AK, et angulus EDF aequalis est angulo LKF, quare et ODF ipsi OKF; punctum igitur ^cF est in recta

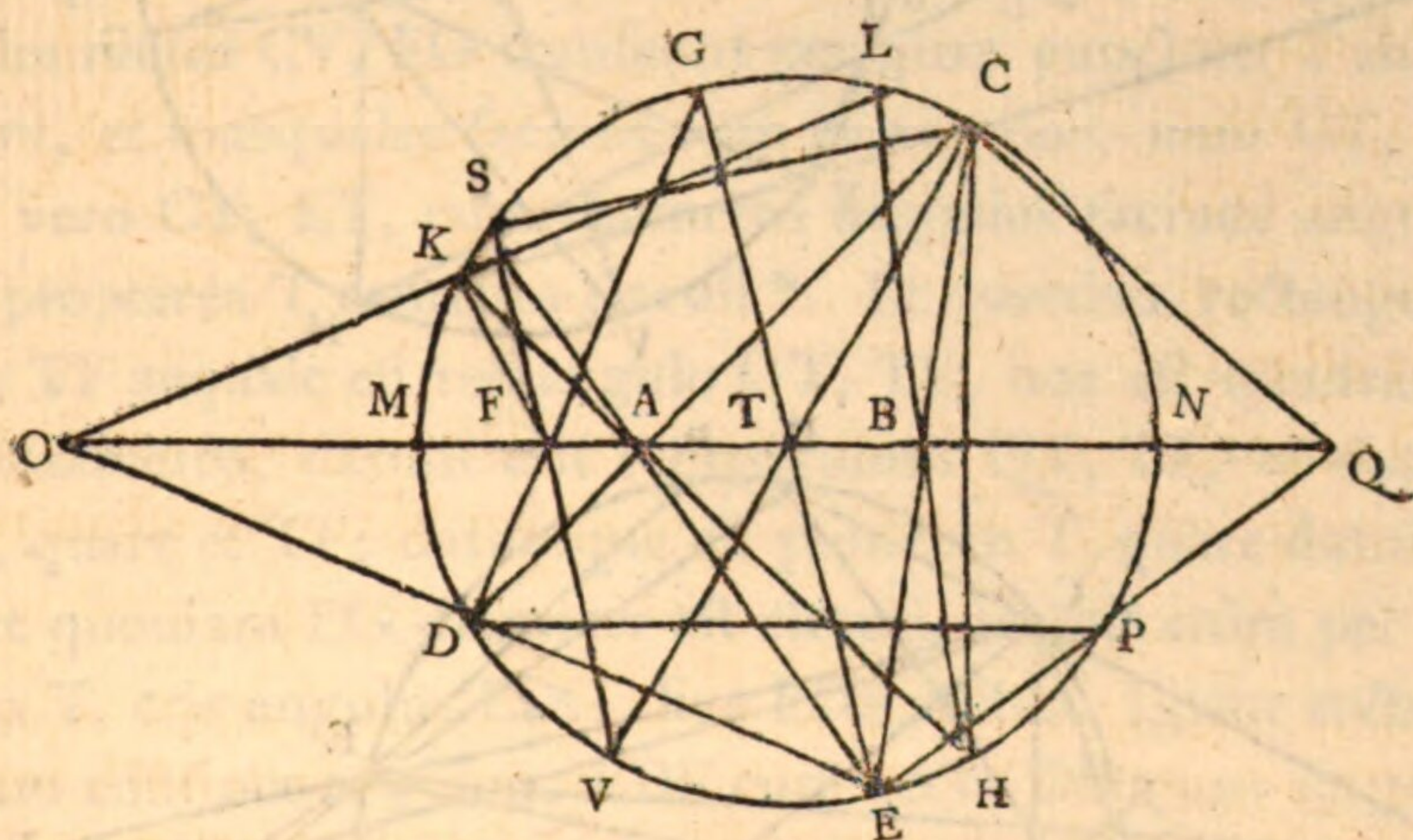


* Hoc ita ostenditur,

Quoniam circumferentiae MLN, MEN sunt aequales, additis aequalibus MK, MD, et aequalibus LN, EN ablatis, erit circumferentia KML aequalis ipsi DME, aequales igitur sunt rectae KL, DE; ducantur ad ipsas a centro T perpendiculares TR, TS, et, junctâ TO, quoniam aequales sunt TR, TS [14. 3.] erunt et OR, OS aequales [47. 1.] quare et OL, OE sunt aequales; et junctis TL, TE, erunt et anguli OTL, OTE aequales, et aequales sunt anguli LTN, ETN, igitur anguli OTL, LTN simul aequales sunt ipsis OTE, ETN; et omnes quatuor aequales sunt quatuor rectis angulis, igitur OTL, LTN ipsorum dimidium aequales sunt duobus rectis, et propterea O, T, N puncta sunt in recta linea, et punctum O erit in diametro TN.

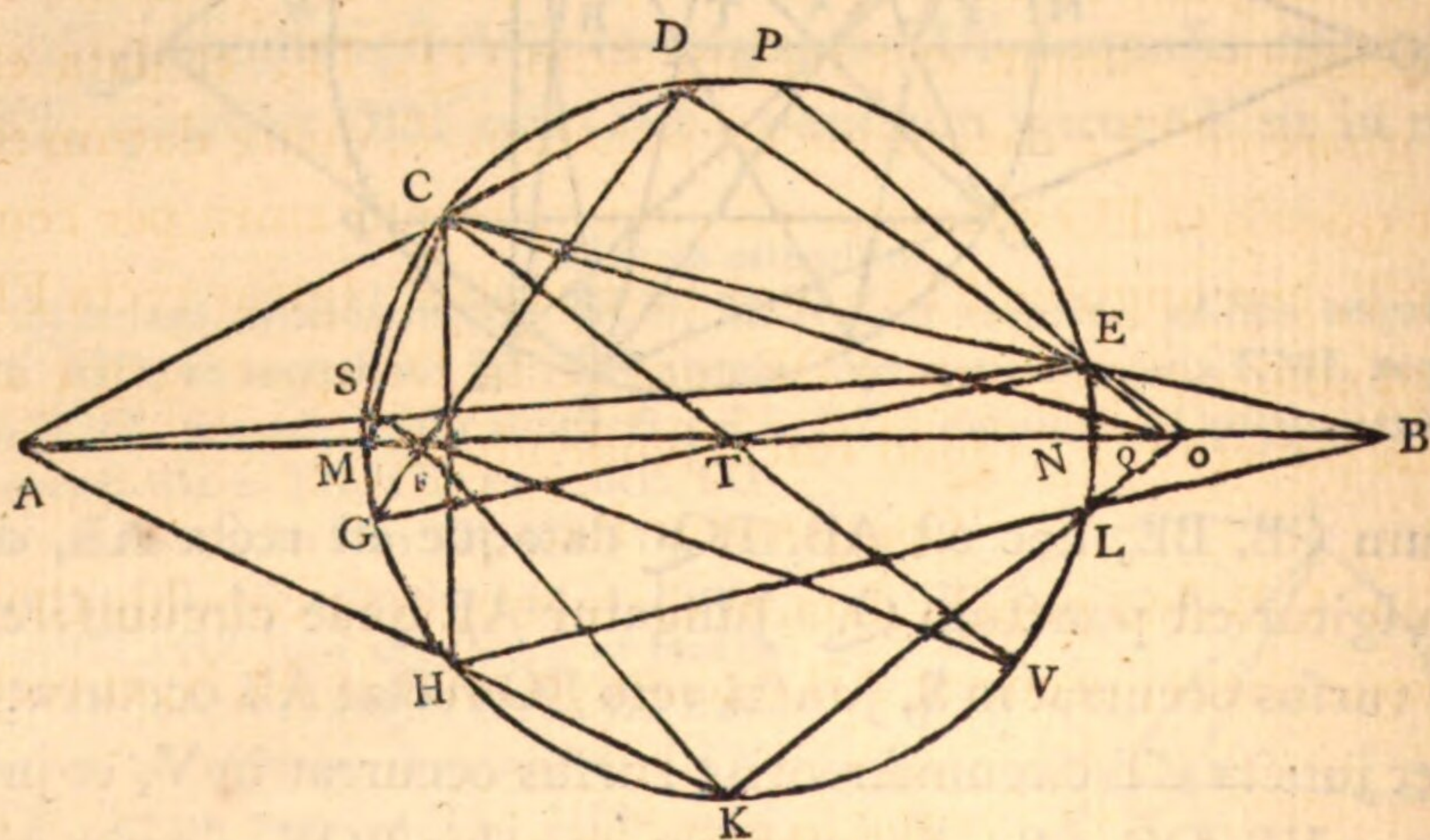
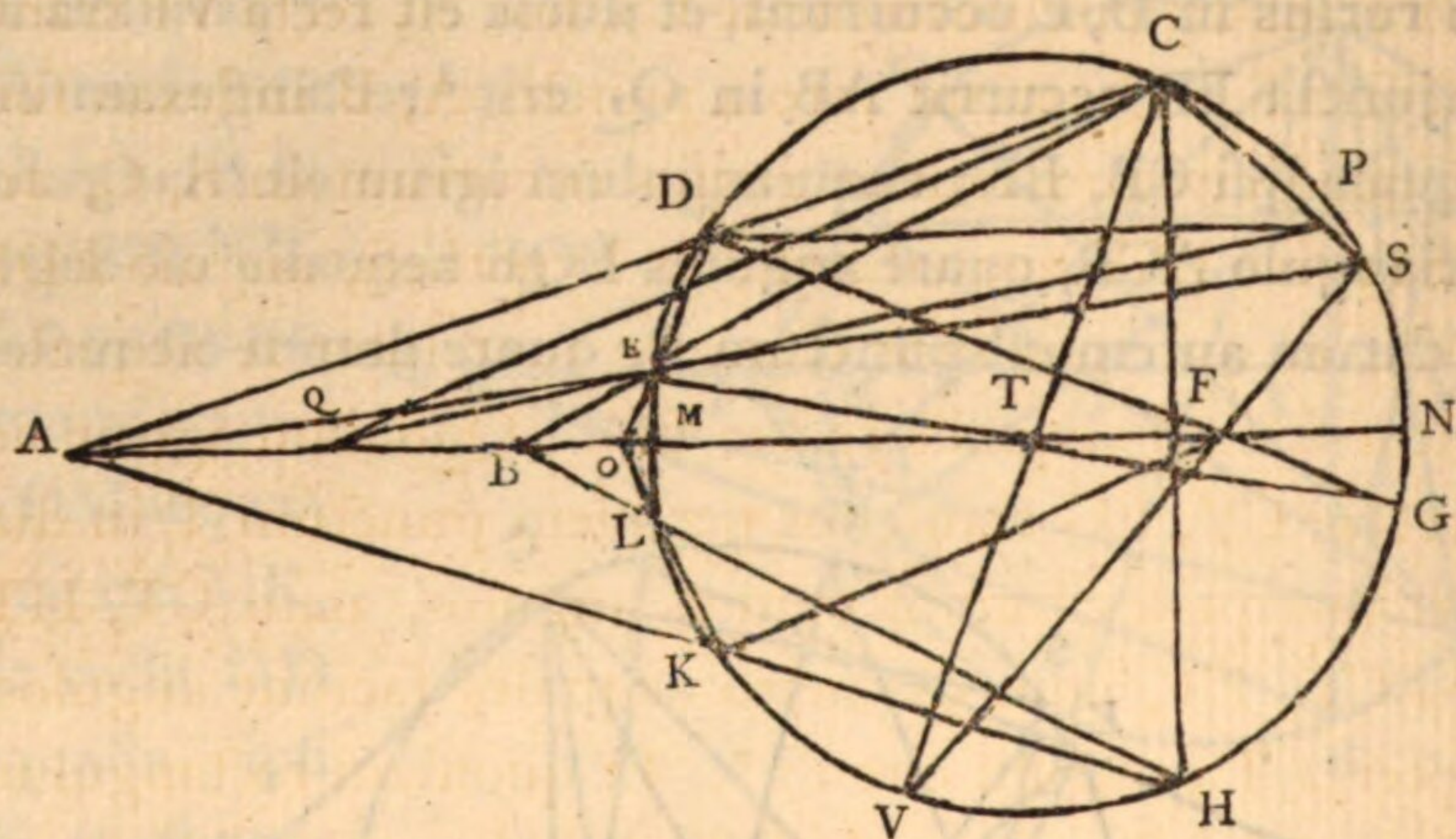


AO five AB. Ducatur DP parallela ipsi AB, occurratque circumferentiae rursus in P, et juncta EP ipsi AB occurrat in Q; et quoniam inflexae sunt AC, BC ad circumferentiam in C quae ei rursus in D, E occurrunt, et ducta est DP parallela ipsi AB, et juncta EP occurrat AB in Q, erit ^d rectangulum AB, ^d Pr. 55. BQ aequale ipsi CB, BE; aequiangulum igitur est triangulum BQE triangulo ACB, quare angulus BQE aequalis est angulo ACB; datum autem est punctum B, quare datum est rectan-



gulum CB, BE, hoc est AB, BQ, dataque est recta AB, datum igitur est punctum Q. Jungatur AE quae circumferentiae rursus occurrat in S, juncta vero EG rectae AB occurrat in T, et juncta CT circumferentiae rursus occurrat in V, et jungantur VF, QC, CS. Et quoniam angulus BQE, five in quibusdam casibus TQE aequalis ostensus est (angulo ACB, five DCE, hoc est) angulo DGE in eodem segmento, et est angulus ETQ aequalis ipsi FTG, erit triangulum QTE aequiangulum ipsi GTF; rectangulum igitur QT, TF aequale est rect-

° 35. 3. angulo (GT, TE, hoc est ° rectangulo) CT, TV; igitur angulus CQT aequalis est ipsi TVF. Quoniam vero rectangulum AB, BQ aequale ostensum est ipsi CB, BE, erit triangu-



lum QBC aequiangulum ipsi EBA, quare angulus BQC, vel CQT aequalis est ipsi BEA, vel CEA; ostensus autem est angulus CQT aequalis angulo TVF; aequalis igitur est angulus BEA, five in quibusdam casibus CES, angulo TVF, quare ae-

qualibus insistant circumferentiis; angulus autem BEA, five CES insitit circumferentiae CS, et angulus TVF, five CVF terminum communem C habet cum angulo CES; igitur angulus CVF insitit circumferentiae CS, hoc est recta VF transit per punctum S. Quoniam vero a punctis A, B inflexae sunt AE, BE quae circumferentiae rursus occurrunt in S, C, angulus CSF, five CSV aequalis est, ex hypothese, angulo EDF, five EDG, et qui ipsis sunt deinceps sunt inter se aequales, recta igitur CV est aequalis rectae EG. Quoniam igitur aequales rectae CV, EG transeunt per idem punctum T in diametro, et inaequales faciunt cum ea angulos, nam CT, HT, non vero CT, ET, cum diametro aequales faciunt angulos; erit propterea T centrum circuli *. Et quoniam rectangulum QT, TF aequale est rectangulo GT, TE, hoc est quadrato ex semidiametro, datum erit rectangulum QT, TF, et data est QT, quare et TF; datumque est punctum T, quare datum est F; et quoniam EG diameter est circuli, transit enim per centrum T, erit angulus EDG, five EDF rectus. Igitur recta ED datum continet angulum EDF cum recta DF quae vergit ad datum punctum F. Quod fuit ostendendum.

Componetur ita.

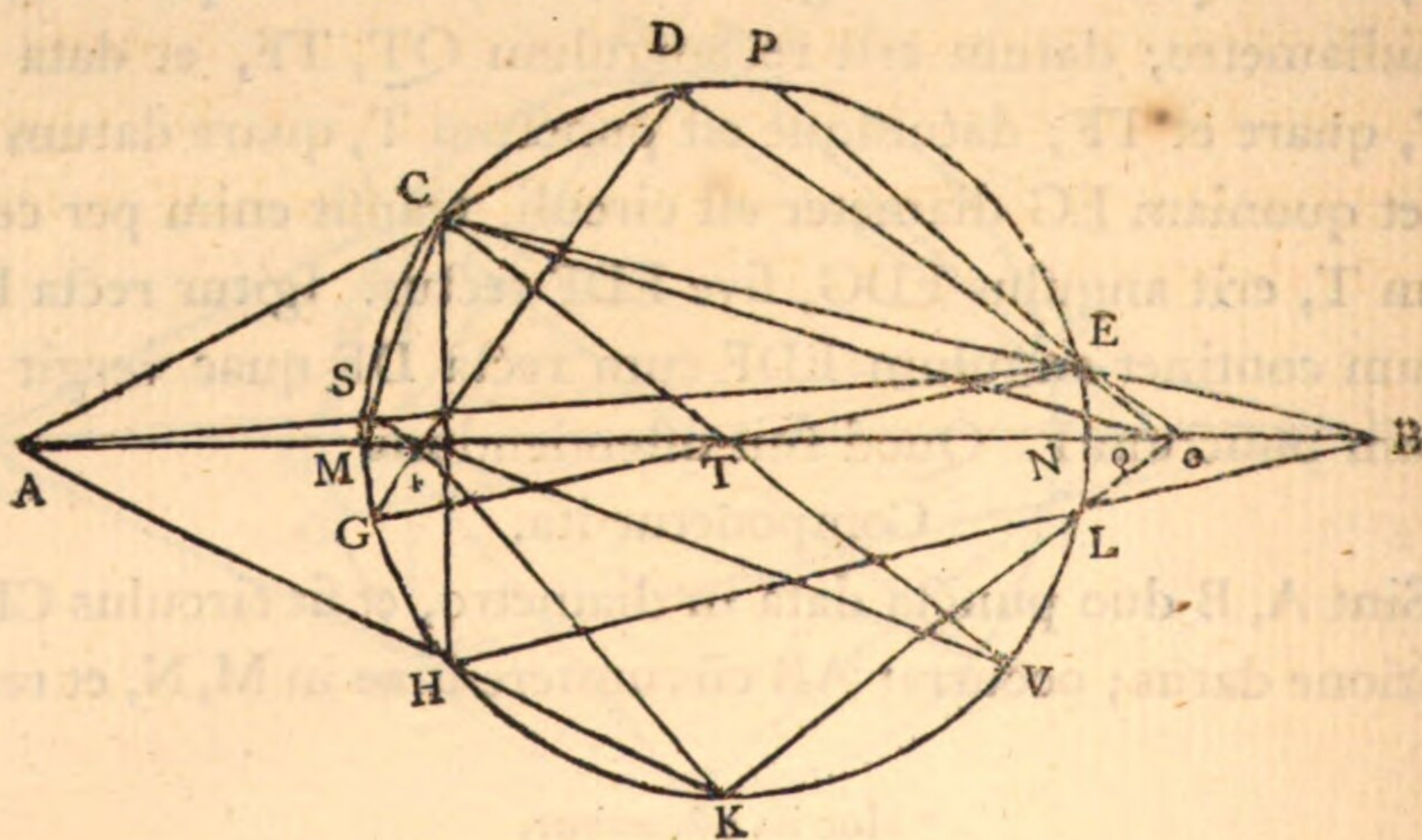
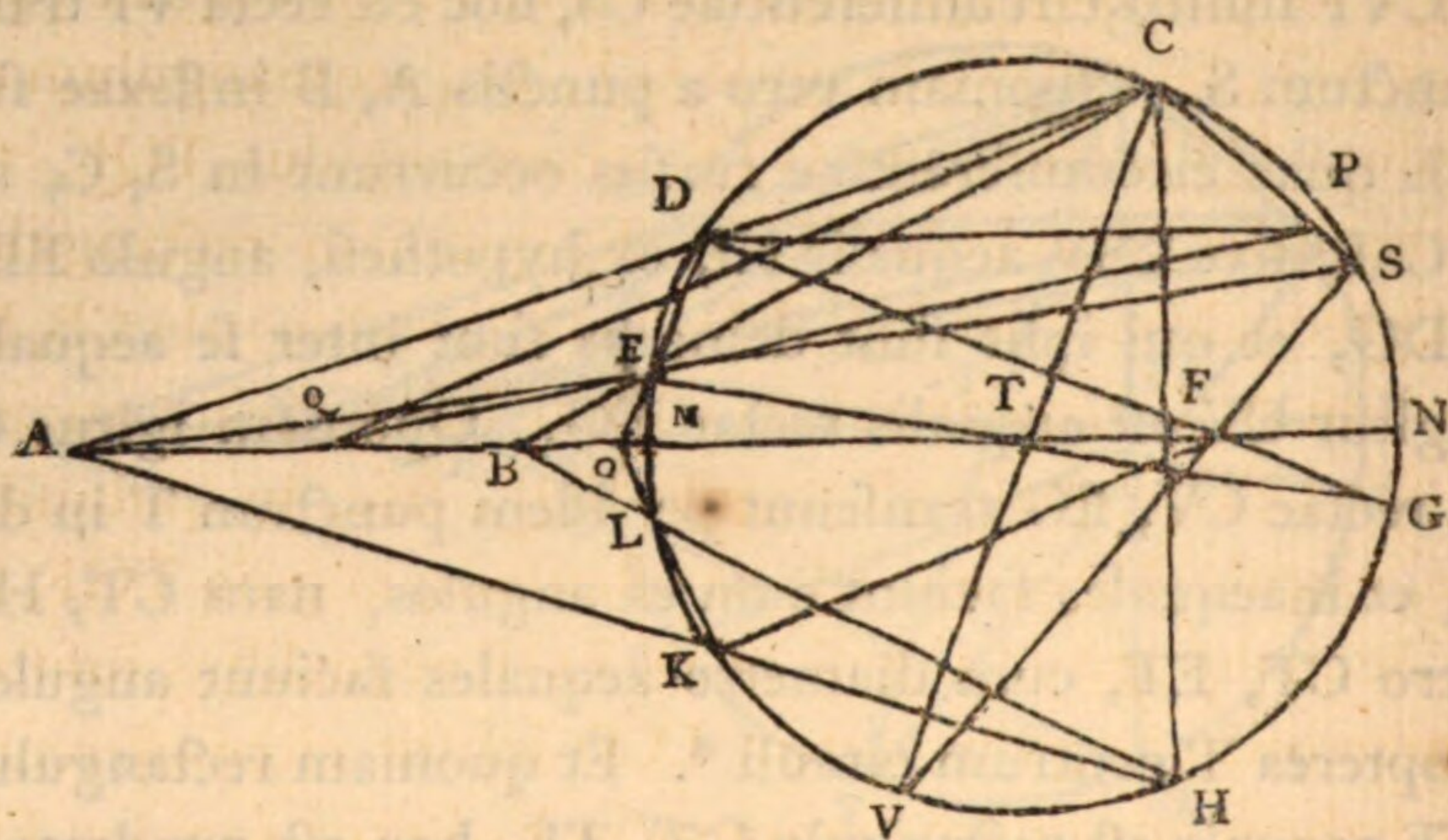
Sint A, B duo puncta data in diametro, et sit circulus CDE positione datus; occurrat AB circumferentiae in M, N, et rect-

* Hoc ita ostenditur,

Si duae rectae aequales in circulo transeunt per idem punctum in diametro quod non est centrum, aequales facient cum diametro angulos, ut facile ostendi potest, ducendo a centro perpendiculares ad aequales rectas. Et propterea, si duae rectae aequales quae transeunt per idem punctum in diametro inaequales faciunt angulos cum ea, punctum per quod transeunt erit centrum circuli.

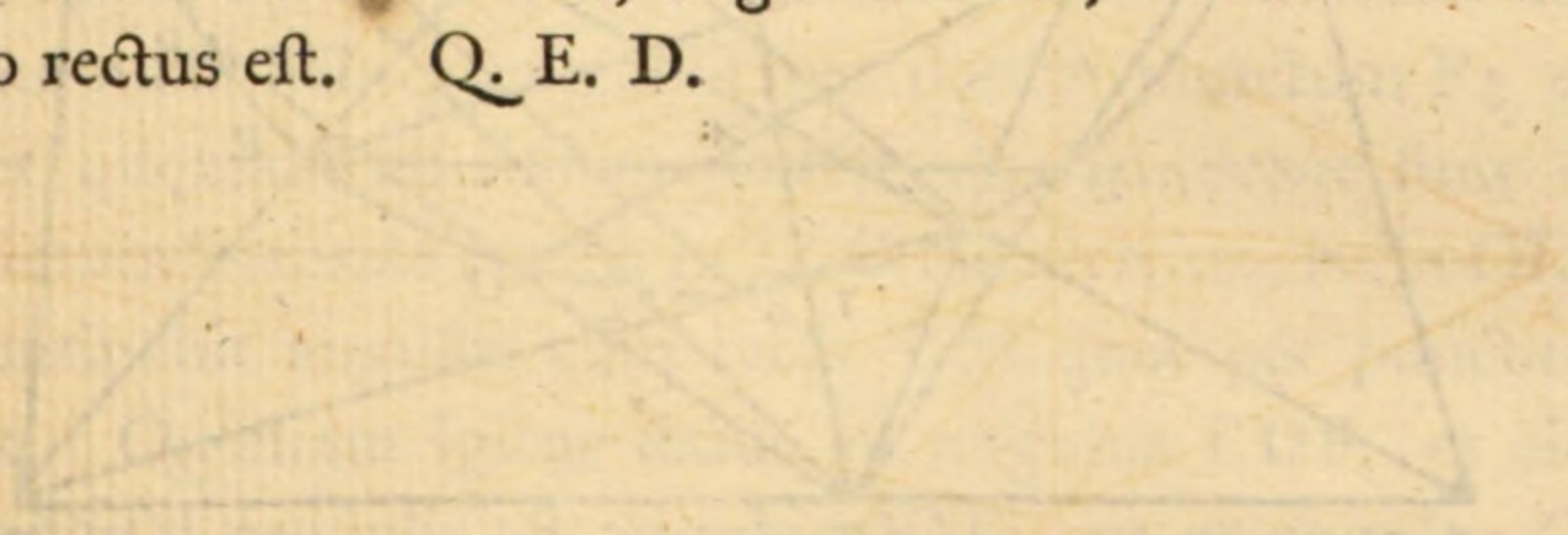
angulo NB, BM aequale fiat AB, BQ, et ponatur punctum Q ita ut puncta A, Q sint ad easdem vel contrarias partes puncti B, prout puncta M, N sunt ad easdem vel contrarias partes e-

Vide etiam
figg. 1. 2.
Cas. hujus.



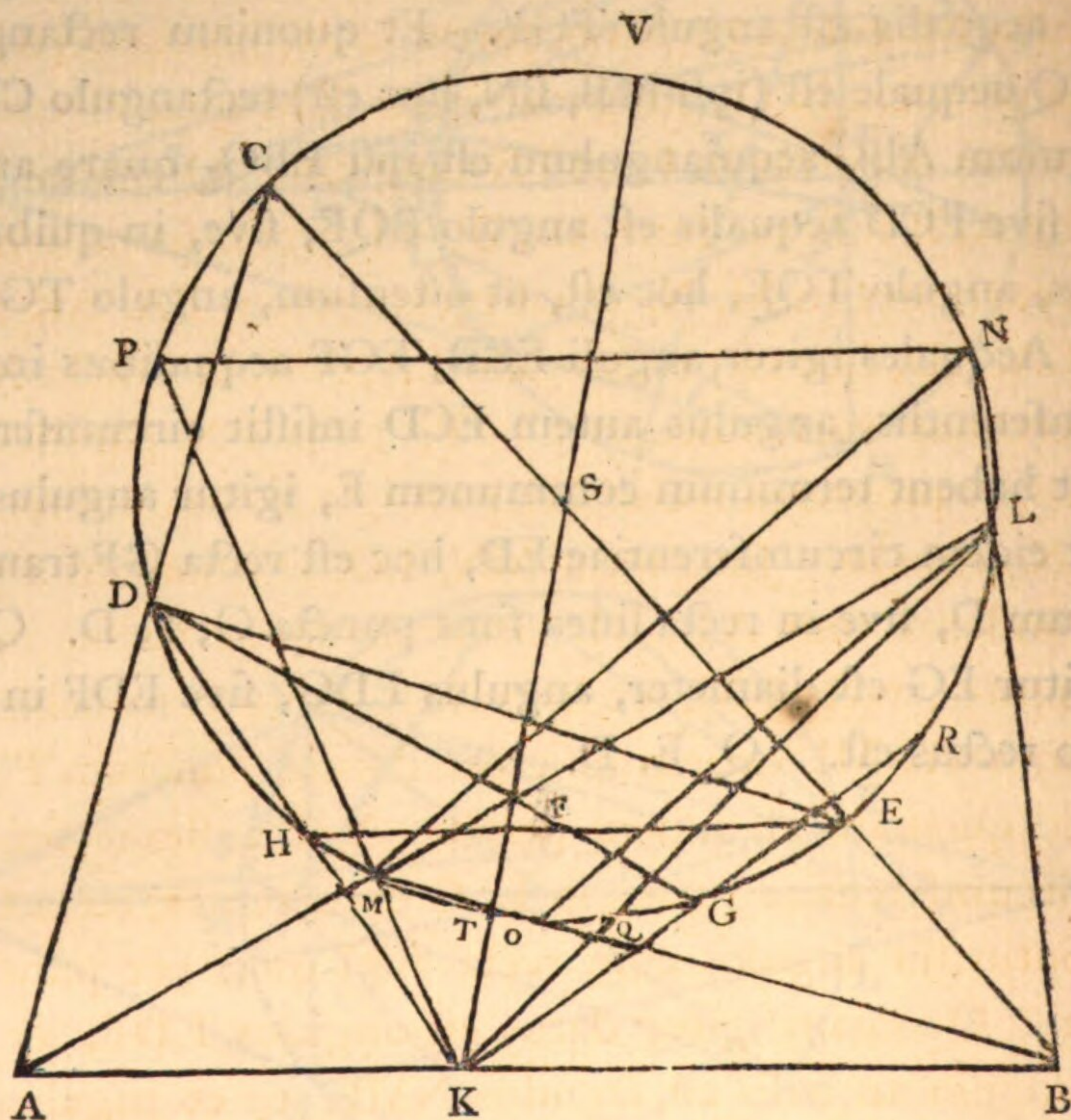
jusdem puncti B. Sit T centrum circuli quod, ex hypothefi, est in recta AB, et quadrato ex MT aequale fiat rectangulum QT, TE, et ponatur punctum F ad contrarias partes centri T ad quas est Q. Si a punctis A, B inflectantur utcunque ad

circumferentiam rectae AC, BC quae ei rursus in D, E occurrant, et jungantur ED, DF, rectus erit angulus EDF. Juncta enim ET occurrat circumferentiae rursus in G, et jungantur GF, QE. Et quoniam rectangulum QT, TF est aequale (quadrato ex MT, hoc est) rectangulo GT, TE, aequiangulum erit triangulum QTE triangulo GTF, quare angulus TQE, five BQE, aequalis est angulo TGF. Et quoniam rectangulum AB, BQ aequale est (ipfi MB, BN, hoc est) rectangulo CB, BE, triangulum ABC aequiangulum est ipfi EBQ, quare angulus BCA, five ECD aequalis est angulo BQE, five, in quibusdam casibus, angulo TQE, hoc est, ut ostensum, angulo TGF, five EGF. Aequales igitur anguli ECD, EGF aequalibus insistant circumferentiis, angulus autem ECD insistit circumferentiae ED, et habent terminum communem E, igitur angulus EGF insistit eidem circumferentiae ED, hoc est recta GF transit per punctum D, five in recta linea sunt puncta G, F, D. Quoniam igitur EG est diameter, angulus EDG, five EDF in semicirculo rectus est. Q. E. D.



CAS. 2. Quando data puncta A, B non sunt in recta quae tranfit per centrum circuli, reliquis ut in praecedente mantentibus.

Inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae AC, BC a datis punctis A, B, occurrantque ipsi rursus in D, E; fit F



punctum quod inveniendum est, et juncta DF circumferentiae occurrat rursus in G. Juncta igitur ED, datus erit, ex hypothesis, angulus EDF, ut et angulus qui ipsi est deinceps. Per punctum E ducatur EH parallela ipsi AB, occurratque circumferentiae rursus in H, et juncta DH rectae AB occurrat

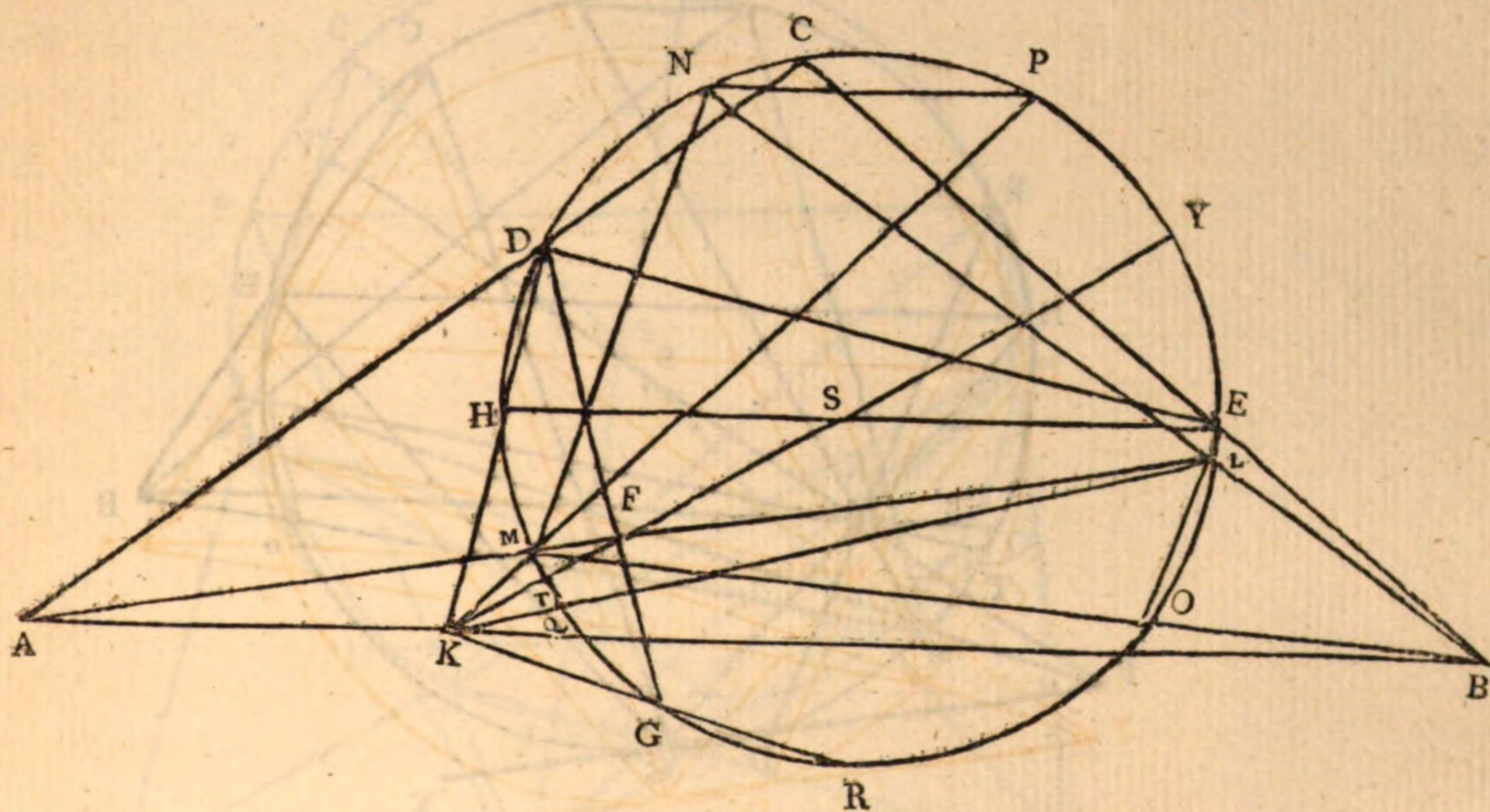
in K. Quoniam igitur inflexae sunt AC, BC ad circumferentiam ei rursus occurrentes in D, E, et ducta est EH parallela ipsi AB, et juncta DH occurrit eidem AB in K, erit rectangulum BA, AK aequale dato rectangulo CA, AD. Et data est AB positione et magnitudine, quare datum est punctum K. ^a Pr. 55.

Jungatur AF occurratque circumferentiae in punctis L, M, et juncta BL eidem rursus occurrat in N, juncta vero BM ipsi rursus occurrat in O; jungatur etiam KM quae circumferentiae rursus occurrat in P, et PN jungatur. Quoniam igitur a punctis A, B inflexae sunt AL, BL ad circumferentiam ei rursus occurrentes in M, N, et est rectangulum BA, AK aequale (ipsi CA, AD, hoc est) rectangulo LA, AM, et juncta KM circumferentiae rursus occurrit in P, recta PN parallela erit ^a ipsi AB, et propterea rectae HE; est igitur circumferentia HP ipsi EN aequalis. Jungantur MN, LO, et quoniam a punctis A, B inflexae sunt AL, BL circumferentiae rursus in M, N occurrentes, recta NM, ex hypothese, datos continebit angulos cum recta ML quae transit per datum punctum F; et similiter quoniam ab iisdem punctis A, B inflexae sunt AM, BM circumferentiae rursus in L, O occurrentes, recta OL datos continebit angulos cum recta LM quae per punctum F transit. Quoniam igitur datus est angulus EDF, et eidem dato angulo aequalis est angulus NMF, ut et angulus OLF, erunt tres circumferentiae GE, LN, MO, quibus insistant, inter se aequales.

In casu autem in quo recta AB circulo occurrit, si punctum D, vel M, vel L fuerit in segmento minore a recta AB

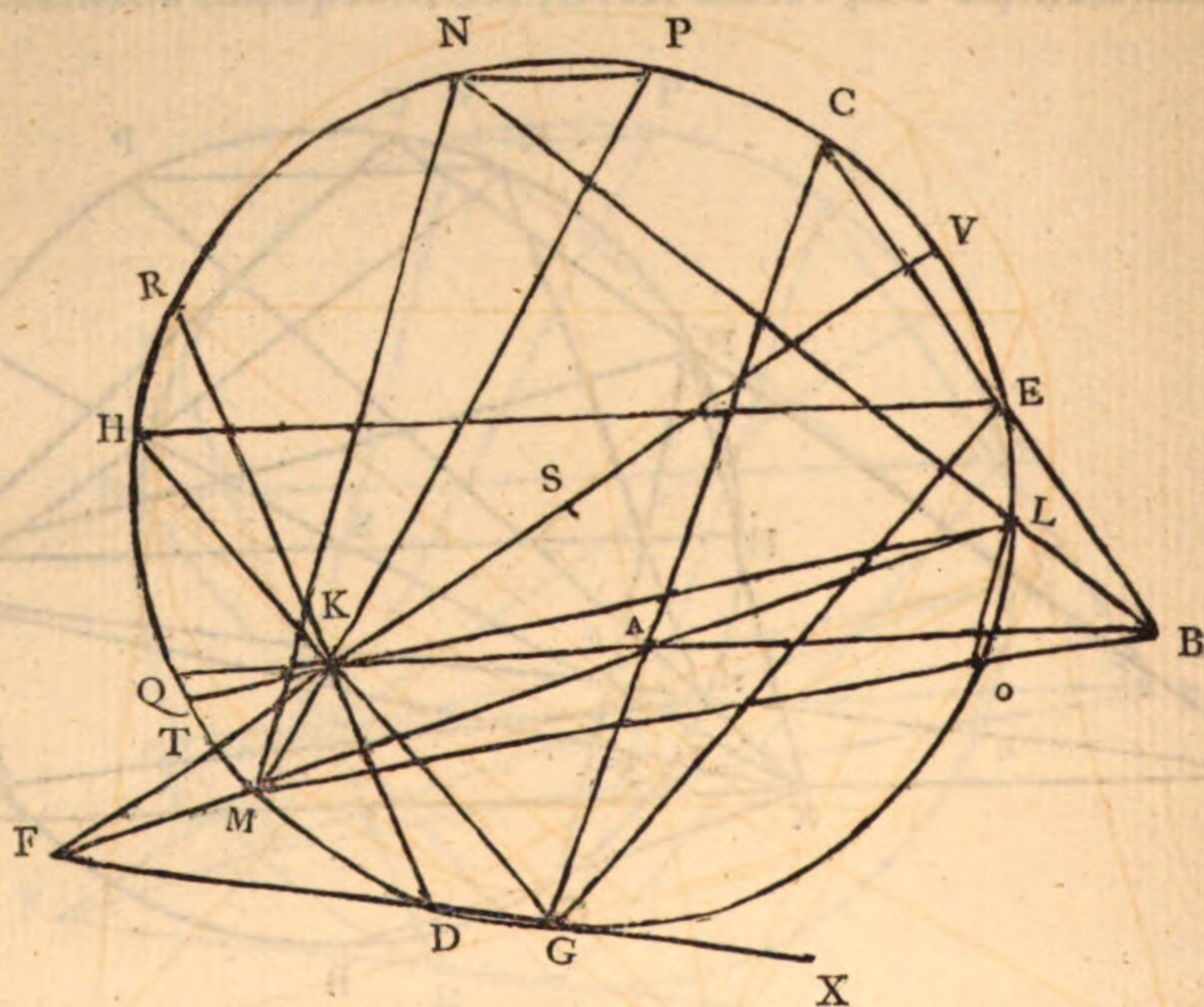
P p p

gulus BMP, five OMP circumferentiae QLN in qua est angulus QLN. Et ostensa est circumferentia MO aequalis ipsi LN, igitur et MP aequalis est circumferentiae QL. Occurrat juncta KG circumferentiae rursus in R, et quoniam rectae KMP, KQL abscindunt aequales circumferentias MP, QL, et est HP aequalis (ipsi EN, hoc est, quia aequales sunt GE, LN) circumferentiae GL, rectae KHD, KGR aequales abscindent ^b ^b Pr. 54.



circumferentias HD, GR; recta igitur GD vergit ad datum punctum in diametro quae per punctum K transit, per Cor. 1. Pr. 53. Vergit autem DG per datum punctum F, ex hypothesi; igitur punctum F est in diametro quae per K transit, nam unicum tantum punctum potest datum esse in recta DG; si enim duo puncta in ea data essent, recta DG positione data esset, quod fieri non potest, quoniam recta ADC inflexa est

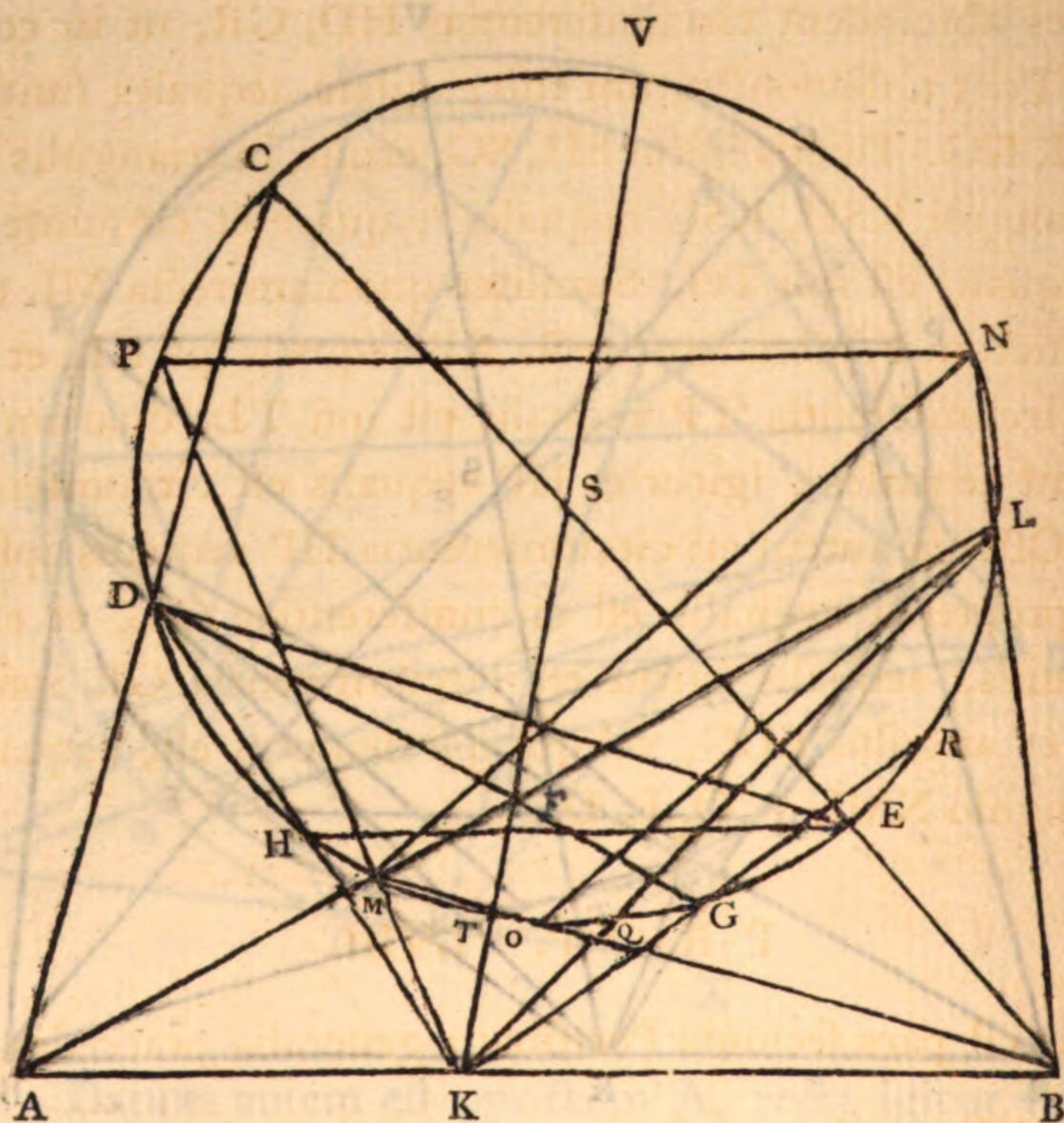
utcunque ad circumferentiam; juncta igitur KF tranfinit per centrum circuli, quod fit S. Occurrat KS circumferentiae in punctis T, V, et quoniam data sunt K, S puncta, recta KTV positione data est, quare rectae KT, KV datae sunt. Et quoniam per Cor. 1. Prop. 53. est VK ad KT, ut VF ad FT, data erit ratio VF ad FT; et data est TV, punctum igitur F da-



tum est. Datum autem est punctum A, recta igitur AMFL positione data est, et data erunt puncta M, L; quare positione data est recta BLN, datum enim est punctum B; et propterea data positione est MN. Angulus igitur NML, et ipsi aequalis angulus EDG, vel huic deinceps, datus est. Recta igitur ED datum continet angulum EDF cum recta DF quae tranfit per datum punctum F. Quod fuit inveniendum.

erit F punctum inveniendum, et angulus NML is qui inveniendus fuit; hoc est si a punctis A, B ad circumferentiam utcumque inflectantur rectae AC, BC ipsi rursus occurrentes in D, E punctis, et jungantur ED, DF , erit angulus EDF , vel qui ipsi deinceps est, aequalis dato angulo NML .

Vide etiam
figg. 2. 3.
Cas. hujus.



Occurrat enim DF circumferentiae rursus in G , et ad circumculum ducantur rectae KHD, KGR, KMP, KQL . Quoniam igitur rectangulum BA, AK aequale est ipsi CA, AD , et inflexae sunt ADC, BEC ad circumferentiam, juncta vero KD
^a Prop. 55. eidem rursus occurrit in H , juncta EH parallela erit ^a rectae

AB. Similiter quoniam inflexae sunt AML, BLN, et juncta KM circumferentiae rursus occurrit in P, juncta NP parallela erit ^a rectae AB, et propterea ipsi HE; est igitur circumferen- ^a Pr. 55.
tia HP aequalis ipsi EN. Et quoniam recta KV transit per centrum, et, ex constructione, est VK ad KT, ut VF ad FT, ductaque est per punctum F recta DFG, rectae KHD, KGR aequales abscindunt circumferentias HD, GR, ut in compositione Pr. 53. demonstratum fuit; quare aequales sunt ^c rec- ^c Pr. 52.
tae KH, KG. Ductis igitur SH, SG, erunt, in triangulis KHS, KGS, anguli KSH, KSG aequales ^d, quare et circumferentia ^d 8. 1.
TH aequalis est ipsi TG. Similiter quoniam recta ML transit per punctum F, ostendetur recta KP aequalis ipsi KL, et propterea circumferentia TP aequalis est ipsi TL, quarum TH, TG sunt aequales; igitur et HP aequalis est circumferentiae GL. Ostensa autem est circumferentia HP aequalis ipsi EN, quae propterea aequalis est circumferentiae GL, et est EL communis, aequalis igitur est circumferentia GE ipsi LN, quare et angulus EDG, vel qui ipsi deinceps est, aequalis est dato angulo NML. Q. E. D.

P R O P. LVIII.

Quae est pars secunda Porismatis generalis praecedentis,

“ QUANDO scilicet recta quae jungit intersectiones inflexarum et circumferentiae parallela est rectae positione datae.”

Sint duo puncta A, E, et ab ipsis ad circumferentiam CHD positione datam utcunque inflexae AF, EF quae ei rursus in G, H occurrunt, juncta GH parallela sit rectae positione da-

aequales, et propterea rectae FM, MK sunt etiam aequales. Quoniam igitur recta LM bifariam secat duas parallelas GH, FK in circulo, transibit LM per centrum, et ipsas GH, FK ad angulos rectos secabit. Et quoniam HG perpendicularis est ad BD diametrum circuli, et ductae sunt GAF, HFE quae diametro occurrunt in A, E punctis, erit ^c ut BE ad ED, ita BA ^{• Pr. 51.} ad AD. Ut igitur recta quae jungit intersectiones inflexarum a punctis A, E et circumferentiae, parallela sit positione datae, debent A, E puncta sita esse in diametro, ita ut BE sit ad ED, ita BA ad AD. Et si unum ex punctis A, E datum fuerit, datum erit et alterum.

Componetur ita.

Datum igitur sit punctum A intra vel extra circulum positione datum BCD, et per A ducatur diameter BAD, in qua sumatur punctum E, ita ut BE sit ad ED, ut BA ad AD; si a punctis A, E inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae AF, EF ei rursus in G, H occurrentes, juncta GH perpendicularis erit ad diametrum BD.

Jungatur enim EG; et quoniam ut BE ad ED, ita est BA ad AD, et per punctum A ducta est recta GAF, rectae EFH, EG aequales abscindunt circumferentias, ut ostensum fuit in compositione Prop. 53. quare per Cor. 2. ejusdem Prop. GH perpendicularis est ad diametrum BD.

Quamvis compositio haec contineatur in Prop. 53. ejusque Cor. 2. visum fuit investigationem tradere hujus aeque ac reliquarum partium generalis Porismatis.

Q q q

aequale erit dupulo rectangulo OK, KN; quare AK, KB aequale est ipsi OK, KN rectangulo. Addatur commune quadratum ex AK, et rectangulum BA, AK aequale erit rectangulo OK, KN et quadrato ex AK, hoc est rectangulo CA, AD. Similiter ostendetur rectangulum AB, BK aequale ipsi CB, BE.

Et si fuerint rectangula CA, AD; CB, BE simul aequalia quadrato ex AB, et in AB sumatur punctum K faciens rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; ducta KM ad centrum perpendicularis erit ad AB.

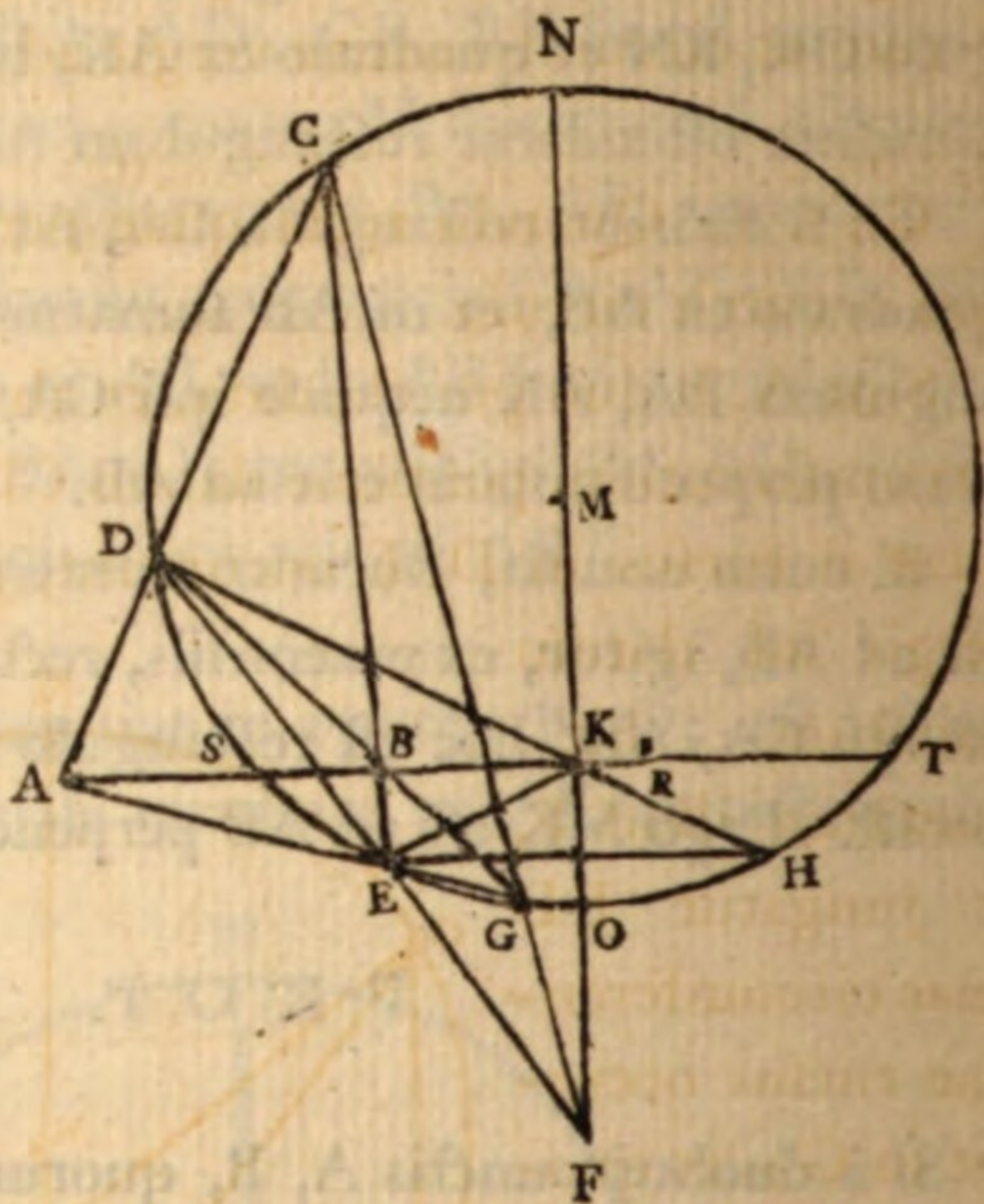
Si enim non sit, ducatur a centro recta MR perpendicularis ad AB, igitur, ex praemissis, rectangulum BA, AR aequale est ipsi CA, AD, hoc est rectangulo BA, AK; quod fieri non potest. Ergo MK est ad AB perpendicularis.

P R O P. LX.

“ Si a duobus punctis A, B, quorum A est extra, B vero in-
 “ tra circulum, inflectantur ad circumferentiam rectae AC,
 “ BC ei rursus in D, E occurrentes, fueritque rectangulum
 “ CA, AD aequale rectangulo CB, BE una cum quadrato ex
 “ juncta AB; et a centro M ducatur ad AB perpendicularis
 “ MK; erit rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD. Et
 “ contra, si fuerit rectangulum CA, AD aequale rectangulo
 “ CB, BE una cum quadrato ex AB, et in AB sumatur punc-
 “ tum K faciens rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD;
 “ ducta KM ad centrum ad rectos angulos erit ipsi AB.”

Occurrat AB circumferentiae in punctis S, T; et quoniam rectangulum CA, AD, hoc est TA, AS aequale est rectangulo

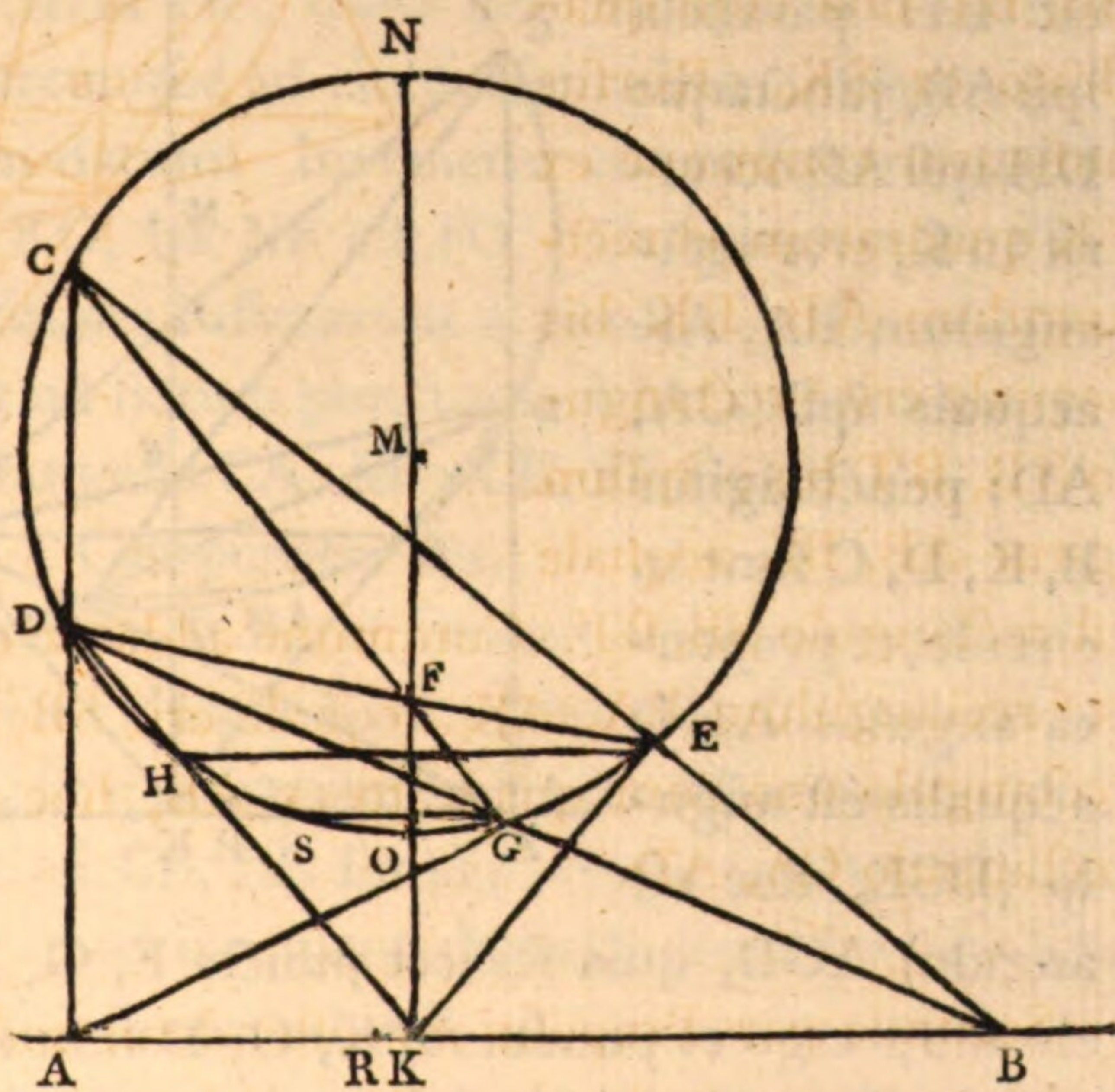
- CB, BE, five SB, BT una cum quadrato ex AB, commune
^a 6. 2. apponatur quadratum ex SK ; erit igitur ^a quadratum ex AK
 aequale rectangulo SB,
 BT una cum quadratis
 ex AB, SK. Commune
 auferatur quadratum
^b 4. 2. ex AB, et ^b rectangu-
 lum AB, BK bis una
 cum quadrato ex BK
 aequale erit rectangulo
 SB, BT una cum qua-
 drato ex SK. Rursum
 auferatur commune ex
 BK quadratum, et rect-
 angulum AB, BK bis
^c 5. 2. aequale erit ^c rectangu-
 lo SB, BT bis ; ipsum
 igitur AB, BK aequale
 est rectangulo SB, BT. Cum commune addatur quadratum ex AB,
^d 3. 2. et ^d rectangulum BA, AK aequale erit SB, BT, five CB, BE
 rectangulo una cum quadrato ex AB, hoc est, ex hypothesi,
 rectangulo CA, AD.



Secunda pars Propositionis ostendetur eodem modo quo se-
 cunda pars praecedentis. Propositiones autem 59. 60. Lem-
 mata sunt ad sequentem.

Quae est pars tertia Porismatis generalis,
 “ QUANDO scilicet recta quae jungit intersectiones inflexa-
 “ rum et circumferentiae vergit ad datum punctum.”

Sint A, B duo puncta data, et ab ipsis utcunque inflexis ad circumferentiam positione datam CDE duabus rectis AC, BC quae ei rursus in D, E occurrunt, juncta DE, ex hypothesi, vergit ad datum

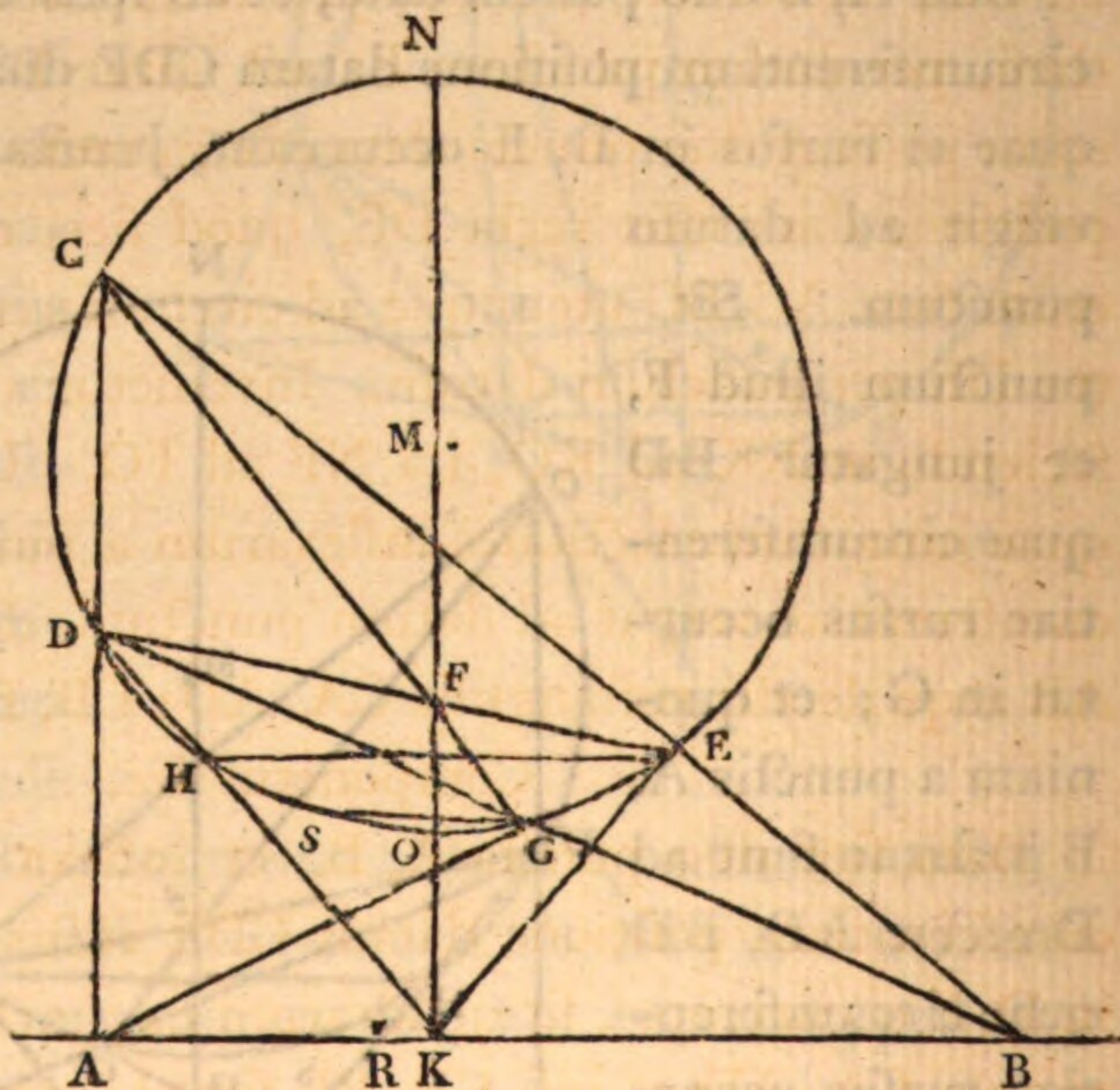


dem punctum F. Rurſus, ductâ AG, quoniam a punctis A, B inflexae ſunt ad G rectae AG, BG quarum BG circumferentiae rurſus occurrit in D, recta quae jungit punctum D et reliquam ipſius AG et circumferentiae interſectionem, ex hypotheſi,

transibit per punctum F; igitur recta DF transit per istam intersectionem; recta autem DF circumferentiae occurrit in E, quare punctum E est intersectio ipsius AG et circumferentiae, hoc est puncta A, G, E sunt in recta linea.

Ducatur EH parallela rectae AB, occurratque rursus circumferentiae in H, et juncta DH rectae AB in K occurrat. Quoniam igitur a punctis A, B inflexae sunt AC, BC ad circumferentiam ei rursus in D, E occurrentes, et ducta est EH parallela ipsi AB, junctaque DH ipsi AB occurrit in K, erit^e rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; puncta igitur B, K, D, C sunt in circulo, et propterea angulus AKD aequalis est angulo (DCE, hoc est angulo) AGD, quia scilicet puncta E, G, D, C sunt etiam in circulo; ergo et puncta A, K, G, D sunt in circulo, et propterea rectangulum AB, BK aequale est ipsi DB, BG, hoc est rectangulo CB, BE.

Quoniam igitur ostensum est rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD, et rectangulum AB, BK aequale ipsi CB, BE; erunt rectangula CA, AD; CB, BE simul aequalia rectangulis



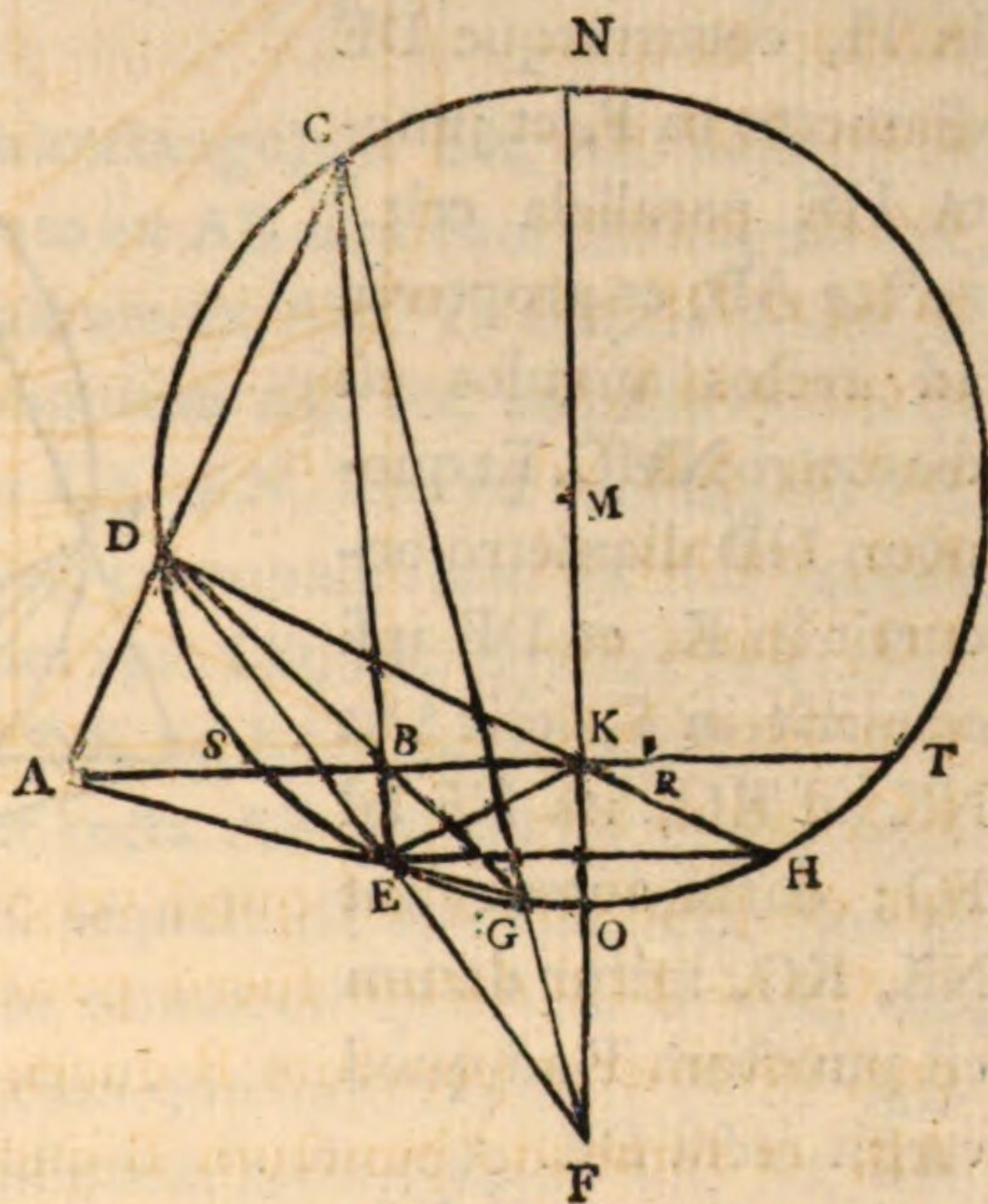
BA, AK; AB, BK, hoc est^f quadrato ex AB. Sit M centrum^f 2. 2
 circuli, et jungatur MK quae circumferentiae in punctis N,
 O occurrat; igitur^g est MK ad AB perpendicularis, et propter^g Pr. 59.
 ea ad HE. Quoniam igitur HE perpendicularis est ad diame-
 trum NO, et ducta est HD ad circumferentiam, et diametro
 occurrit in K, recta ED tranfinit per datum punctum in dia-
 metro, quod scilicet dividit eam in ratione quam habet NK
 ad KO, ut constat ex Prop. 51. tranfit autem DE, ex hypo-
 thefi, per datum punctum F; est igitur F in diametro; non
 enim possunt duo puncta data esse in recta DE, nam si essent,
 positione data esset recta DE, quod fieri non potest; ductae
 enim sunt AC, BC utcunque ad circumferentiam. Vergit igi-
 tur DE per punctum datum. Invenietur autem^h punctum F^h Pr. 51.
 faciendo ut NK ad KO, ita NF ad FO. Ut igitur recta DE
 quae jungit intersectiones inflexarum a punctis A, B, et cir-
 cumferentiae vergat ad datum punctum, debet quadratum ex
 AB aequale esse rectangulis CA, AD; CB, BE simul.

Componetur ita.

Data sint duo puncta A, B, et inflexa utcunque ad cir-
 cumferentiam positione datam CDE rectis AC, BC ei rursus
 in D, E occurrentes, fit quadratum ex juncta AB aequale rect-
 angulo CA, AD et ipsi CB, BE simul; verget juncta DE ad
 datum punctum F, quod invenitur ducendo per centrum M
 rectam MK perpendicularem ad AB, et circumferentiae oc-
 currentem in N, O, et faciendo ut NK ad KO, ita NF ad FO.

Jungatur enim KD quae circumferentiae rursus occurrat
 in H, occurratque DE diametro in F, et HE jungatur. Quo-
 niam igitur rectangulum CA, AD una cum ipso CD, DE ae-
 quale est quadrato ex AB, et ducta est MK perpendicularis ad

drato ex AB; si a centro M ducatur MK, erit^a ea perpendi-^a Pr. 60.
 cularis ad AB, et propterea ad HE. Quoniam igitur HE per-
 pendicularis est ad diametrum NO, et ducta est HD ad cir-
 cumferentiam, et diametro occurrit in K, recta ED tranfinit
 per datum punctum in diametro producta, ut constat ex Prop.
 51. tranfit autem DE,
 ex hypothefi, per da-
 tum punctum F; est i-
 gitur F in diametro pro-
 ducta; non enim possunt
 duo puncta data esse in
 recta DE; nam si effent,
 pofitione data effet DE,
 quod fieri non poteft.
 Vergit igitur DE per
 datum punctum F,
 quod fcilicet facit NK
 ad KO, ut NF ad FO.
 Ut igitur recta DE quae
 jungit interfectiones in-
 flexarum AC, BC et cir-
 cumferentiae vergat ad punctum datum, debet rectangulum
 CA, AD, aequale effe rectangulo CB, BE una cum quadrato
 ex AB.



Componetur ita.

Data fint duo puncta A, B, et inflexis utcunque ad cir-
 cumferentiam pofitione datam CDE rectis AC, BC quae ei
 rurfus in D, E occurrunt, fit rectangulum CA, AD aequale
 ipfi CB, BE una cum quadrato ex juncta AB; verget juncta

R r r

duo puncta A, B quae faciunt rectangulum BA, AK aequale rectangulo CA, AD, ductâ scilicet quavis recta ADC ad circum-
culum, et jungatur BC quae circumferentiae rursus occurrit
in E, et DE jungatur quae occurrit diametro NMO quae per
K transit in F, erit NK ad KO, ut NF ad FO. Vel, quod idem
est, si fuerit NK ad KO, ut NF ad FO, DE occurret diametro
NO in F.

CAS. 1. Quoniam enim rectangulum BA, AK aequale est
ipfi CA, AD, hoc est quadrato ex AK una cum rectangulo OK,
KN, ablato communi quadrato ex AK, et addito communi
quadrato ex BK, erit rectangulum AB, BK aequale quadrato
ex BK una cum rectangulo OK, KN, hoc est rectangulo CB,
BE; additisque aequalibus, erit quadratum ex AB aequale
rectangulo CA, AD una cum ipso CB, BE. Igitur, ex compo-
sitione hujus Casus, erit ut NK ad KO, ita NF ad FO.

CAS. 2. Quando scilicet recta AB circulo occurrit; quo-
niam rectangulum BA, AK aequale est ipfi CA, AD, hoc est
rectangulo SA, AT, addito communi quadrato ex SK, erit
rectangulum BA, AK una cum quadrato ex SK aequale ^a qua- ^a 6. 2.
drato ex AK; commune auferatur rectangulum BA, AK, erit
quadratum ex SK aequale ^b rectangulo AK, KB; et ablato ^b 2. 2.
quadrato ex BK, reliquum rectangulum AB, BK aequale ^c erit ^c 35. 2.
reliquo SB, BT, hoc est ipfi CB, BE, additoque quadrato ex
AB, erit rectangulum BA, AK, hoc est CA, AD, aequale rect-
angulo CB, BE una cum quadrato ex AB. Igitur, ex compo-
sitione Casus 2. erit ut NK ad KO, ita NF ad FO.

P R O P. LXII.

Est haec casus Porismatis generalis, ultimi scilicet Libri 3.
Porismatum Euclidis.

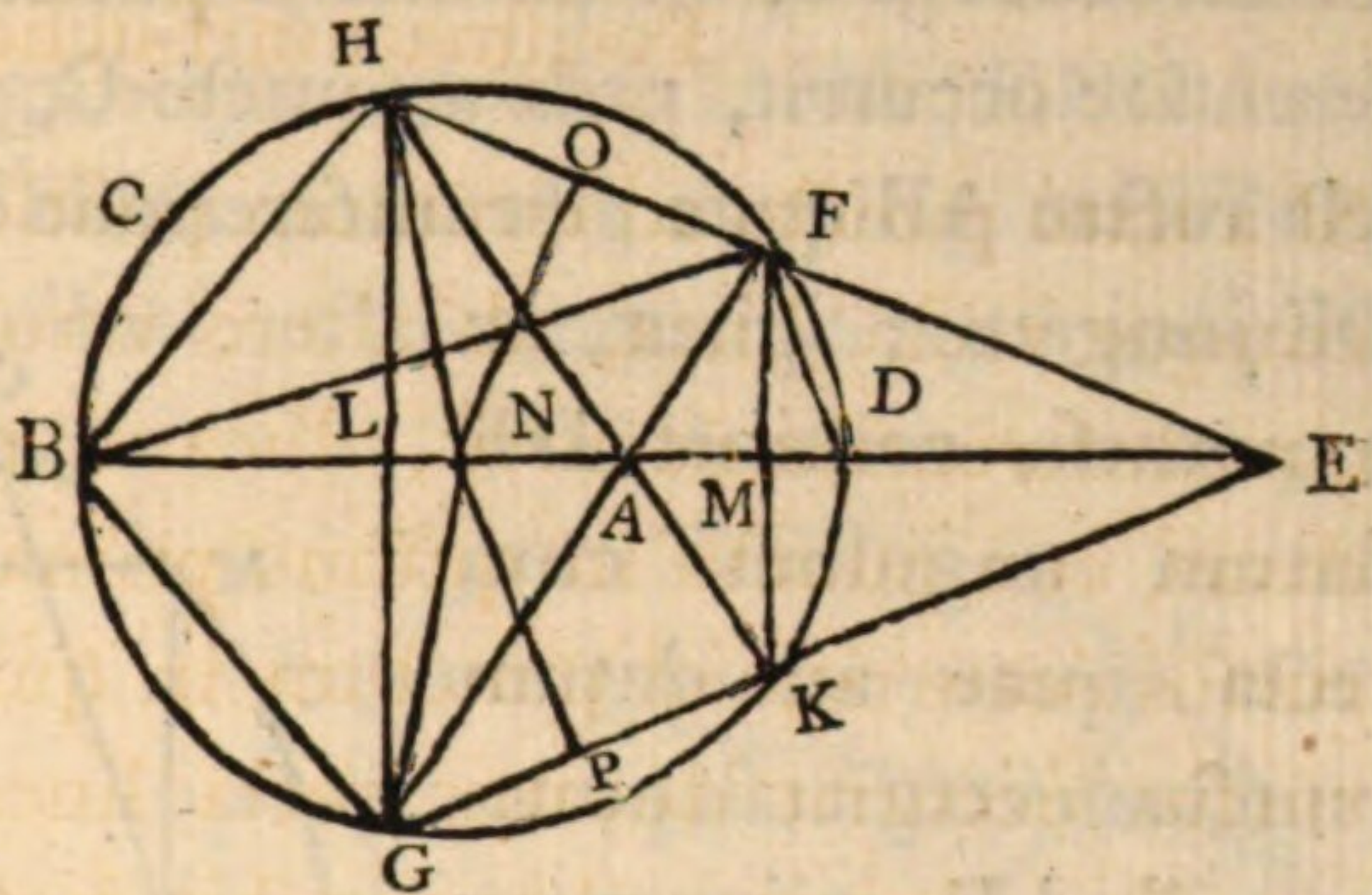
“ SI a dato puncto ad circulum positione datum ducatur ut-
“ cunque recta linea, ab altero vero punctorum in quibus
“ circumferentiae occurrit, ducatur recta parallela positione
“ datae, et a puncto in quibus prima ducta circumferentiae
“ rursus occurrit, ad punctum in quibus altera ducta eidem
“ rursus occurrit ducatur recta linea; vel verget haec ad
“ punctum datum, vel continebit datum angulum cum recta
“ quae ad datum punctum vergit.”

PARS I. Quando recta jungens intersectiones ductarum et circumferentiae vergit ad punctum datum.

Sit punctum E datum, et ab eo ad circulum positione datum BCD ducatur utcunque recta EFH, et ab altero punctorum in quibus circumferentiae occurrit, puta a puncto H, ducatur recta HG parallela positione datae, occurratque circumferentiae rursus in G, et jungatur FG; verget FG, ex hypothesis, ad datum punctum; sit punctum hoc A, et a puncto F ducatur FK parallela positione datae, et propterea ipsi HG, occurratque rursus circumferentiae in K. Quoniam igitur a puncto E ducta est ad circumferentiam recta EFH, et a puncto F ducta est FK parallela positione datae, juncta HK, ex hypothesis, transibit per punctum A. Rursus, quoniam a puncto E ducta est EK ad circumferentiam, et est KF parallela positione datae, recta quae jungit punctum F et reliquam intersectionem ipsius EK et circumferentiae transibit, ex hypothesis,

per punctum A; recta autem FA transit per punctum circumferentiae G; punctum igitur G est intersectio ipsius EK et circumferentiae,

hoc est puncta E, K, G sunt in recta linea. Quoniam igitur parallelae sunt HG, FK, recta EA, per ea quae ostensa sunt in Prop. 58. bifariam et ad rectos



angulos secabit ipfas HG, FK, et per centrum circuli transibit. Occurrat EA circumferentiae in punctis B, D, et quoniam ducta est EFH ad circulum a puncto E, et est HG perpendicularis ad diametrum, et juncta GF diametro in A occurrit, erit^a ut BE ad ED, ita BA ad AD. Datae autem sunt^a Pr. 51. BE, ED, quare ratio BA ad AD data est; et data est BD, punctum igitur A datum est. Patet autem rectam positione datam cui HG parallela est ad rectos angulos esse diametro quae per E transit.

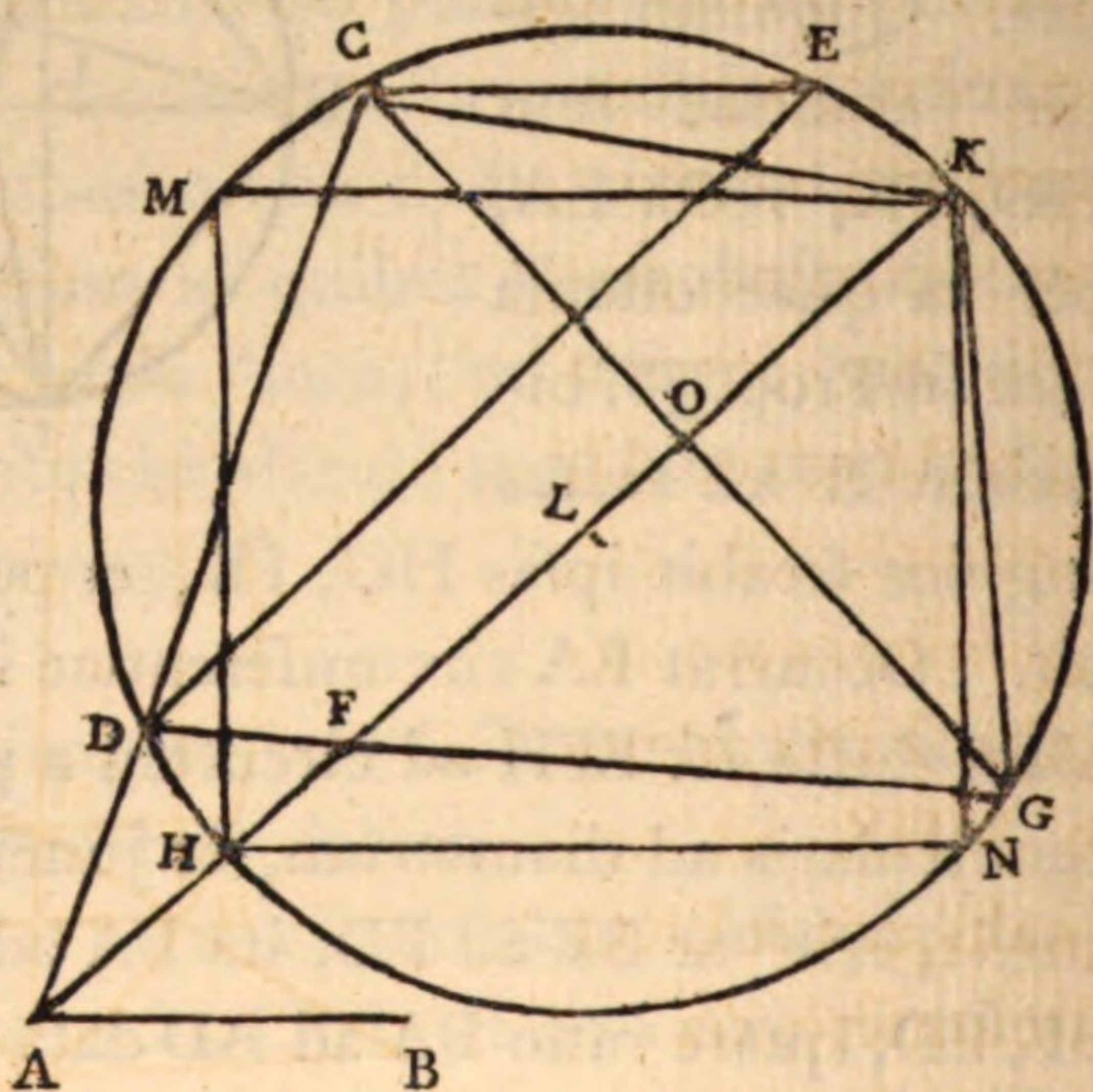
Componetur ita.

Ducatur per centrum a puncto E recta EDB, et fiat ut BE ad ED, ita BA ad AD; erit A punctum inveniendum. Si enim a puncto E ducatur utcunque EFH ad circulum, et HG perpendicularis ad diametrum BD, juncta GF transibit per punctum A, per Prop. 51.

PARS 2. Quando recta jungens intersectiones ductarum et circumferentiae datum continet angulum cum recta quae ad punctum datum vergit.

Datum sit punctum A, et recta AB positione data sit; ducatur vero utcunque a puncto A ad circulum positione datum CDE recta ADC, et ab altero punctorum in quibus circumferentiae occurrit, puta a puncto C, ducatur recta CE parallela rectae AB quae circumferentiae rursus occurrat in E, et DE jungatur; igitur, ex

hypothefi, continet DE
datum angulum cum
recta quae ad datum
punctum vergit; fit punc-
tum illud F, et jungatur
DF occurratque circum-
ferentiae rursus in G;
datus igitur est angulus
EDG. Jungatur AF et
circumferentiae occurrat



inceps est, productâ FD, vel FH. Quoniam igitur aequales sunt anguli MHK, NKH in omni casu, parallelæ sunt MH, NK; et sunt MK, HN parallelæ, quare parallelogrammum est MHNK, et propterea anguli ejus oppositi HMK, KNH inter se sunt aequales; et est MHNK in circulo, anguli igitur HMK, KNH aequales sunt ^a duobus rectis; ergo uterque ipsorum ^a 22. 3.

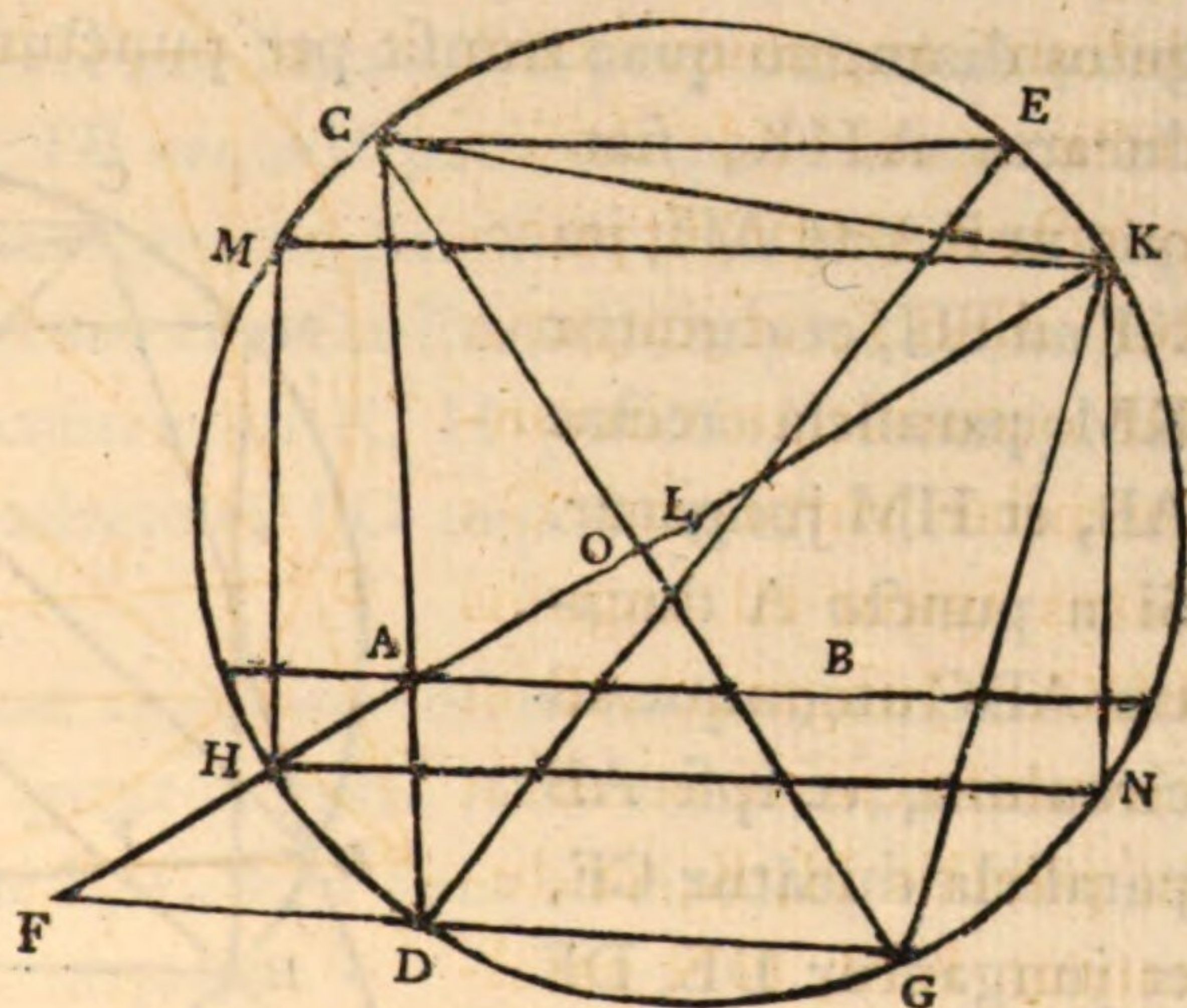
rectus est, et propterea HK transit ^b

per centrum circuli. Sit centrum L, recta igitur AL positione data est.

Quoniam vero angulus EDG angulo MHK est æqualis, erit et EKG circumferentia circumferentiae MEK æqualis,

quarum EK æqualis est ipsi MC, quia parallelæ sunt MK, CE, ergo et circumferentia KG æqualis est ipsi CK. Jungantur KG, KC et CG quæ diametro HK occurrit in O; et quoniam aequales sunt circumferentiae CK, KG, æquales erunt et CH, HG; anguli igitur CKO, GKO sunt aequales, et duæ CK, KO duabus GK, KO sunt aequales, altera alteri, quare aequales et recti sunt anguli COK, KOG.

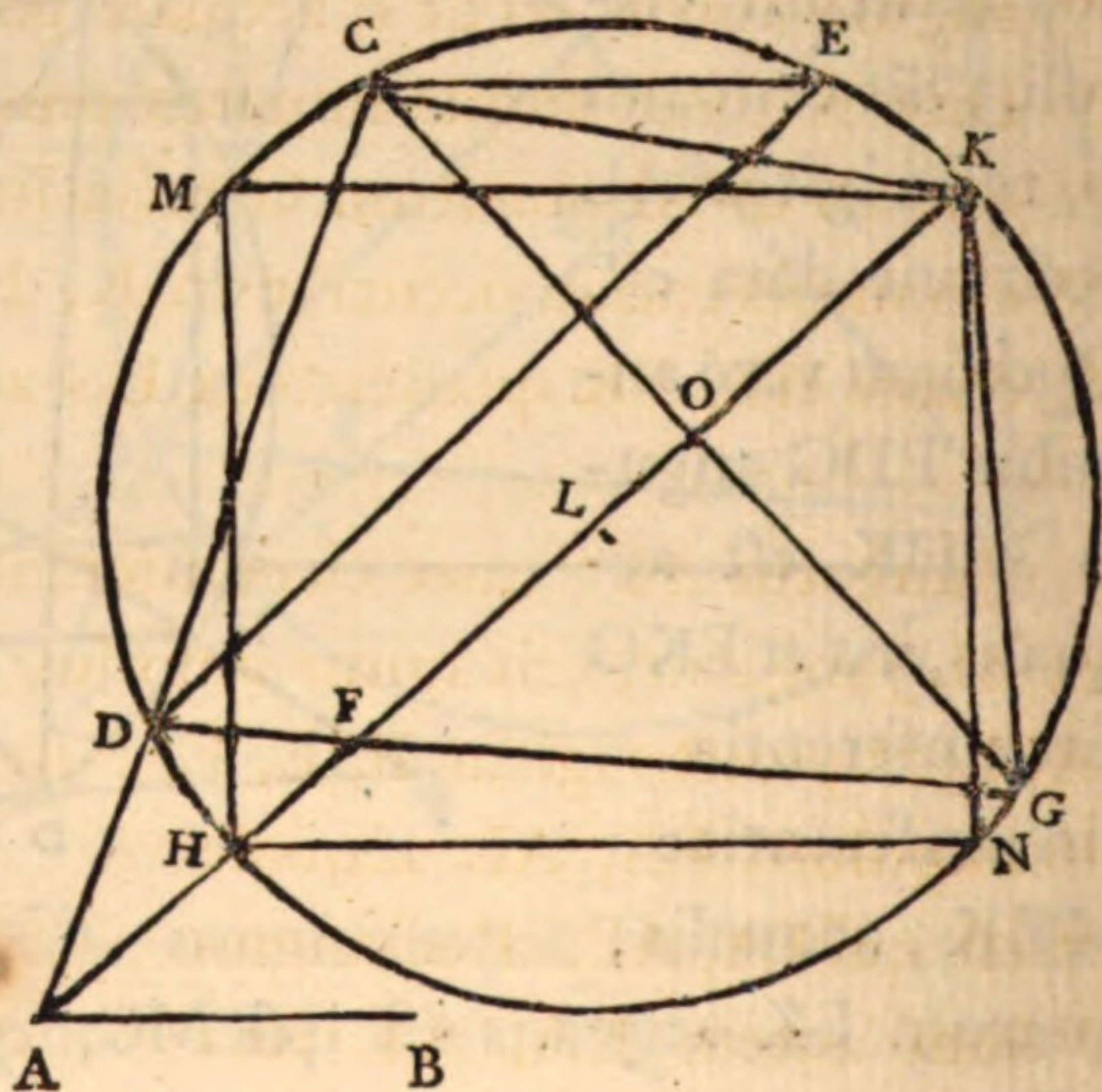
Quoniam igitur a puncto A ducta est ADC ad circulum, et CG perpendicularis ad diametrum HK, junctaque GD occurrit ipsi HK in F, erit ^c KA ad AH, ut KF ad FH; et data est ratio ^c Pr. 51.



KA ad AH, quare et ratio KF ad FH; et data est HK, punctum igitur F datum est; et est angulus EDF, five EDG aequalis dato angulo MHK. Quae fuerunt ostendenda.

Componetur ita.

Sit punctum A datum, et recta AB positione data, et positione datus sit circulus CDE, non autem sit AB ad rectos angulos diametro quae transit per punctum A; per centrum L ducatur AHK, fiatque ut KA ad AH, ita KF ad FH, et ducatur KM parallela rectae AB, et HM jungatur. Si a puncto A ducatur ADC utcunque ad circulum, et ipsi AB parallela ducatur CE, et jungantur DE, DF quae circumferentiae rursus occurrat in G, erit angulus EDF aequalis dato angulo MHF.



Vide etiam
fig. 2. Part.
hujus.

Quoniam enim est KA ad AH, ut KF ad FH, et a punctis A, F inflexae sunt ad circumferentiam AD, FD ei rursus in C, G occurrentes, erit^d juncta CG perpendicularis ad diametrum HK. Junctae igitur CK, KG sunt aequales, quare et circumferentiae CK, KG aequales sunt; et quoniam parallelae sunt CE, MK, aequales sunt circumferentiae MC, EK; igitur et circumferentia MCK aequalis est ipsi EKG, et prop-

^d2.cor.Pr.53.

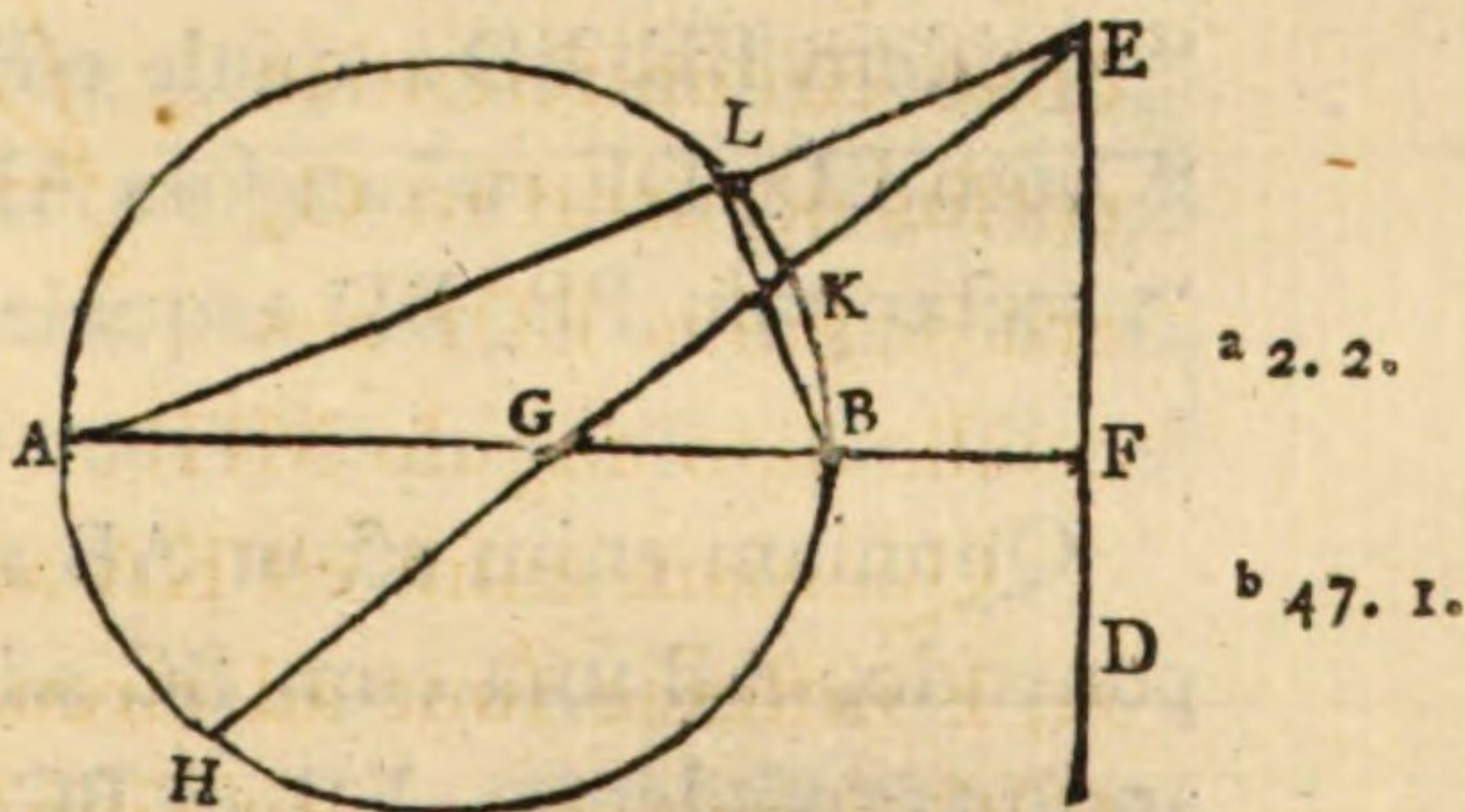
terea angulus huic infistens, viz. EDG aequalis est angulo MHK, vel EDF aequalis ipsi MHF.

P R O P. LXIII.

Quae est Prop. 159. Lib. 7. Pappi.

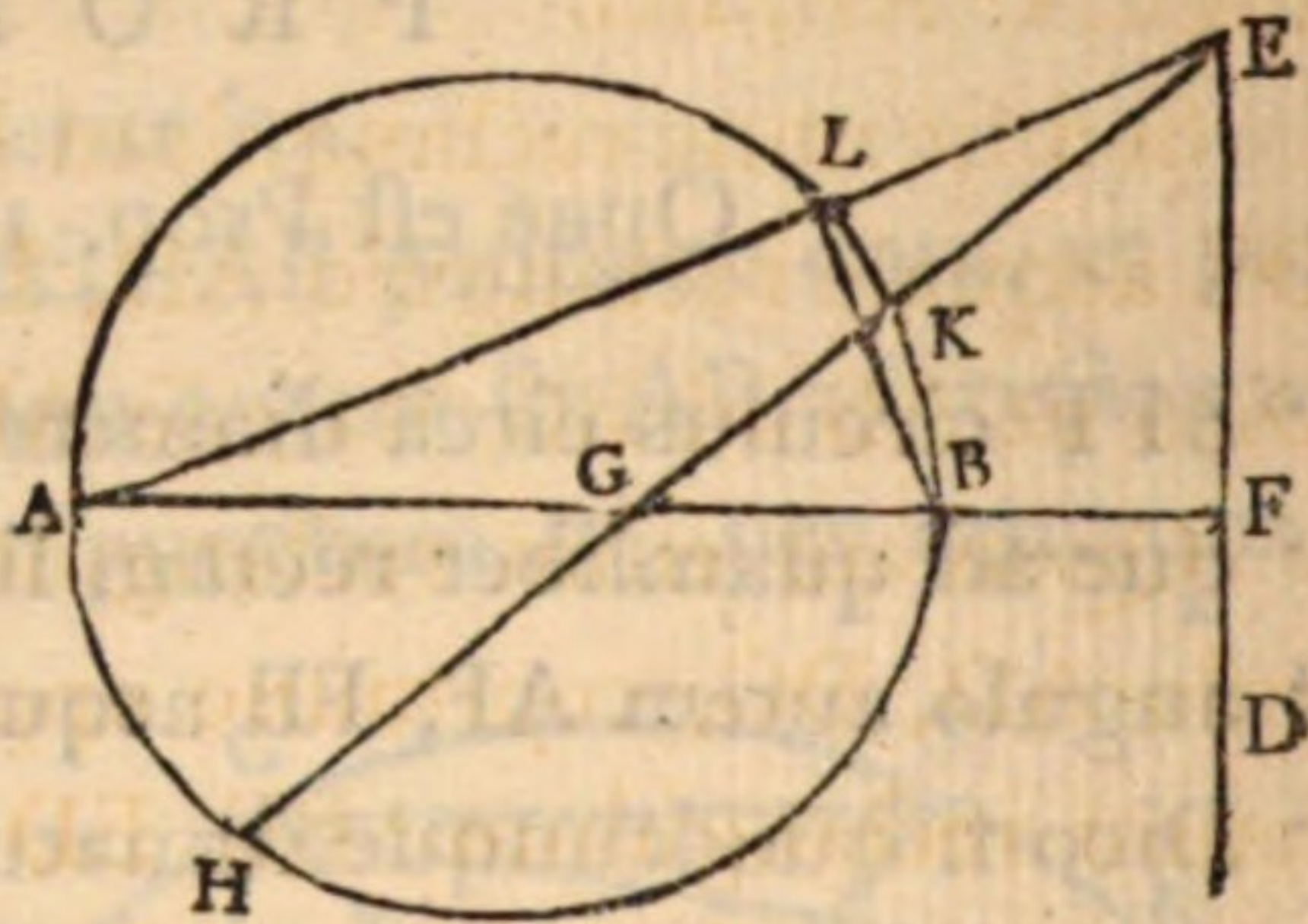
“SIT circulus circa diametrum AB, et AB producat, fit-
 “que ad quamlibet rectam lineam DE perpendicularis; rect-
 “angulo autem AF, FB aequale ponatur quadratum ex FG.
 “Dico si quodcunque sumatur punctum “in DE,” ut E, at-
 “que ab eo ad punctum G recta linea ducta producat, “et
 “circumferentiae occurrat in K, H punctis,” rectangulum
 “etiam HE, EK quadrato ex EG aequale esse.”

Jungatur AE “quae circumferentiae rursus occurrat in L,”
 et BL jungatur, erit igitur angulus ALB rectus; sed et rectus
 AFE, “puncta igitur B, L, E, F sunt in circulo, quare rect-
 “angulum EA, AL aequale
 “est ipsi FA, AB. Rectangu-
 “lum autem EA, AL una
 “cum ipso AE, EL aequale^a
 “est (quadrato ex AE, hoc
 “est^b) quadratis ex AF, FE,
 “quorum EA, AL aequale est
 “rectangulo FA, AB;” reli-
 quum igitur rectangulum AE, EL aequale est reliquo, rectan-
 gulo^a scilicet AF, FB et quadrato ex FE. Rectangulum au-
 tem AE, EL aequale est rectangulo HE, EK, et rectangulum
 AF, FB aequale est, ex hypothese, quadrato ex FG. Ergo rect-



angulum HE, EK aequale est quadratis ex GF, FE, hoc est quadrato ex GE.

“ Et si sumatur punctum G in AF producta ad partes F, reliquis manentibus, et punctum quodvis E sumatur in recta DE a quo ducatur utcumque ad circulum recta EKH, et jungatur EG; erit rectangulum HE, EK aequale quadrato ex EG. Demonstratur iisdem verbis cum praecedente.”



P R O P. LXIV.

Quae est Prop. 160. Lib. 7. Pappi.

“ SIT ut AB ad BC, ita AD ad DC, et AC bifariam in puncto E secetur. Dico tria contingere; videlicet rectangulum quidem BE, ED aequale esse quadrato ex EC; rectangulum vero BD, DE rectangulo AD, DC; et rectangulum AB, BC rectangulo EB, BD aequale esse.”

Quoniam enim est ut AB ad BC, ita AD ad DC, erit, componendo, AB una cum BC ad BC, ut AC ad CD; et dimidando antecedentes, EB ad BC, ut EC ad CD; et convertendo, ut BE ad EC, ita CE ad ED; rectangulum igitur BE, ED quadrato ex EC est aequale. Commune auferatur quadratum^a ex ED, ergo rectangulum BD, DE quod relinquitur^a, aequale^b est rectangulo^b AD, DC. Rursus cum rectangulum BE, ED

aequale fit quadrato ex EC, utrumque auferatur a quadrato ex EB; reliquum igitur rectangulum^c EB, BD aequale est rectangulo^d AB, BC.

$$\begin{array}{ccccccc} A & & E & D & & C & & B \\ \hline & & & & & & & \end{array} \begin{array}{l} {}^c 2. 2. \\ {}^d 6. 2. \end{array}$$

Sed fit nunc rectangulum BD, DE aequale rectangulo AD, DC; et bifariam secetur AC in E. Dico ut AB ad BC, ita esse AD ad DC.

Quoniam enim rectangulum BD, DE est aequale rectangulo AD, DC, commune apponatur quadratum ex DE, erit totum rectangulum^a BE, ED quadrato^b ex EC aequale. Est^a 3. 2. igitur BE ad EC, ut EC ad ED. Ergo, convertendo, et dupli-^b 5. 2. cando antecedentes, dividendoque, ut AB ad BC, ita AD ad DC.

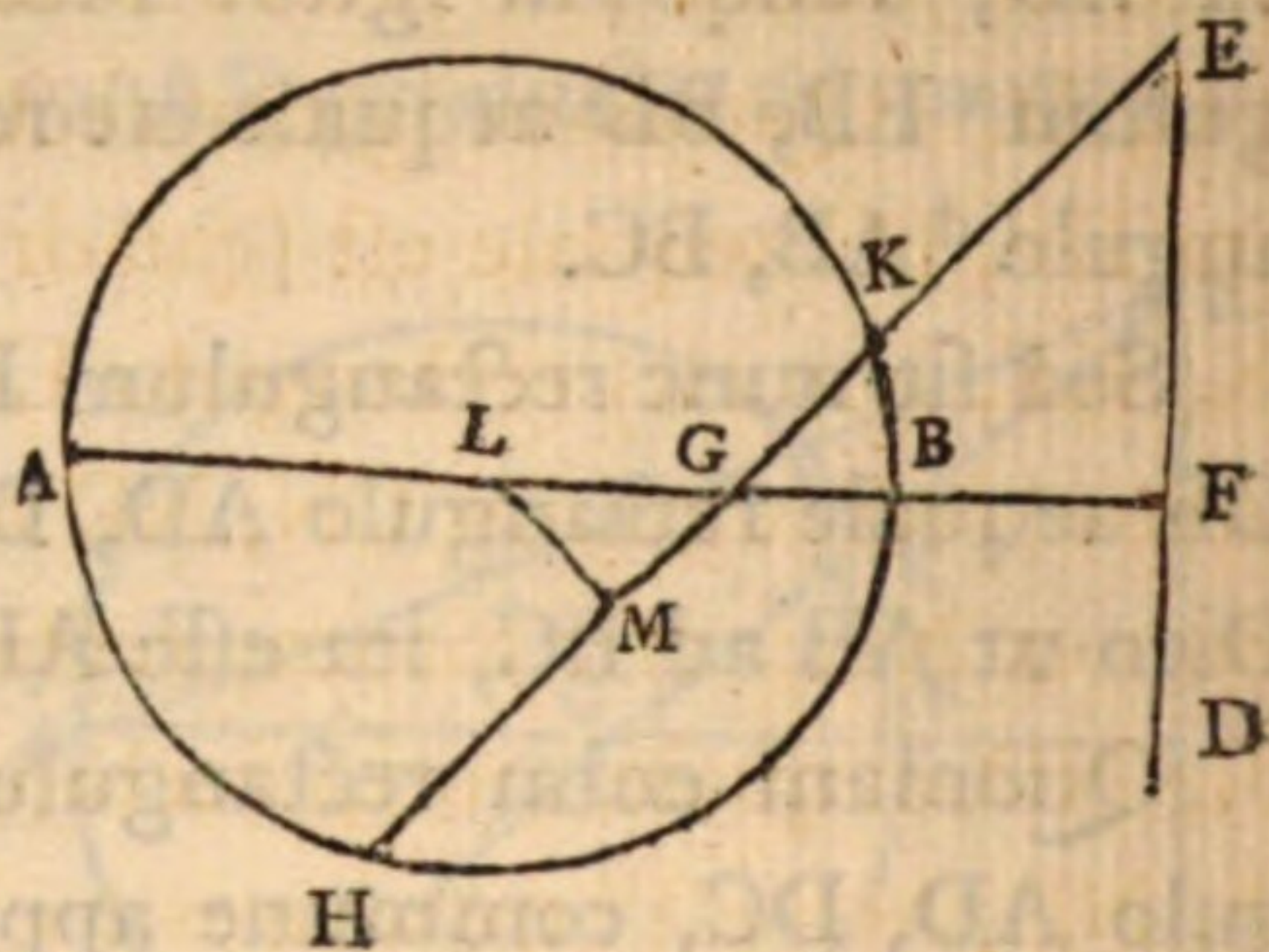
P R O P. LXV.

Quae est Prop. 161. Lib. 7. Pappi.

HIS ita se habentibus, “ Sit circulus circa diametrum AB, et “ producatur AB ut ad quamlibet rectam DE sit perpendicu- “ laris in puncto F; et fiat ut AF ad FB, ita AG ad GB. Dico “ rursus, si quodcunque punctum sumatur “ in DE,” ut E, “ et juncta EG circumferentiae occurrat in H, K, esse HE ad “ EK, ut HG ad GK.”

Sumatur centrum circuli, quod sit L, et ab eo ad EH perpendicularis ducatur LM; erit^a KM aequalis ipsi MH. Quo-^a 3. 3. niam autem rectus est uterque angulorum qui ad M, F, erunt puncta E, F, L, M in circulo; “ rectangulum igitur FG, GL “ rectangulo EG, GM est aequale.” Rectangulum autem

- ^b Pr. 64. FG, GL aequale est ^b rectangulo AG, GB, quoniam ut AF ad FB, ita AG ad GB, et secta est AB bifariam in puncto L. Igitur et rectangulum EG, GM est aequale rectangulo
- ^c 35. 3. AG, GB, hoc est ^c rectangulo HG, GK, quia AB, HK se mutuo secant in circulo; et HK bifariam secta est in M, igitur ex eo quod proxime demonstratum est ^b, ut HE ad EK, ita erit HG ad GK.



Propositiones tres proxime praecedentes inserviunt duabus sequentibus, quae sunt Porismata.

P R O P. LXVI.

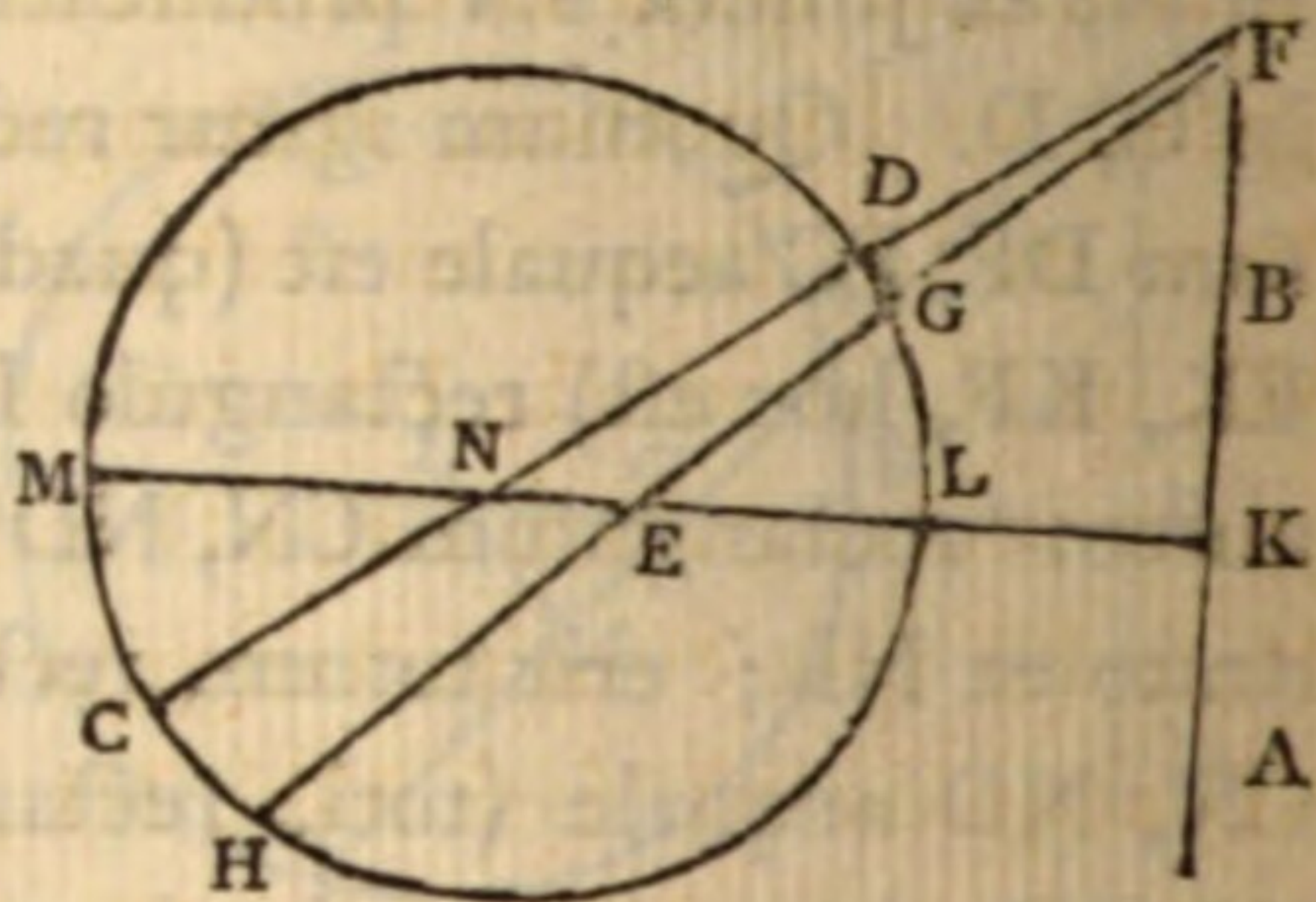
“ DATA positione rectâ AB, et circulo CD positione dato ;
 “ datum erit punctum per quod si ducatur utcunque recta
 “ linea quae rectae positione datae AB et circulo occurrit,
 “ rectangulum contentum segmentis ductae inter rectam AB
 “ et puncta quibus circumferentiae occurrit, aequale erit qua-
 “ drato ex segmento ejusdem ductae inter rectam AB et punc-
 “ tum illud quod datum ostendendum est.”

Sit E punctum inveniendum, per quod ductâ utcunque recta EF quae ipsi AB in F, et circumferentiae in punctis G, H occurrit, rectangulum GF, FH aequale erit quadrato ex EF. Ducatur EK perpendicularis ad AB, occurratque circumferentiae in L, M; rursus igitur, ex hypothese, rectangulum

A geometric diagram featuring a circle with a horizontal diameter ML . A vertical line AB is tangent to the circle at point L . Two secant lines originate from point F outside the circle: one passing through points D and G on the upper arc, and another passing through points C and H on the lower arc. A third line passes through point E on the diameter ML and extends to point N on the upper arc. The points B and K are located on the vertical line AB , with K being the point of tangency at L .

Sumatur circuli centrum N, et ab ipso ad AB ducatur perpendicularis NK quae circumferentiae in L, M occurrat; inter MK vero et KL inveniatur media proportionalis KE, quae po-

natur a puncto K versus N; erit E punctum inveniendum. Si enim ab ipso ducatur quaevis recta EF ad rectam AB quae circumferentiae in G, H occurrat, erit rectangulum GF, FH aequale quadrato ex EF, quod quidem in Prop. 63. ostensum est.



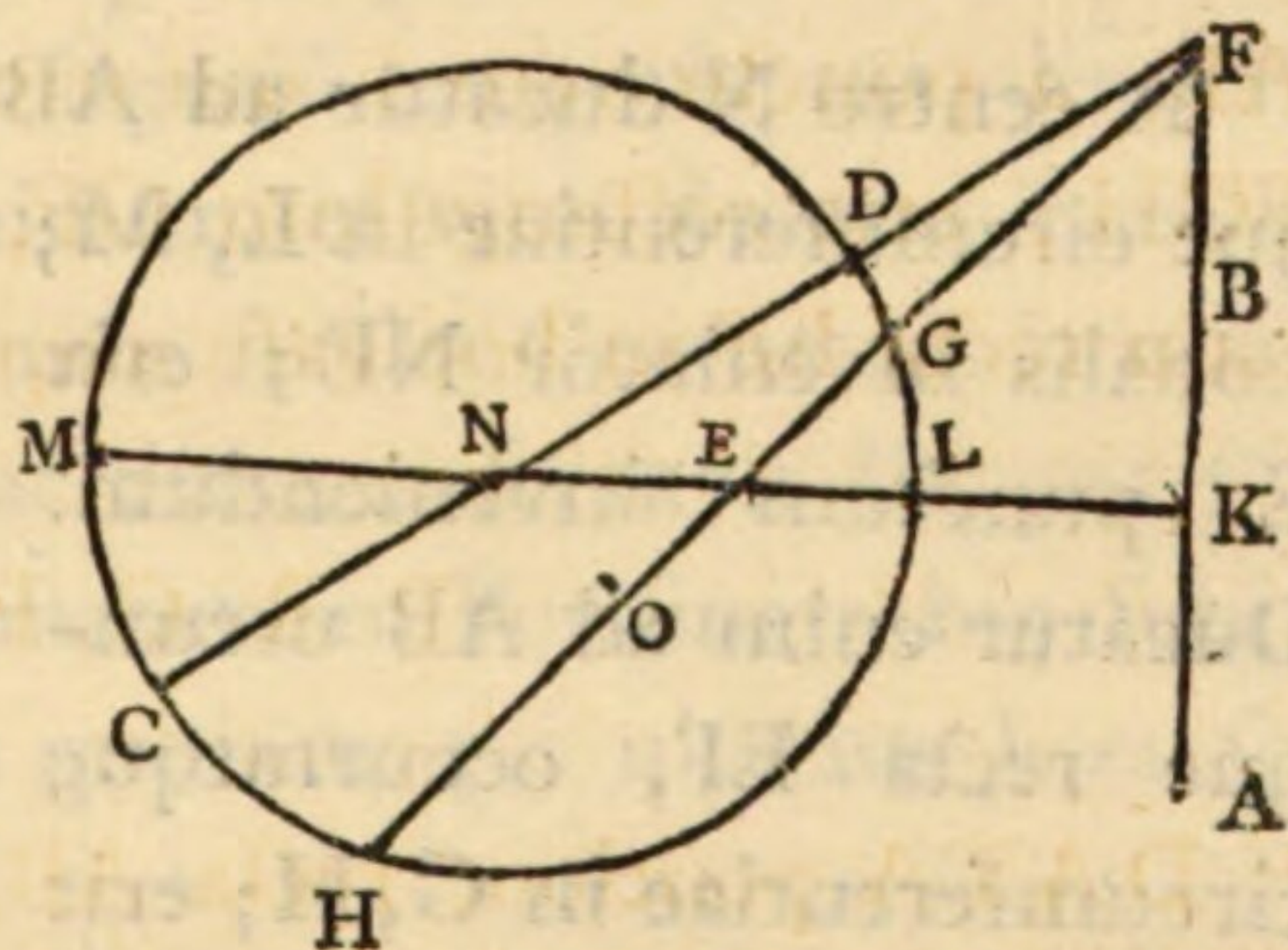
Et si ponatur recta KE ad partes contrarias iis ad quas posita fuit in praecedente Compositione, et a puncto E ducatur utcunque recta EF ad ipsam AB, a puncto vero F ducatur utcunque ad circumulum recta FGH; erit rectangulum GF, FH aequale quadrato ex EF; nam recta EF in hoc casu aequalis est ipsi EF in priore.

P R O P. LXVII.

“ DATA positione recta AB, et circulo CD positione dato;
 “ datum erit punctum per quod si ducatur utcunque recta li-
 “ nea quae ipsi AB et circulo occurrit, rectangulum a seg-
 “ mentis ductae inter AB et circumferentiam aequale erit
 “ quadrato ex segmento ejusdem ductae inter rectam AB et
 “ punctum quod datum ostendendum est, una cum rectan-
 “ gulo a segmentis ejusdem ductae inter punctum illud et cir-
 “ cumferentiam.”

Sit E punctum inveniendum, per quod ducta utcunque recta EF quae ipsi AB in F, et circumferentiae in punctis G, H occurrat, rectangulum GF, FH aequale erit quadrato ex

EF una cum rectangulo GE, EH. Ad AB ducatur perpendicularis EK quae circumferentiae occurrat in L, M; rursus igitur, ex hypothesi, rectangulum LK, KM aequale erit quadrato ex EK una cum rectangulo ME, EL. Bifariam secetur ML in N, et juncta FN circumferentiae occurrat in C, D; est igitur rectangulum CF, FD ipsi GF, FH aequale, hoc est quadrato EF una cum rectangulo GE, EH; et rectangulum CN, ND aequale est^a ipsi MN, NL, hoc est quadrato ex NL; totum igitur, rectangulum CF, FD una cum ipso CN, ND aequale est toti, quadrato scilicet ex EF, rectangulo GE, EH et quadrato ex NL, hoc est quadratis ex FK, KE, NL et rectangulo GE, EH, five rectangulo ME, EL; hoc est quadratis ex FK, NL et rectangulo LK, KM quod quadrato ex EK et rectangulo ME, EL est aequale. Rectangulum igitur CF, FD una cum ipso CN, ND aequale est (quadratis ex FK, NL, et rectangulo MK, KL, hoc est^b quadratis ex FK, KN, hoc est) quadrato ex NF.^{b 6. 2.} Commune auferatur rectangulum NF, FD, erit reliquum, rectangulum scilicet CN, DF una cum ipso CN, ND, hoc est rectangulum CN, NF aequale erit reliquo rectangulo DN, NF; recta igitur CN aequalis est ipsi ND. Et quoniam rectae ML, CD in circulo se mutuo bifariam secant in puncto N, erit^c N^{c 4. 3.} centrum circuli, quod quidem datum est. Data igitur est recta NK positione. Quoniam vero rectangulum LK, KM aequale est quadrato ex EK una cum rectangulo ME, EL, commune



est quadrato ex EF et rectangulo OE, EF, hoc est quadrato ex EF et rectangulo HE, EG. Q. E. D.

Atque haec sunt Loca et Porismata, ea scilicet quae habentur inter Propositiones praecedentes a septima usque ad hanc, quae Euclidis esse dignoscere valebam ex imperfecta admodum et mutila Pappi descriptione, et ope Lemmatum quae in ea conscripsit peritissimus Geometra, cui totum fere debetur quod de Analyfi Veterum jam notum est; solus enim Pappus nomina et argumenta librorum quos de ea scripserunt Veteres servavit. Descriptio autem quam tradit Porismatum adeo brevis est et obscura, et injuriâ temporis aut aliter vitata, ut nisi DEUS benigne animum et vires dederat in ea pertinaciter inquirere, in perpetuum forsan Geometras latuissent.

Ut vero omnia quae de hac materia servavit Pappus simul exhibeantur, reliqua ejus Lemmata in Porismata hic subjungemus, in eorum praesertim gratiam qui ulterius haec scrutari cupiunt.

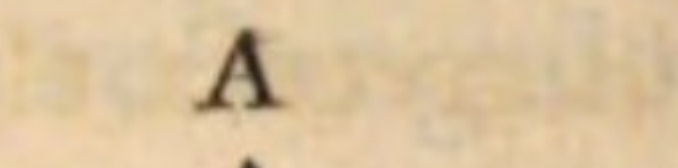
P R O P. LXVIII.

Quae est Pappi Prop. 145. Lib. 7.

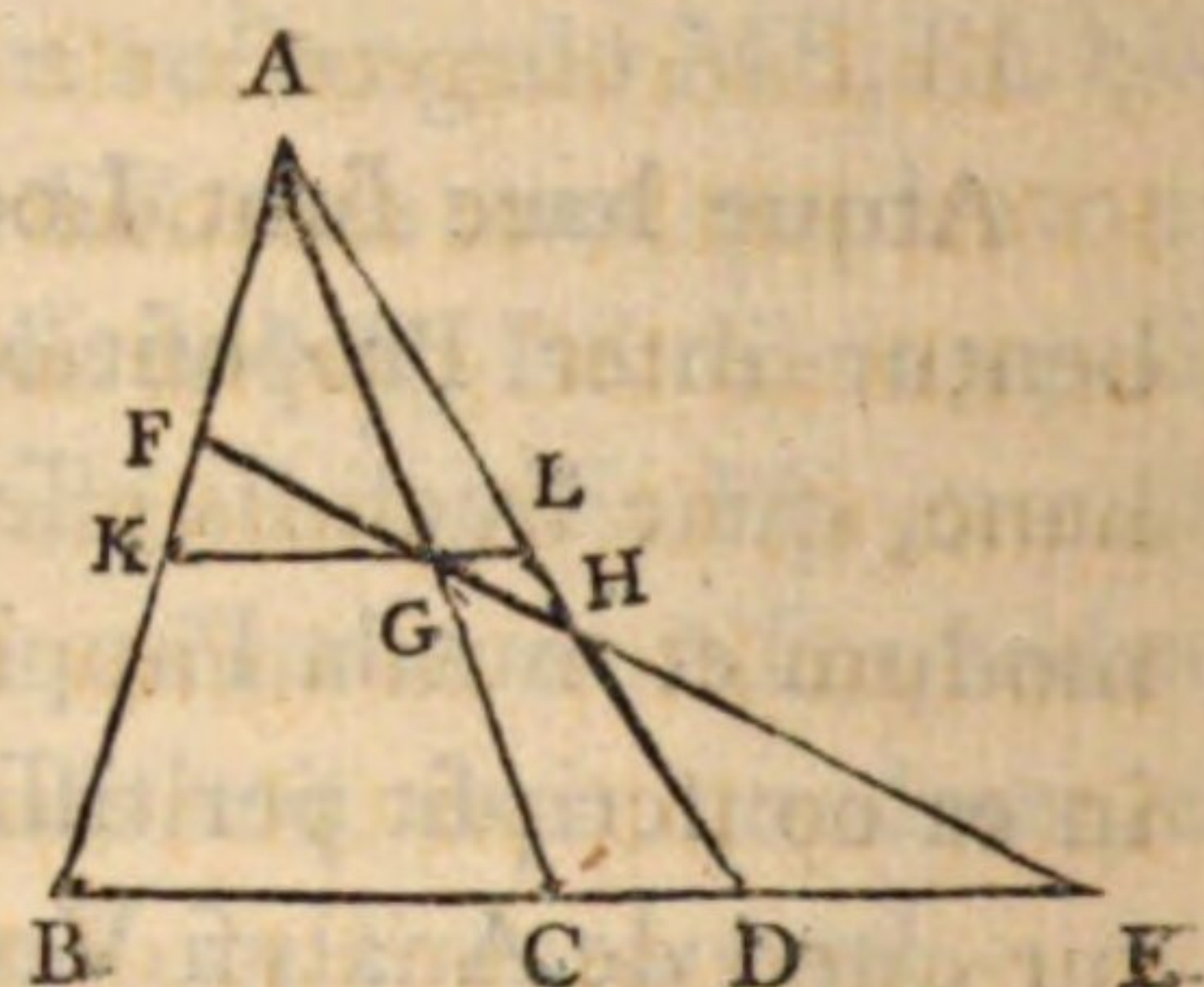
“ IN tres rectas lineas AB, AC, AD ab aliquo puncto E ducantur duae rectae lineae EF, EB; sitque ut EF ad FG, ita EH ad HG. Dico ut EB ad BC, ita esse ED ad DC.”

Ducatur per G ipsi BE parallela KL; itaque quoniam ut EF ad FG, sic est EH ad HG; ut autem EF ad FG, sic EB ad GK; et ut EH ad HG, sic DE ad GL; erit ut EB ad GK,

fic DE ad GL; et permutando, ut BE ad ED, ita KG ad GL. Sed ut KG ad GL, ita BC ad CD; ut igitur BE ad ED, ita BC ad CD; permutandoque, ut EB ad BC, ita ED ad DC. Quae vero ad casus pertinent, similiter explicabuntur.



Serenus Antiffensis hanc Propo-
sitionem demonstrat in Prop. 33. de
Sect. Cylindri, verum multo minus
elegantè.



COR. Ex hac Propositione Pappi, Locus sequens facile deducitur, viz.

Si in duas rectas lineas positione datas AB, AD ducatur a dato puncto E recta EHF, et secetur in G ita ut EF fit ad FG, ut EH ad HG; punctum G tanget rectam positione datam.

Sumatur enim in altera ex positione datis punctum B datum, et EB jungatur, cui occurrat juncta AG in C, et AD in D. Quoniam igitur est EF ad FG, ut EH ad HG, erit, per hanc Propositionem, EB ad BC, ut ED ad DC; et permutando, ut BE ad ED, ita BC ad CD. Data autem est ratio BE ad ED, quia ipsae rectae datae sunt, quare data est ratio BC ad CD; et data est BD, punctum igitur C datum est. Et datum est punctum A, recta igitur AC quam tangit punctum G positione data est.

Compositio.

Ducatur EB ad punctum datum B in AB, occurratque ipsi AD in D; et ut BE ad ED, ita fiat BC ad CD; juncta AC erit recta quam tangit punctum G. Ducatur enim utcunque recta EHF, et ipsi AC occurrat in G. Quoniam est BE ad ED, ut

BC ad CD, et permutando, ut EB ad BC, ita ED ad DC, erit, per hanc Prop. ut EF ad FG, ita EH ad HG.

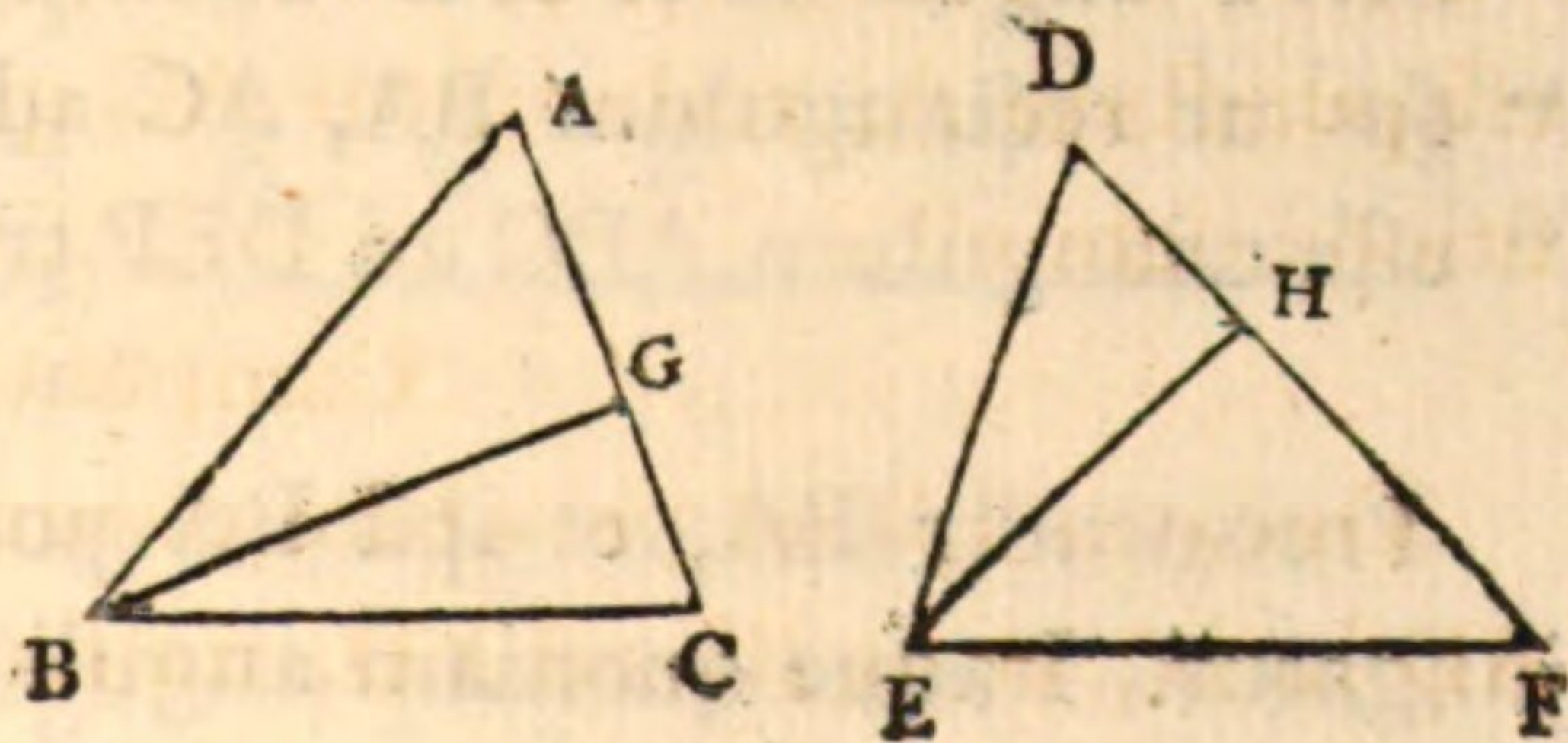
Et Loci conversa est haec; Si ducantur ad AB, AD rectae EDB, EHF, et secentur BD, FH in C, G ita ut EB fit ad BC, ut ED ad DC; et EF ad FG, ut EH ad HG; in recta linea erunt C, G, A puncta. Ducatur enim per G recta KL parallela ipsi BE; est igitur EF ad FG, ut EB ad KG; et EH ad HG, ut DE ad GL; quare ut EB ad KG, ita DE ad GL, et permutando, ut BE ad ED, ita KG ad GL; sed ut BE ad ED, ita BC ad CD, quia est EB ad BC, ut ED ad DC. Ut igitur KG ad GL, ita BC ad CD. Puncta igitur C, G, A in recta sunt linea, per Lemma ad notam ^b in Prop. 23. hujus.

P R O P. LXIX.

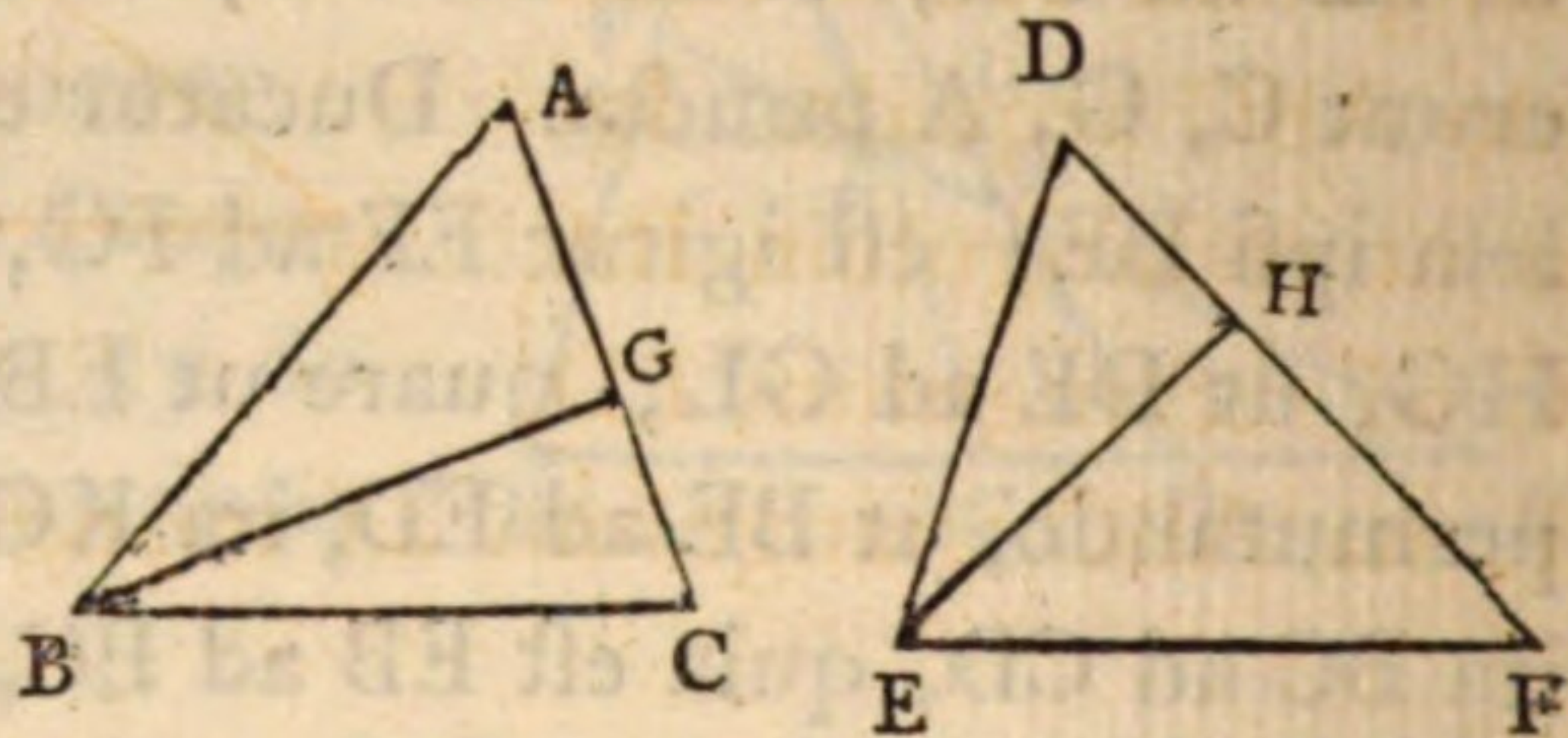
Quae est Prop. 146. Lib. 7. Pappi.

“SINT duo triangula ABC, DEF quae aequales habent angulos ad A, D. Dico ut rectangulum BA, AC ad rectangulum ED, DF, ita esse ABC triangulum ad triangulum DEF.”

Ducantur enim BG, EH perpendiculares “ad AC, DF,” et quoniam angulus ad A est aequalis angulo ad D, et anguli ad G, H recti; erit ut AB ad BG, sic DE ad EH. Sed ut AB ad BG, sic est rectangulum BA, AC ad ipsum BG, AC. Et ut DE ad EH, sic rectangulum ED, DF ad ip-



sum EH, DF. Igitur ut rectangulum BA, AC ad ipsum BG, AC, ita est rectangulum ED, DF ad ipsum EH, DF, et permutando. Sed ut rectangulum BG, AC ad rectangulum EH, DF, ita est ABC triangulum ad triangulum DEF, “utrumque
 “enim utriusque est du-
 “plum;” et ut igitur
 rectangulum BA, AC ad
 ipsum ED, DF, ita est
 ABC triangulum ad tri-
 angulum EDF.



Brevius ita; Completi
 intelligantur parallelogrammata quorum latera AB, AC; DE,
 DF; haec, et propterea ipsorum dimidia triangula ABC, DEF
 rationem habent compositam ex rationibus laterum per 23. 6.
 et rectangula BA, AC; ED, DF eandem habent rationem;
 est igitur ut rectangulum ad rectangulum, ita triangulum ad
 triangulum.

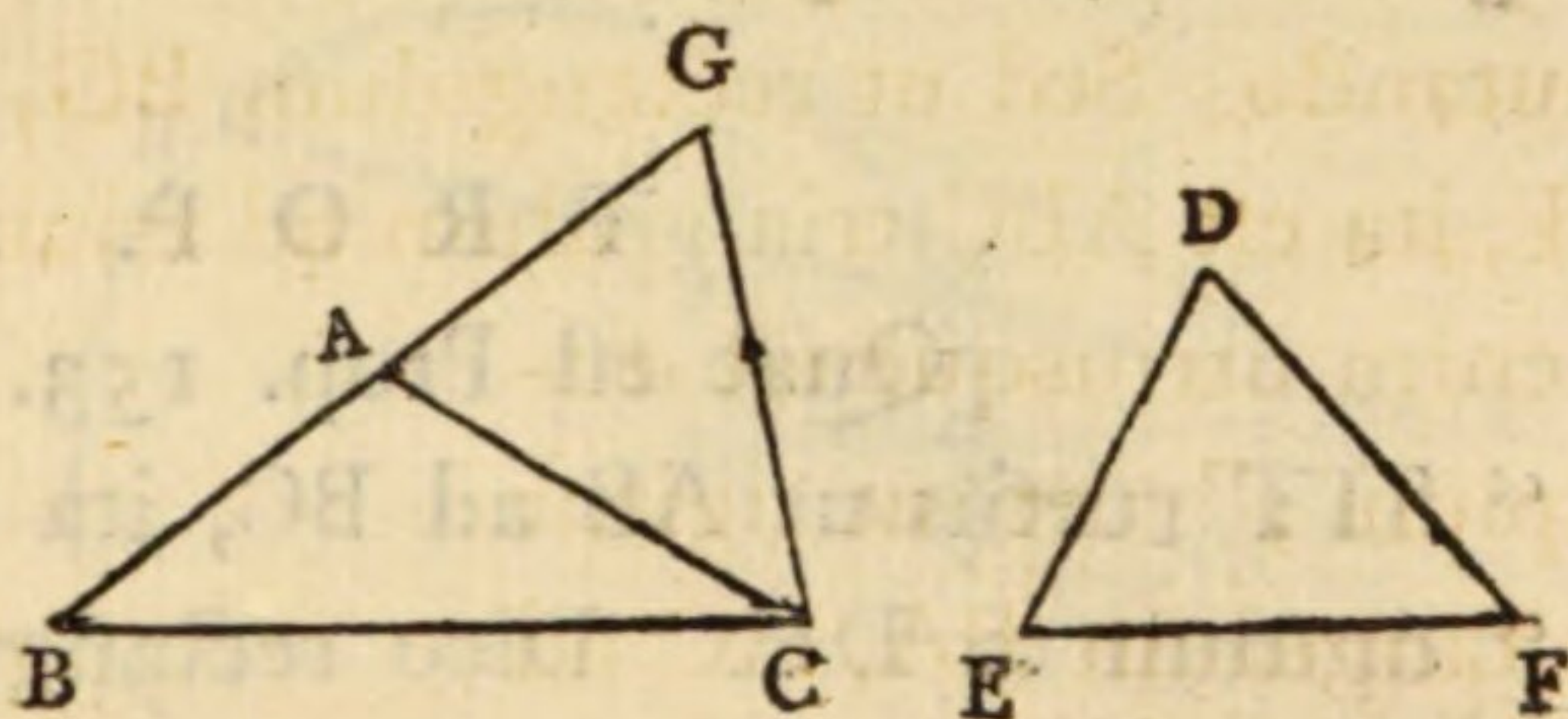
P R O P. LXX.

Quae est Prop. 147. Lib. 7. Pappi.

“SINT anguli ad A et D duobus rectis aequales. Dico rur-
 “sus ut rectangulum BA, AC ad rectangulum ED, DF, ita
 “esse triangulum ABC ad DEF triangulum.”

Producatur BA, et ipsi BA ponatur aequalis AG, et CG
 jungatur. Itaque quoniam anguli ad A et D sunt duobus rec-
 tis aequales, anguli vero BAC, CAG sunt itidem aequales
 duobus rectis, erit CAG angulus angulo ad D aequalis. Ut

igitur rectangulum GA, AC ad rectangulum ED, DF, ita ACG
 triangulum ad triangu-
 lum DEF. Aequalis au-
 tem est GA ipfi AB, et
 triangulum AGC trian-
 gulo ABC aequale. Igi-
 tur ut rectangulum BA,
 AC ad rectangulum ED,
 DF, ita ABC triangulum ad triangulum EDF.



P R O P. LXXI.

Quae est Prop. 152. Lib. 7. Pappi.

“ SIT ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex
 “ DC. Dico rectangulum AB, BC quadrato ex BD aequale
 “ esse.”

Ponatur enim ipfi CD aequalis DE; ergo rectangulum EA,
 AC una cum quadrato ex CD, hoc est una cum rectangulo
 CD, DE est aequale^a quadrato ex AD. Itaque quoniam est^{a 6. 2.}
 ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC,
 erit, dividendo, ut AC ad CB,
 videlicet ut rectangulum EA, AC ad rectangulum EA, BC,
 ita rectangulum EA, AC ad
 rectangulum CD, DE. Rectangulum igitur EA, BC rectan-
 gulo CD, DE est aequale. Ergo, ob proportionem^{*} et divi-
 dendo, ut AD ad DE, hoc est ad DC, ita DB ad BC, et ideo

A C B D E

* AE ad ED, ut DC ad CB.

reliqua AB ad reliquam BD est ut DB ad BC. Rectangulum igitur AB, BC quadrato ex BD aequale erit.

P R O P. LXXII.

Quae est Prop. 153. Lib. 7. Pappi.

“SIT rursus ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC. Dico rectangulum AB, BC aequale esse quadrato ex BD.”

6. 2. Ponatur nimirum similiter DE aequalis ipsi DC, erit ^a rectangulum CA, AE una cum quadrato ex CD, hoc est una cum rectangulo ED, DC aequale quadrato ex AD. Atque erit, dividendo, ut AC ad CB, hoc est ut rectangulum EA, AC ad rectangulum EA, CB, ita rectangulum EA, AC ad rectangulum ED, DC. Aequale igitur est rectangulum AE, CB rectangulo ED, DC; et, ob proportionem † et componendo, ut AD ad DE, sive DC, ita DB ad BC; quare et tota AB ad totam DB, est ut DB ad BC. Rectangulum igitur AB, BC quadrato ex DB est aequale.

A E D C B

P R O P. LXXIII.

Quae est Prop. 154. Lib. 7. Pappi.

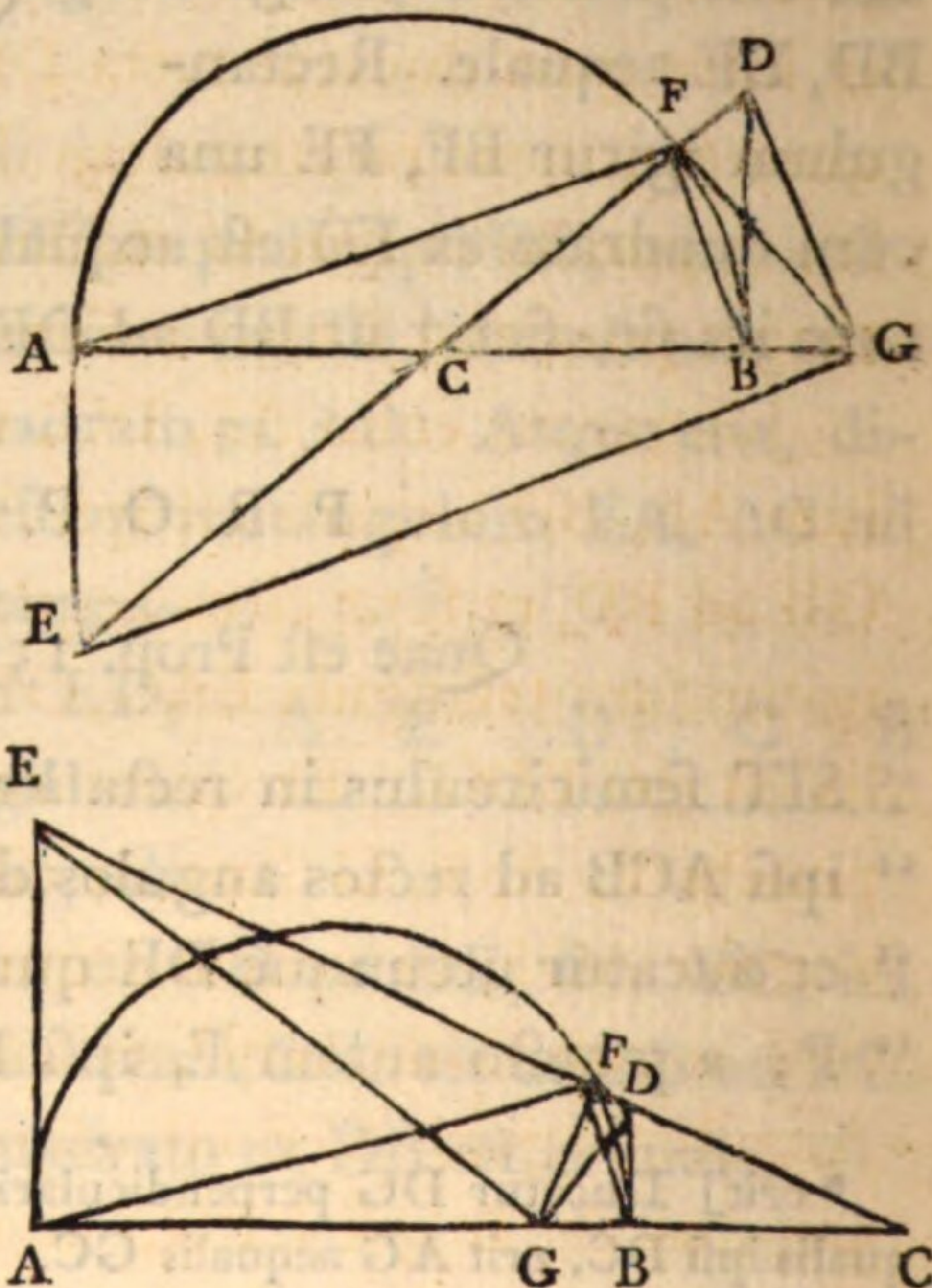
“CIRCULUM ABC contingant rectae AD, DC, et AC jungantur; “si ducatur utcunque ad circulum recta DB, occurratque circumferentiae in B, E et rectae AC in F.” Dico “ut BD ad DE, ita BF ad FE.”

† AE ad ED, ut DC ad CB.

“FG, quae cum AB in puncto G conveniat. Dico rectangulum AE, BD rectangulo AG, GB aequale esse.”

“Analyfis.”

“Sit ita;” erit igitur ut EA ad AG, sic GB ad BD, hoc
 6.6. est circa aequales angulos latera sunt proportionalia; quare^a,
 “junctis GE, GD,” angulus AGE est aequalis angulo BDG.
 Sed angulus quidem AGE
 aequalis est angulo AFE,
 qui in eodem segmento
 consistit, “sunt enim punc-
 “ta E, A, F, G in circulo
 “propter rectos angulos
 “EAG, EFG;” angulus
 vero BDG aequalis ipfi
 BFG, qui est in eodem seg-
 mento, “rursus enim punc-
 “ta B, G, D, F sunt in cir-
 “culo, propter rectos an-
 “gulos GBD, GFD.” Igi-
 tur angulus AFE aequalis
 est angulo BFG. Quod
 quidem ita se habet, cum
 uterque angulorum AFB, EFG sit rectus.



Compositio.

Quoniam uterque angulorum AFB, EFG est rectus, dempto
 communi angulo EFB, erit angulus AFE aequalis angulo
 BFG. Sed angulo quidem AFE aequalis est angulus AGE,
 qui in eodem segmento consistit; angulo autem BFG, eadem
 ratione, aequalis est angulus BDG. Angulus igitur AGE an-

gulo BDG est aequalis; atque est EAG rectus aequalis recto GBD; quare et reliquus aequalis reliquo, et triangulum triangulo simile erit. Ut igitur EA ad AG, sic GB ad BD, et propterea rectangulum AE, BD rectangulo AG, GB est aequale.

“ Ex hac Propositione sequentia tria Corollaria sequuntur.

“ COR. 1. Si a dato puncto G ad duas parallelas rectas positione datas AE, BD ducatur recta GBA perpendicularis, et inter ipsas ducatur recta DE abscindens segmenta AE, BD quae continent rectangulum dato rectangulo AG, GB aequale; a puncto autem G ducatur GF perpendicularis ad DE; tanget punctum F circumferentiam positione datam.

Jungantur enim AF, DG, GE, FB; et quoniam rectangulum AE, BD aequale est ipsi AG, GB, erit ut EA ad AG, ita GB ad BD, et sunt circa aequales angulos rectos, aequiangularia igitur sunt triangula EAG, GBD, quare angulus AGE aequalis est ipsi BDG. Et quoniam recti sunt anguli EAG, EFG, puncta E, A, F, G sunt in circulo; aequalis igitur est AFE angulo AGE in eodem segmento. Similiter quoniam recti sunt anguli GBD, GFD, erit angulus BFG aequalis ipsi BDG. Angulus igitur AFE est aequalis angulo BFG, et propterea angulus AFB ipsi EFG, angulo scilicet recto, aequalis est. Quoniam igitur data est recta AB positione et magnitudine, tanget punctum F circumferentiam super diametrum AB descriptum.

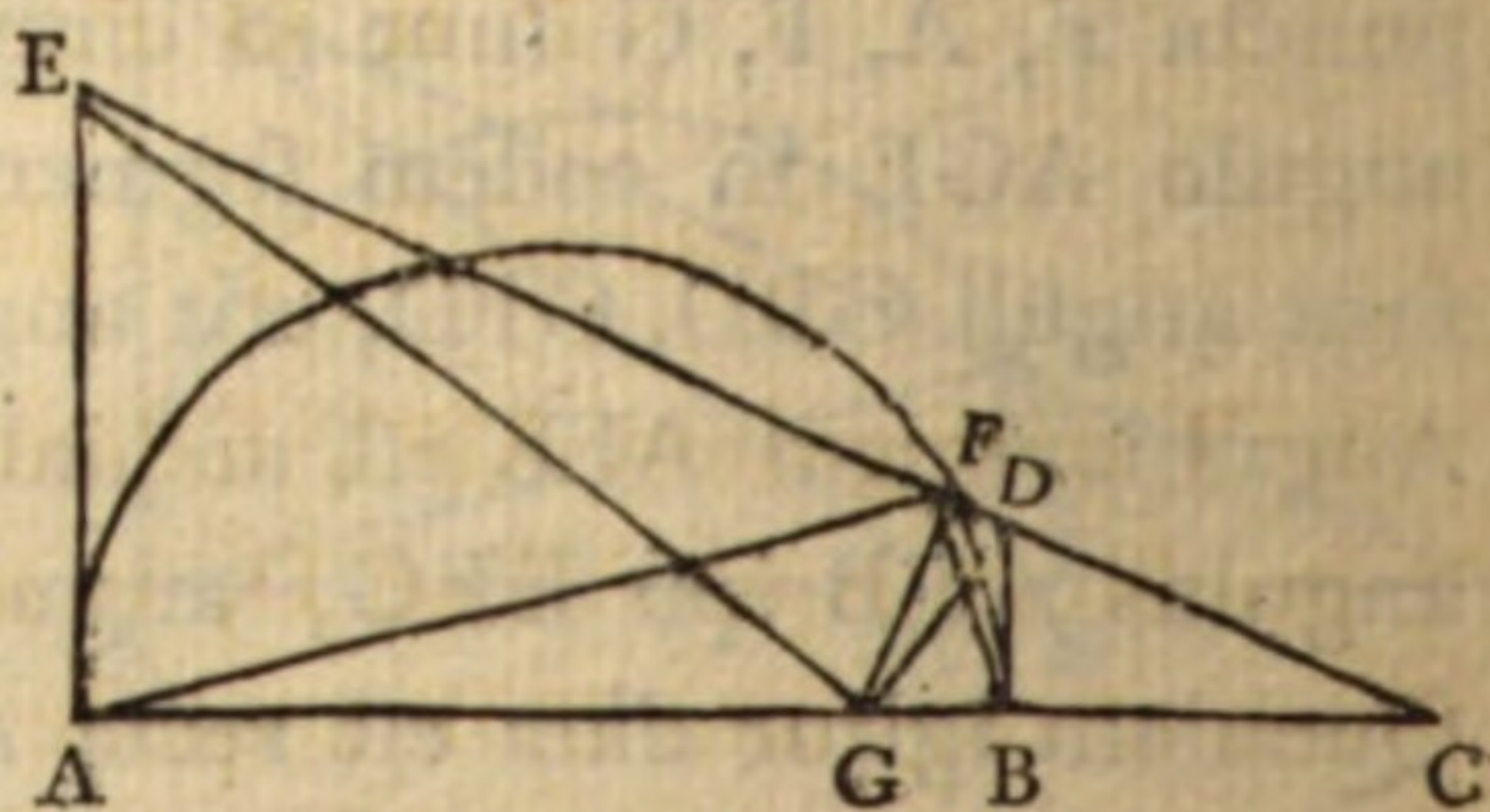
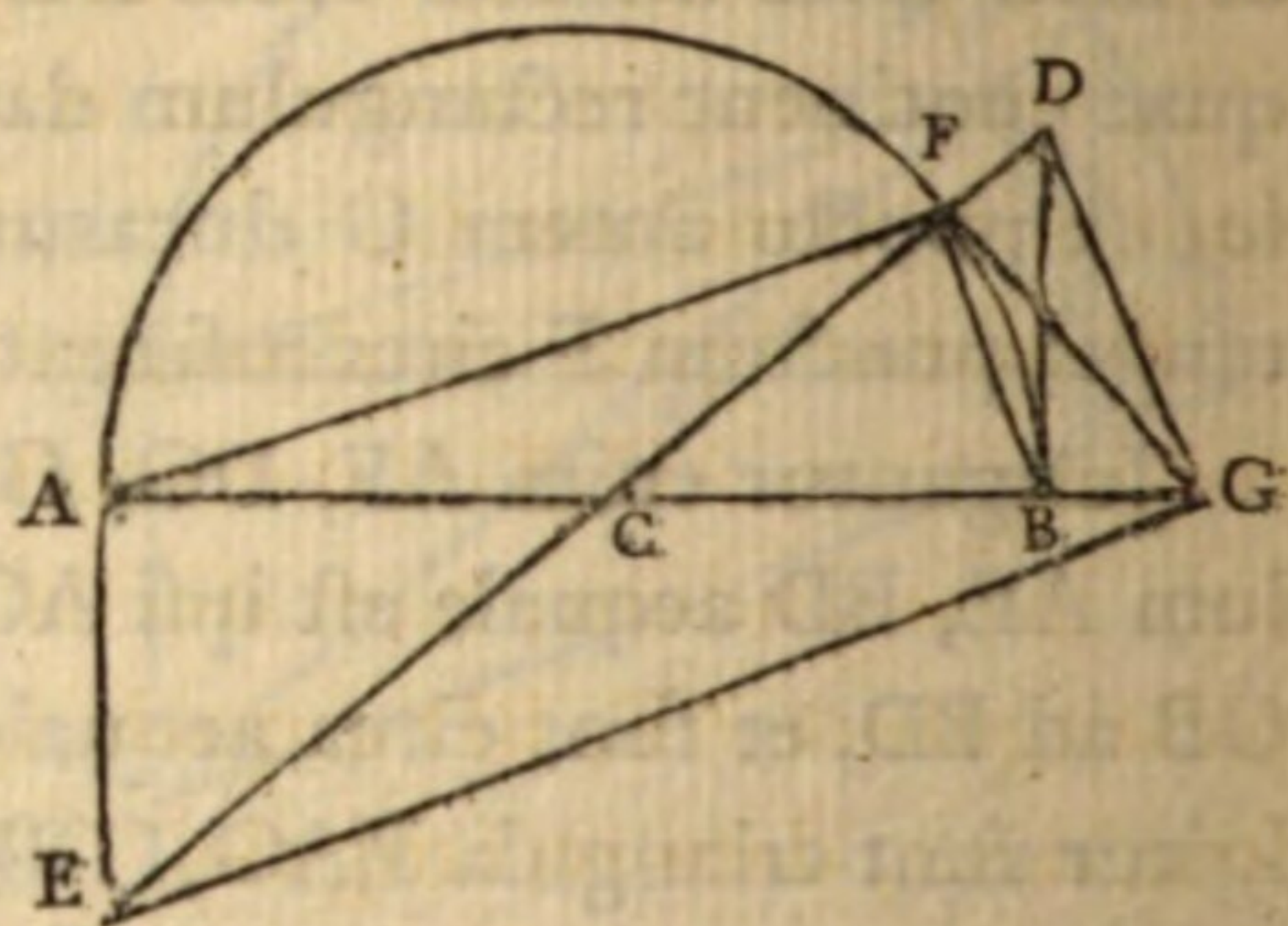
COR. 2. Et si rectae AE, BD contingant circulum AFB in verticibus diametri AB positione et magnitudine datae, et ducatur EFD abscindens segmenta AE, BD quae continent rectangulum dato spatio aequale, et a puncto F in quo ED circumferentiae occurrit ducatur FG ad rectos angulos ipsi

ED, occurratque ipsi AB in G; datum erit punctum G, hoc est FG verget ad punctum datum.

Est enim, per hanc Propositionem, rectangulum AG, GB aequale dato rectangulo AE, BD; datum igitur est AG, GB
^{b 85. vel 86.} rectangulum, et data est AB, data igitur ^b est AG, quare et punctum G datum est.
 Dat.

COR. 3. Data positione et magnitudine recta AB, si ducantur AE, BD circum super diametrum AB contingentes, datum erit punctum a quo si ducatur utcumque recta ad punctum in circumferentia, et a puncto hoc ducatur recta ductae ad angulos rectos, abscindet haec a contingentibus segmenta verticibus diametri adjacentia quae continebunt rectangulum dato rectangulo aequale.

Punctum igitur invenendum vel erit in diametro AB vel extra eam. Primò, ponatur illud esse extra diametrum; si igitur ab eo ducatur recta ad alterutrum verticem diametri, a quo vertice ducatur recta ductae ad angulos rectos, haec nullum abscindet segmentum a contingente quae per verticem hunc ducta est, abscindet autem segmentum a reliqua contingente, unde nullum erit rectangulum abscissis



contentum; contra hypothefim; non igitur punctum inveniendum est extra diametrum.

Sit igitur punctum inveniendum in diametro AB, fitque illud G, et ductâ utcumque GF ad circumferentiam ducatur per punctum F recta EFD ad rectos angulos ipsi GF et contingentibus occurrat in E, D; ex hypothefi igitur rectangulum AE, BD contentum aequale erit dato rectangulo; idem autem, per hanc Propositionem, aequale est rectangulo AG, GB, quod propterea datum erit; et data est AB, quare datum erit ^b punctum G.

^b 85. vel 86.
Dat.

Sumatur igitur in diametro AB punctum G quod faciet rectangulum AG, GB dato rectangulo aequale, erit G punctum inveniendum; nam ductis GF, EFD, ut dictum fuit, erit rectangulum AE, BD aequale ipsi AG, GB, hoc est, ex constructione, dato rectangulo.

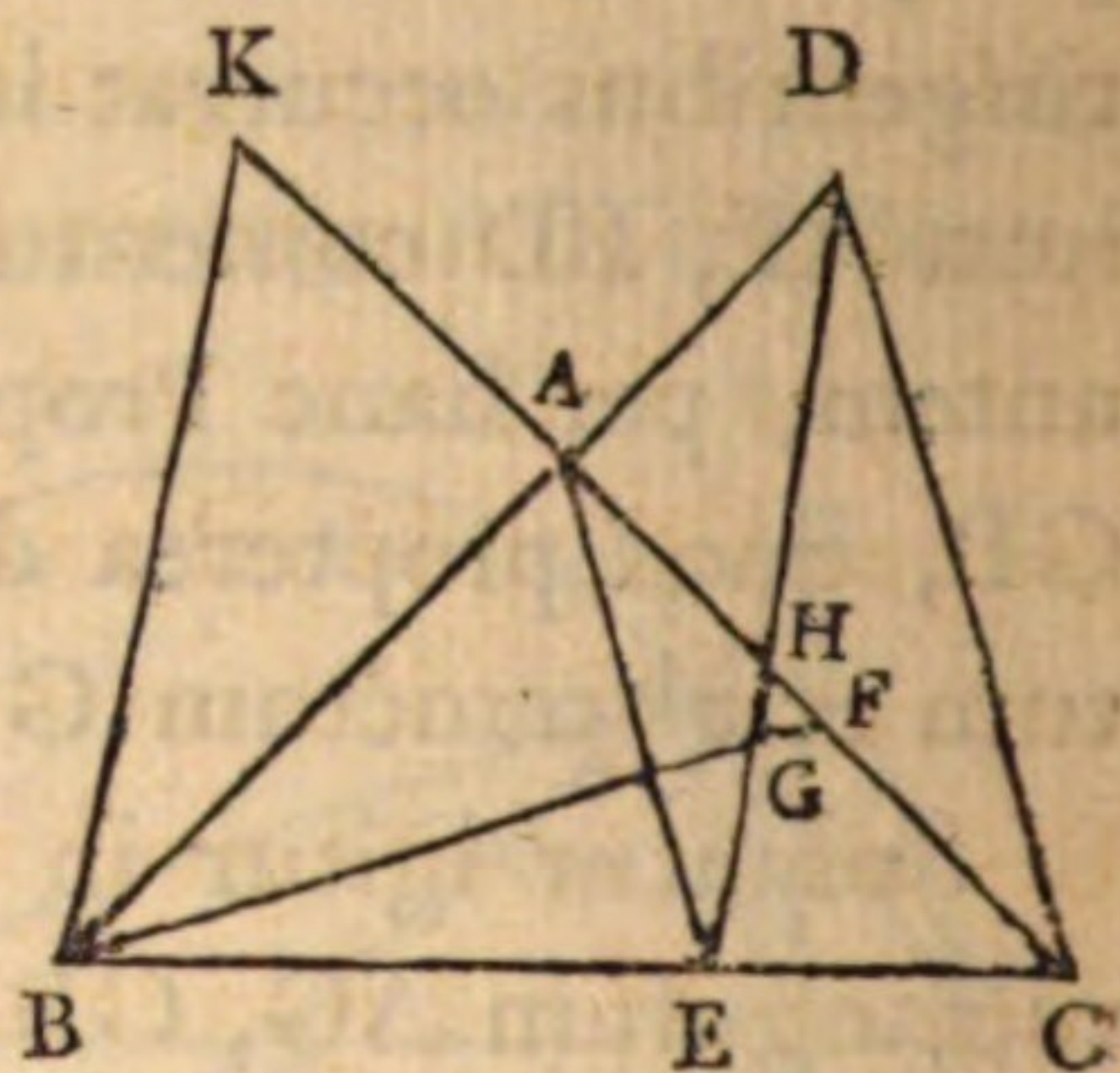
P R O P. LXXV.

Quae est Prop. 158. Lib. 7. Pappi.

“ SIT triangulum ABC, habens latus AB aequale ipsi AC, †
 “ producaturque AB ad D, et a puncto D ducatur DE faci-
 “ ens triangulum BDE aequale triangulo ABC. Dico si unum
 “ ex aequalibus lateribus, quod est ad triangulum aequale,
 “ bifariam secetur per “ rectam” lineam BF “ quae occurrat
 “ ipsi DE in G,” ut utraque FB, BG ad FG, sic esse quadra-
 “ tum ex AF ad quadratum ex FH.”

† Nihil est in demonstratione quod pendet ex aequalitate laterum AB, BC, tenet enim in quocunque triangulo; Propositio igitur sine dubio est corrupta.

- “ Sit ita, et” ducatur per B ipsi DE parallela BK, et CA ad
 A K producat; ergo ut utraque FK, KH ad FH, hoc est ut
 rectangulum contentum utraque FK, KH et FH ad quadra-
 tum ex FH, ita est quadratum ex AF ad quadratum ex FH.
 Quod igitur utraque FK, KH et FH
 B continetur, hoc est excessus quadra-
 torum ex FK, KH aequale est qua-
 drato ex AF. Excessus igitur quadra-
 torum ex KF, FA est quadratum ex
 KH. Sed quadratorum ex KF, FA
 6. 2. excessus est ^a rectangulum CK, KA,
 “ bifariam enim secta est AC in F;”
 ergo rectangulum CK, KA quadrato
 ex KH est aequale; ac propterea ut CK ad KH, hoc est ut
 CB ad BE, ita est HK ad KA, hoc est ut DB ad BA. Quod
 C quidem ita se habet, “ quoniam enim triangula DBE, ABC
 15. 6. “ sunt aequalia, et communem habent angulum DBC, est ^b ut
 “ CB ad BE, ita DB ad BA.”



Componetur autem hoc modo.

Quoniam triangulum DBE est aequale triangulo ABC, et
 sunt circa communem angulum DBC, erit ^b ut CB ad BE, hoc
 est ut CK ad KH, ita DB ad BA, hoc est ut HK ad KA; ut
 igitur CK ad KH, ita HK ad KA. Quare CK, KA rectangu-

A. Ergo ut utraque FK, KH ad FH, &c.] parallelae enim sunt BK, GH,
 ergo utraque FK, KH est ad FH, ut utraque FB, BG est ad FG, hoc est, ex
 hypothesi, ut quadratum ex AF ad illud ex FH.

B. Hoc est excessus quadratorum ex FK, KH] Si enim producat HK ut
 pars producta aequalis sit ipsi HK, res patebit ex 6. 2.

C. Quae inversis commatibus notantur breviora sunt iis apud Pappum quo-
 rum loco ponuntur. Eadem mutantur in compositione.

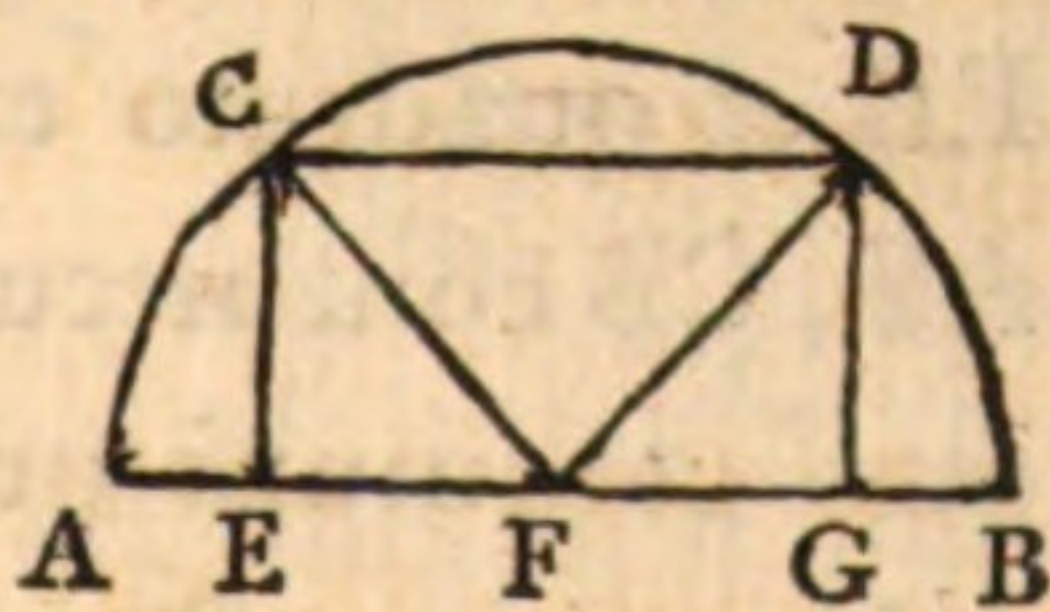
lum quadrato ex KH est aequale. Sed rectangulum CK, KA est excessus quadratorum ex KF, FA, ergo et quadratorum ex KF, FA excessus est quadratum ex KH, et ob id quadratum ex FA est excessus quadratorum ex FK, KH. Quadratorum autem ex FK, KH excessus est id quod utraque FK, KH et FH continetur; quod igitur FK, KH et FH continetur aequale est quadrato ex FA. Igitur ut rectangulum contentum utraque FK, KH et FH ad quadratum ex FH, hoc est ut utraque FK, KH ad FH, ita est quadratum ex AF ad quadratum ex FH. Sed ut utraque FK, KH ad FH, ita utraque FB, BG ad FG; ut igitur utraque FB, BG ad FG, ita est quadratum ex AF ad quadratum ex FH. Q. E. D.

P R O P. LXXVI.

Quae est Prop. 162. Lib. 7. Pappi.

“SIT semicirculus in recta linea AB, et ipsi AB parallela sit CD, ducanturque CE, DG perpendiculares “ad AB.” Dico “AE ipsi GB aequalem esse.”

Sumatur centrum circuli, quod sit F, et CF, FD jungantur. Ergo CF est aequalis FD, ac propterea quadratum ex CF quadrato ex FD aequale erit. Sed quadrato quidem ex CF aequalia sunt quadrata ex CE, EF; quadrato autem ex FD aequalia quadrata ex DG, GF. Ergo quadrata ex CE, EF quadratis ex DG, GF aequalia sunt; quorum quadratum ex CE est aequale quadrato ex DG, reliquum igitur quadratum ex EF reliquo ex FG quadrato est aequale, ideoque recta linea EF aequalis rectae FG; est autem et tota



AF aequalis toti FB. Ergo et reliqua AE reliquae GB aequalis erit. Q. E. D.

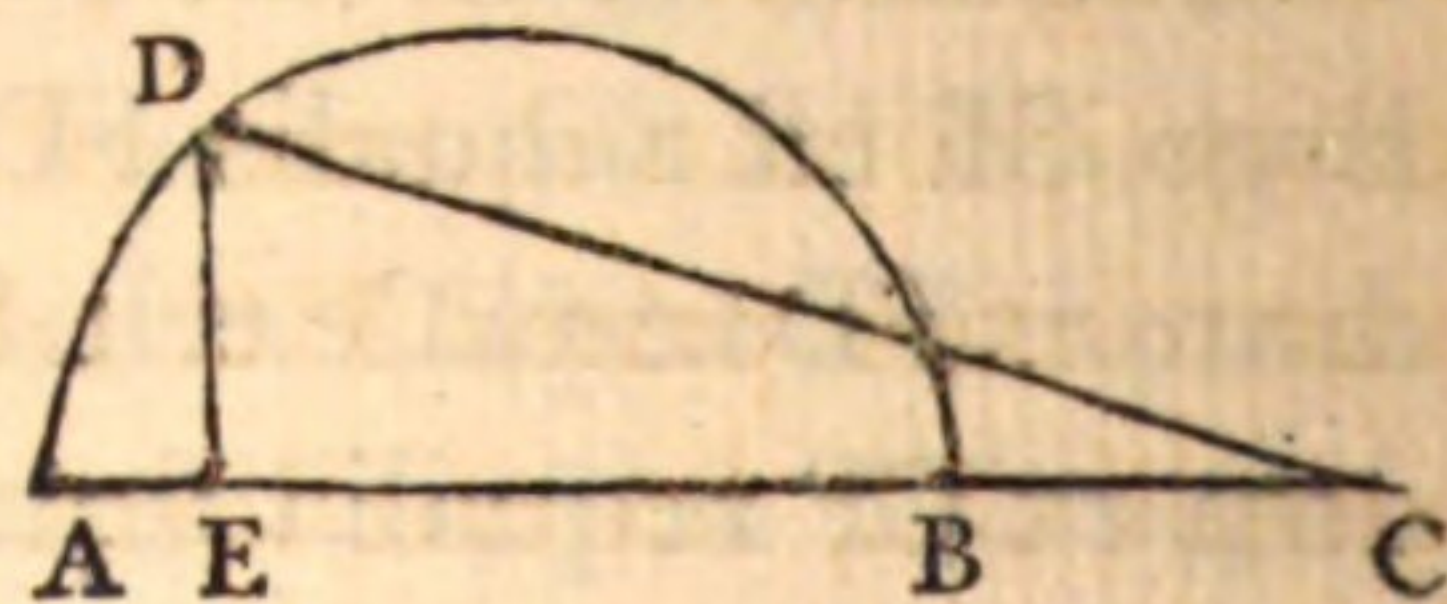
“Observare licet insignem differentiam inter demonstrationes hujus et praecedentis Propositionis 73. Praecedens enim nimis videtur esse brevis, et quaedam in ea supplenda sunt; haec autem instar Elementorum admodum est explicita. Idem autem in multis aliis Pappi observandum est.”

P R O P. LXXVII.

Quae est Prop. 163. Lib. 7. Pappi.

“SIT semicirculus in recta linea AB, atque a quolibet puncto
“C “in ea producta” ducatur CD, et perpendicularis agatur
“DE. Dico quadratum ex AC superare quadratum ex CD eo
“quod utraque AC, CB et AE continetur.”

“Sit ita;” erit igitur quadratum ex AC aequale quadrato ex CD, hoc est aequale quadratis ex DE, EC, et ei quod utraque AC, CB et AE continetur. Quare, ablato communi rectangulo CA, AE, reliquum rectangulum AC, CE est aequale quadrato ex DE, hoc est rectangulo AE, EB et quadrato ex CE, et ei quod AE, CB continetur. Rursusque ablato communi quadrato ex CE, rectangulum AE, EC quod relinquitur est aequale rectangulo AE, EB, et contento AE, BC; quod quidem ita se habet^a.



Compositio, ut Commandinus observat, manifesta est.

Et si punctum C sumatur inter A, B puncta, non absimiliter

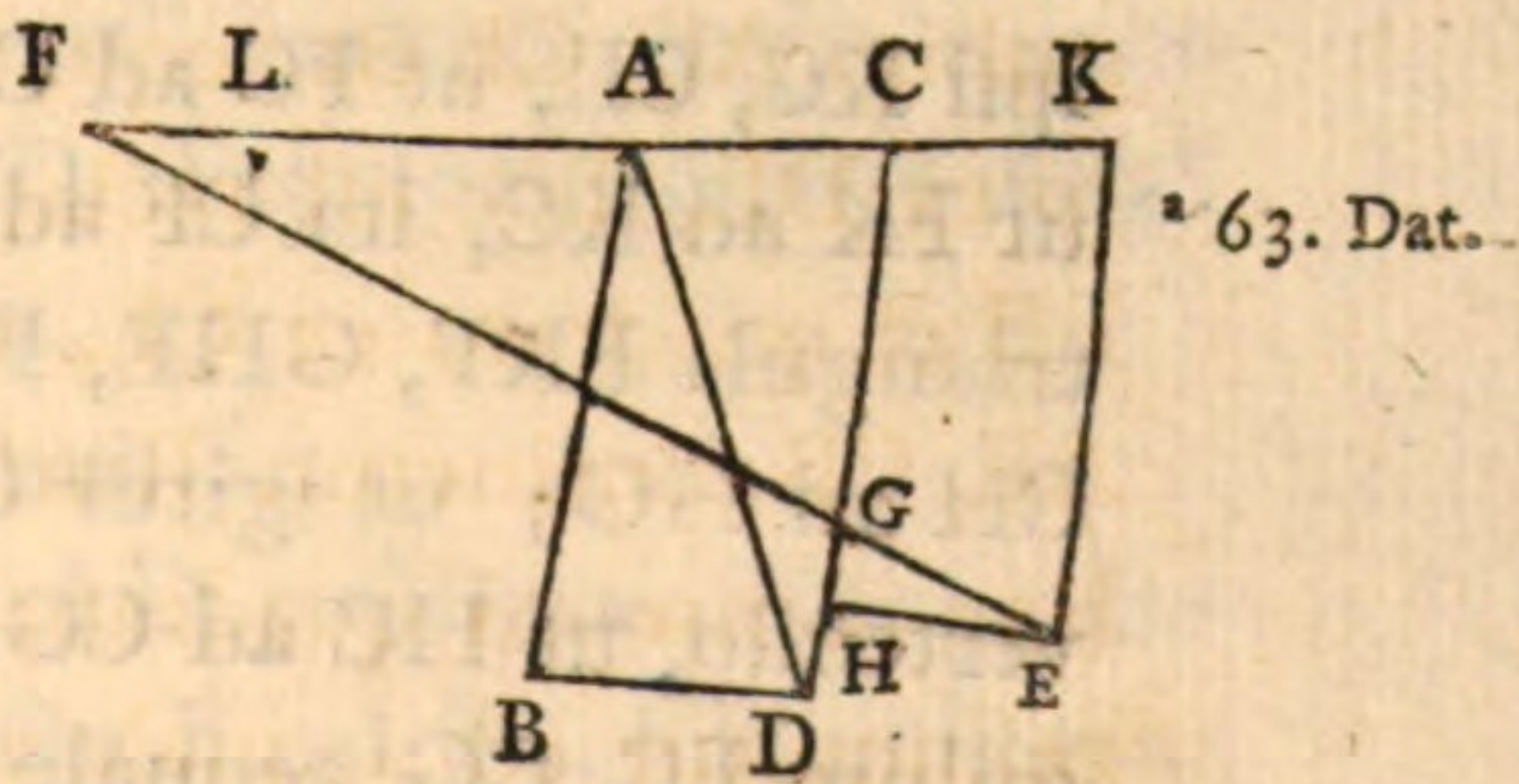
ostendetur quadratum ex AC superare quadratum ex CD eo quod excessu ipsarum AC, CB et AE continetur, scilicet si AC major fuerit quam CB. Sed si CB major fuerit quam AC, quadratum ex CD superabit quadratum ex AC eo quod excessu ipsarum CB, AC et AE continetur.

P R O P. LXXVIII.

Quae necessaria est Problemati in Propositione sequente.

“ DATIS positione duabus rectis AC, CD, et dato puncto E in
 “ angulo qui deinceps est angulo ACD, ducenda est recta EGF
 “ a puncto E quae ex ipsis CA, CD abscindat segmenta CF,
 “ CG, puncto C adjacentia, quae continent rectangulum dato
 “ spatio aequale.” Est Cas. 1. Loci 3. Lib. 1. Apollonii de Sectione Spatii a clarissimo Halleio restituti.

Factum sit; et a puncto E ducantur EH, EK parallelae ipsis AC, CD; et quoniam datum est punctum E, datae erunt EH, EK. Rectangulum igitur HE, EK datam habet rationem ad rectangulum FC, CG, utrumque enim ipsorum datum est. Ut igitur
 tur^a latus primi HC ad latus secundi GC, ita erit latus reliquum secundi CF ad eam ad quam reliquum primi latus CK datam habet rationem, quam sc. habet rectangulum HE, EK ad FC, CG. Sit ea CL; ut igitur HC ad CG, ita FC ad CL, et convertendo, ut CH ad HG, ita CF ad FL; aequiangula autem sunt tri-



ducta auferret quidem segmenta quae continent rectangulum dato spatio aequale, non quidem a rectis CA, CD, sed ab iis qui ipsis sunt in directum.

P R O P. LXXIX.

Quae est Prop. 163. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 38. et ultimum in Porismata Euclidis.

“ PARALLELOGRAMMO AD positione dato, a dato puncto E
 “ ducere rectam lineam EF, et facere triangulum FCG paral-
 “ lelogrammo AD aequale.”

Factum jam fit; quoniam igitur FCG triangulum aequale est parallelogrammo AD, parallelogrammum vero AD duplum est trianguli ADC; et triangulum FCG trianguli ADC duplum erit. Sed ut triangulum ad triangulum, quod circa eundem angulum ad C consistunt, ita rectangulum FC, CG ad rectangulum AC, CD². Datum autem est rectangulum AC, CD; igitur et ipsum FC, CG datum. Et a dato puncto E ad rectas lineas AC, CD datas positione ducta est EF abscindens “ rectas FC, CG quae continent” spatium aequale dato spatio, videlicet duplo ipsius AC, CD. Positione igitur “ data” est ipsa EF, per Prop. praecedentem.

Vide fig. in
 Prop. praecedente.

* 69. hujus.

Componetur autem sic.

Sit parallelogrammum quidem AD positione datum, datum autem punctum E; et a puncto E ad FC, CD positione datas ducatur recta linea EF abscindens “ rectas FC, CG quae continent” spatium FC, CG aequale dato spatio, videlicet duplo ipsius AC, CD; et ex iisdem quae in resolutione dicta

X x x

sunt, ostendemus triangulum FCG parallelogrammo AD aequale. Recta igitur EF Problema efficit. Constat autem ipsam solam hoc efficere, quoniam et illa sola est.

Inter varia Opera Mathematica peritissimi Geometrae Petri Fermatii, quae post mortem ejus impressa fuerunt Tolosae anno 1679, habentur in pagg. 117, 118 quinque Propositiones quas Porismata vocat; earum secunda est de Parabolae affectione quadam, quam in Prop. 19. Lib. 5. de Sectionibus Conicis edit. 2. demonstravimus; haec autem, ut et prima, tertia et quinta, ut eas Fermatius enuntiat, sunt mera Theoremata, et quarta est Datum. Dicit quidem nihil vetare quominus in Problemata transformentur, et exemplum data in Propositione quinta, quam, suppressis quibusdam in enuntiatione, in Problema vertit quod revera est Porisma; et addit, “nec latet ex supradicto Theoremate,” in Propositione sc. ejus 5ta, “constructio, si enim ponatur recta AZ esse ad quartam partem ZD in ratione data, omnia constabunt.” Unde liquet Fermatium Porismatis hujus solutionem minime investigavisse, sed constructionem ejus ex Theoremate in quod inciderat deduxisse. Et idem de reliquis ejus Propositionibus intelligendum est. Quoniam vero nullus, quantum scio, Propositiones has ut Theoremata, nedum ut Porismata, haecenus demonstravit, eas, in formam Porismatum redactas, ut sequitur investigavimus.

P R O P. LXXX.

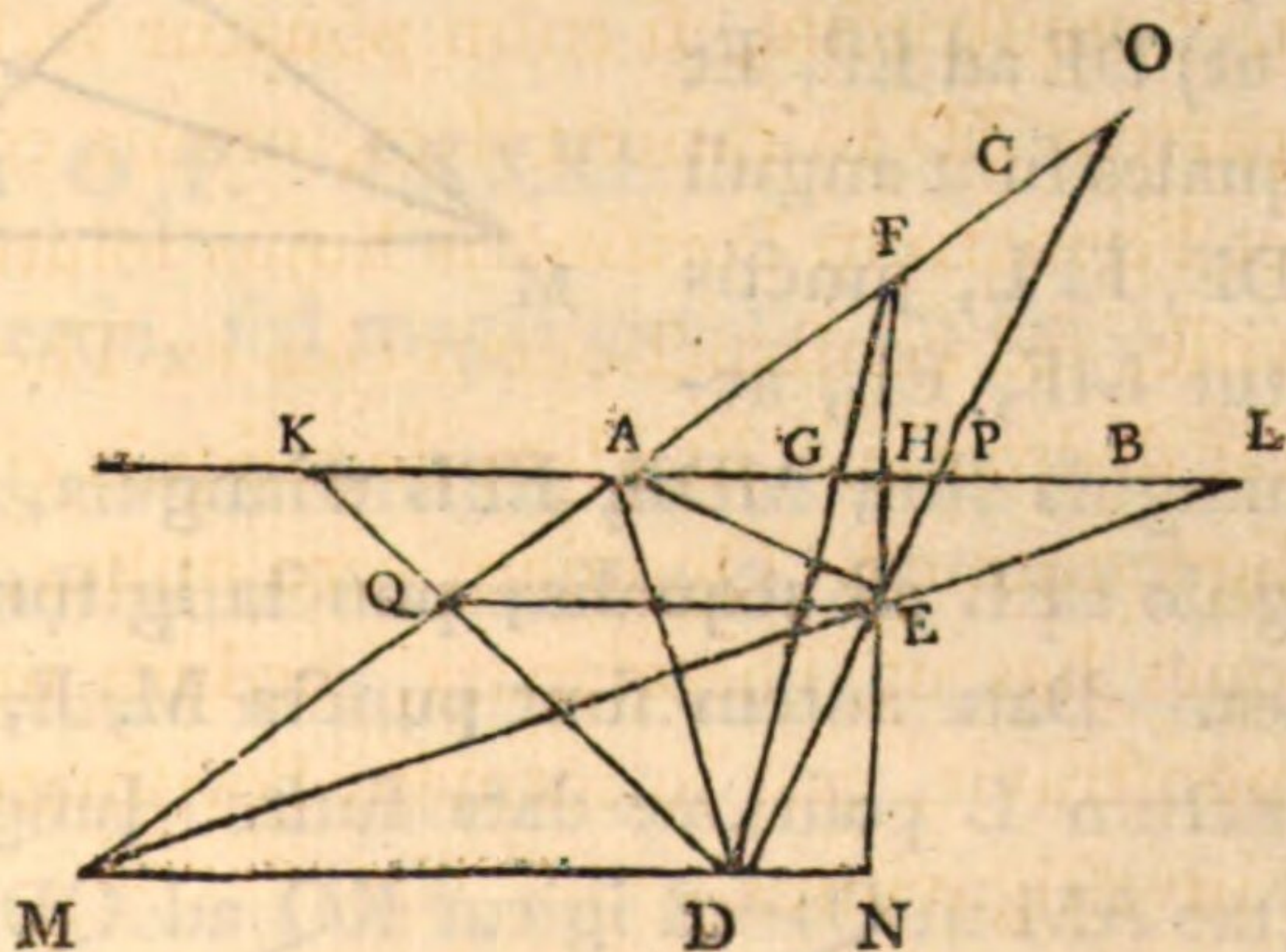
Quae est Fermatii prima.

“ DATIS positione duabus rectis AB, AC, datisque extra ip-
 “ fas duobus punctis D, E; si ab ipsis ad alteram rectarum
 “ AC utcunque inflectantur rectae DF, EF reliquae positione
 “ datae AB occurrentes in G, H; abscindunt inflexae ex ipsa
 “ AB duo segmenta, datis punctis adjacentia, quae quidem
 “ inveniendae sunt, quae datum continebunt rectangulum,
 “ quod etiam inveniendum est.”

Putamus Porisma verum esse, atque puncta K, L ea esse quibus
 adjacent segmenta rectis DF, EF abscissa; puncta autem K,
 L data esse ostendendum est, ut et datum esse rectangulum
 contentum segmentis abscissis quae punctis hisce adjacent.

Igitur, ex hypothese,
 rectangulum KG,
 HL datum est. Rur-
 sus inflectantur rec-
 tae DA, EA ab iis-
 dem D, E punctis ad
 punctum A in quo
 rectae positione da-
 tae AB, AC sibi mu-
 tuo occurrunt; rect-
 angulum igitur KA,

AL, ex hypothese, datum erit, quare idem est aequale rectan-
 gulo KG, HL. Ut igitur GK ad KA, ita est AL ad LH, di-
 videndoque, ut GA ad AK, ita AH ad HL; et permutando,



datae DQ , AB sibi mutuo occurrunt, datum est; et datum ostensum est punctum L . Rectangulum igitur KA , AL , et propterea ipsum KG , HL datum est. Quae fuerunt ostendenda.

Componetur ita.

A datis punctis D , E ad rectam AC ducantur DM , EQ parallelae ipsi AB , et producantur junctae DQ , ME ad AB in punctis K , L ; erunt K , L puncta invenienda, et rectangulum inveniendum erit ipsum KA , AL . Inflectantur enim a punctis D , E ad rectam AC , utcunque DF , EF quae ipsi AB occurrant in G , H ; erit rectangulum KG , HL aequale rectangulo KA , AL . Est enim KA ad MD , ut (AQ ad QM , hoc est ut HE ad EN , hoc est ut) HL ad MN ; et permutando, ut KA ad HL , ita MD ad MN , et ita est AG ad AH ; igitur^b ut KA ^{b 12. 5.} ad HL , ita KG ad AL . Quare rectangulum KG , HL rectangulo KA , AL est aequale. Notandum autem est rectam DE non debere parallelam esse rectae AC .

P R O P. LXXXI.

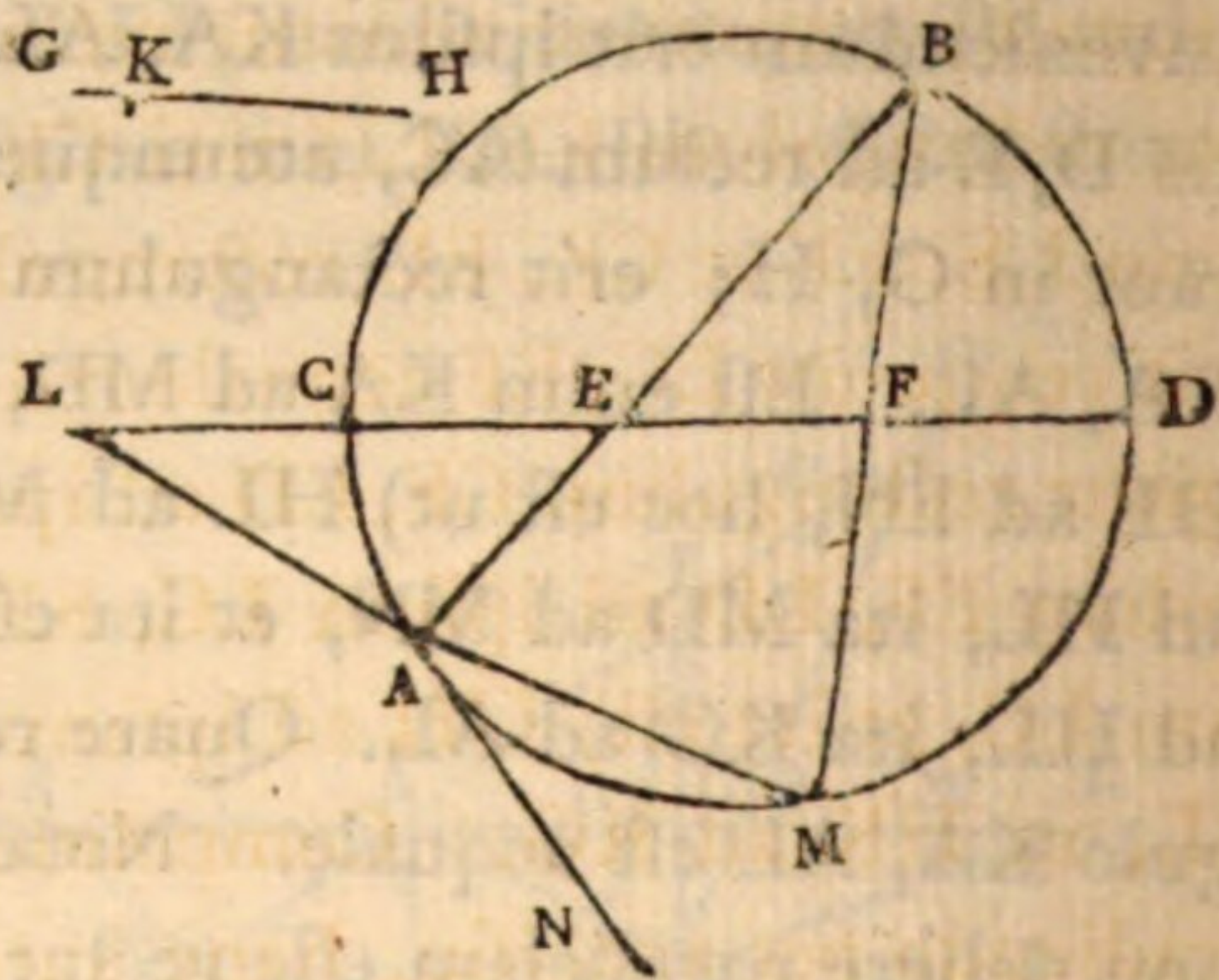
Quae est Fermatii tertia, sed magis generalis reddita.

“ SI a dato puncto A in circumferentia positione data, ducatur utcunque recta AB quae occurrat rectae CD positione datae et circulo inscriptae in E , et circumferentiae rursus in B ; datum erit punctum ad quod si ducatur recta a puncto B quae rectae CD occurrat in F , erit ratio rectanguli CF , ED ad rectangulum CE , FD eadem rationi datae quam habet recta GH ad ipsam GK .”

Putat Porisma verum esse; quoniam igitur, ex hypothesi, est rectangulum CF , ED ad ipsum CE , FD , ut recta HG ad

ipsam GK, dividendo, erit rectangulum EF, CD ad ipsum CE, FD, ut recta HK ad ipsam KG. Sit ut HK ad KG, ita DC ad CL, et ita erit rectangulum EF, CD ad ipsum EF, LC; ut igitur rectangulum EF, CD ad ipsum CE, FD, ita est rectangulum EF, CD ad rectangulum EF, LC, et propterea rectangulum CE, FD aequale est ipsi EF, LC. Commune addatur rectangulum CE, EF, totum igitur rectangulum CE, ED, hoc est ipsum AE, EB aequale est toti rectangulo LE, EF; quare in circulo sunt A, L, B, F puncta, et propterea, junctâ AL, angulus ALE aequalis est angulo ABF. Quoniam vero data est ratio DC ad CL, data e-

The diagram illustrates a circle with several points and lines. A horizontal line passes through points C, E, F, and D. A vertical line passes through points B, F, and M. Point A is on the circle's circumference. Lines connect A to B, A to L, A to M, and A to N. A line segment GK is shown above the circle, with K on a horizontal line and G to its left. Point H is on the line segment BK. Point L is to the left of the circle, and point N is below it. The diagram is used to prove a geometric proposition involving rectangles and ratios.



rit recta CL, data enim est DC, et punctum L erit datum; et datum est punctum A, quare recta AL positione data est, datusque erit angulus ALE, ut et ipsi aequalis angulus ABF. Quoniam igitur datum est punctum A, verget^a recta BF ad punctum in circumferentia datum; sit hoc punctum M. Datum igitur est punctum M, quod erat ostendendum.

Componetur ita.

Fiat ut HK ad KG, ita DC ad CL, jungatur AL, et ducatur AN circulum contingens in puncto A, et fiat angulus NAM aequalis ipsi ALC, occurratque AM circumferentiae rursus in M; erit M punctum inveniendum; hoc est, si a puncto A ducatur utcunque AEB circumferentiae rursus oc-

currens in B, et diametro CD in E, junctâ BM quae occurrat CD in F, erit rectangulum CF, ED ad ipsum CE, FD, ut recta GH ad ipsam GK.

Quoniam enim circulum contingit AN, AM vero secant, erit ^b angulus ABM aequalis angulo NAM, hoc est angulo ^b 32. 3. ALC; in circulo igitur sunt puncta A, L, B, F. Ergo rectangulum LE, EF rectangulo (AE, EB, hoc est ipsi) CE, ED est aequale; commune addatur rectangulum FE, ED, totum igitur rectangulum EF, LD toti CF, ED est aequale; et ex iisdem LE, EF et CE, ED rectangulis ablato communi CE, EF, erit reliquum LC, EF aequale reliquo rectangulo CE, FD. Ut igitur rectangulum CF, ED ad ipsum CE, FD, ita est (rectangulum EF, LD ad ipsum LC, EF, et ita est recta DL ad ipsam LC, et ita est) GH ad ipsam GK, quia DC facta fuit ad CL, ut HK ad KG. Compositio etiam fieri potuisset retrogradiendo per analysin, hanc autem paulo brevior, varietatis gratia dedimus.

Et ex hoc apparet Fermatium Theorema, quod vocat Porisma suum tertium, non satis generaliter proposuisse; requirit enim rectam AM parallelam esse diametro CD; quamvis autem positionem habere potest AM, ut et CD. Ita autem, in forma Dati, proponendum fuit; Si in circulo inscripta fuerit recta AM positione data, et ad circumferentiam utcunque inflectantur rectae AB, MB quae rectae CD positione datae et circulo inscriptae occurrant in E, F punctis; data erit ratio rectanguli CF, ED ad rectangulum CE, FD. Cujus demonstratio, ductâ scilicet ad CD rectâ AL faciente angulum ALC aequalem dato angulo ABM, ex praecedente compositione liquet.

P R O P. LXXXIII.

Quae est Fermatii quarta.

“SIT circulus cujus diameter AB positione et magnitudine
 “data est, et in AB data sint duo puncta aequaliter a centro
 “distantia; data erunt alia duo puncta a quibus si ad cir-
 “cumferentiam utcunque inflectantur duae rectae, abscin-
 “dent hae duo segmenta diametri datis punctis adjacentia,
 “quorum summa quadratorum data erit.”

CAS. I. Quando duo puncta data sunt ipsius diametri ter-
 mini.

Puta Porisma verum esse, atque puncta C, D ea esse quae
 invenienda sunt. Igitur inflexis utcunque CE, DE ad circum-
 ferentiam in E, quae diametro AB in F, G punctis occurrant,
 summa quadratorum ex AG, FB, ex hypothesi Porismatis, ae-
 qualis erit spatio dato. Inflexis autem CA, DA ad terminum
 diametri, CA aufert nullum segmentum, DA vero aufert ip-
 sum diametrum; quare quadratum ex diametro est spatium
 illud datum cui summa quadratorum ex segmentis ab ipsis
 CE, DE, aliisve inflexis abscissis, debet esse aequalis. Occur-
 rat altera inflexarum CE circumferentiae rursus in H, junga-
 tur DH et producta occurrat ipsi AB in K. Quoniam igitur
 a punctis C, D inflexae sunt CH, DH ad circumferentiam,
 quae diametro AB in F, K occurrunt, erit, ex hypothesi, sum-
 ma quadratorum ex segmentis KA, FB aequalis spatio dato,
 quadrato scilicet ex AB, cui etiam summa quadratorum ex
 AG, FB est aequalis. Quadratum igitur ex AK aequale est
 quadrato ex AG, et recta AK aequalis ipsi AG. Manifestum

Vide fig. in
 Prop. prae-
 cedente.

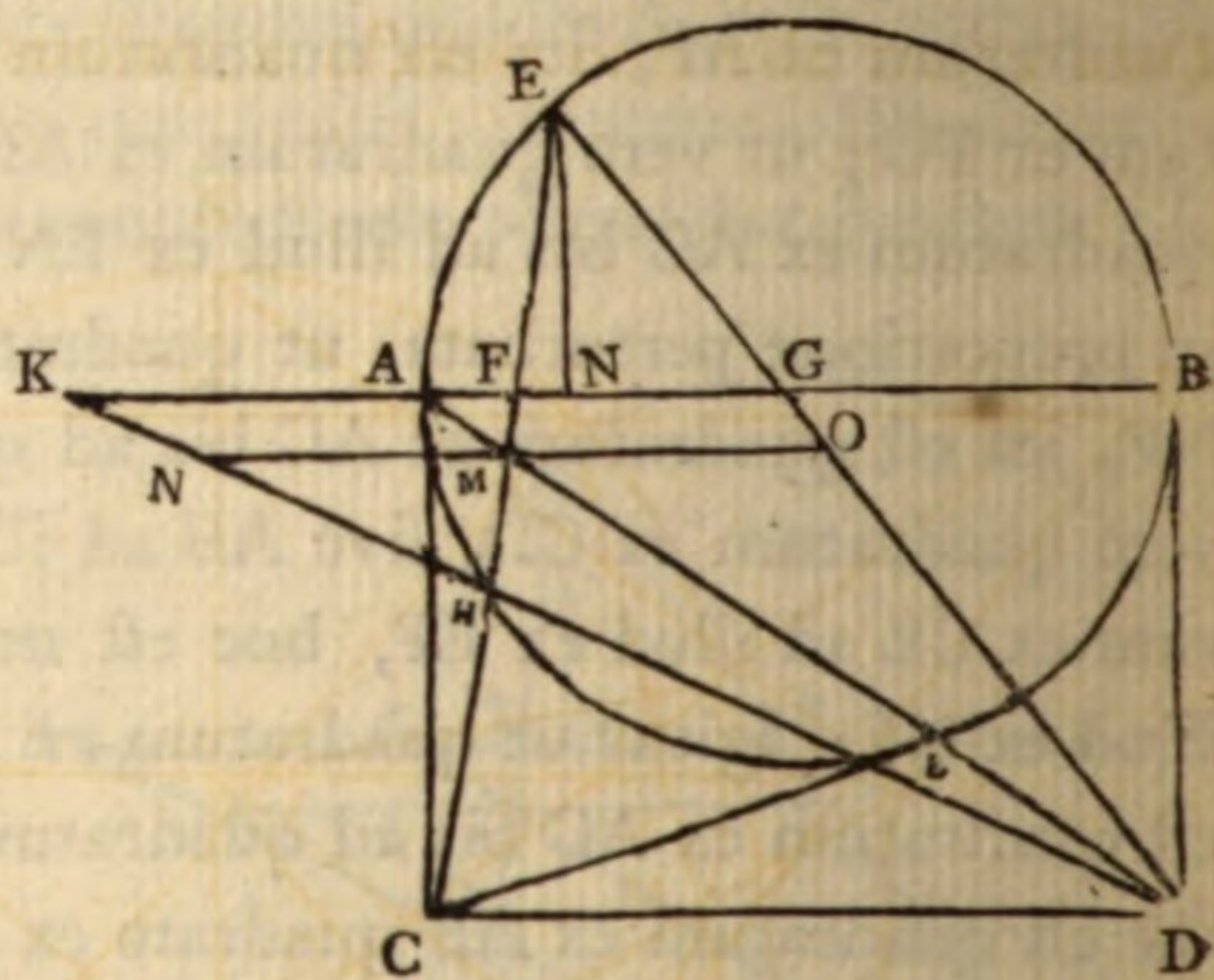
Y y y

lum AF, GB, et ita est AN, NB bis ad ipsum AF, GB bis. Est autem rectangulum AF, GB bis aequale ^d quadrato ex FG, ^{dconv.Pr. 44.} quia scilicet quadrata ex AG, FB simul aequalia sunt quadrato ex AB; et, propter circulum, rectangulum AN, NB aequale est quadrato ex EN. Ut igitur quadratum ex AN ad quadratum ex AF, ita est quadratum ex EN bis ad quadratum ex FG; ut vero quadratum ex AF ad illud ex FN, ita est quadratum ex AC bis ad illud ex EN bis; igitur ex aequali in proportione perturbata, ut quadratum ex AN ad illud ex NF, ita est quadratum ex AC bis ad quadratum ex FG. Est vero quadratum ex CD, five AB ad illud ex FG, ut quadratum ex CE ad illud ex EF, hoc est ut quadratum ex AN ad illud ex NF; igitur ut quadratum ex AB ad illud ex FG, ita est quadratum ex AC bis ad quadratum ex FG. Aequale igitur est quadratum ex AB quadrato ex AC bis, hoc est AC aequalis est lateri quadrati circulo inscripti. Data igitur est AC magnitudine, sed et positione, quare punctum C datum est, et propterea punctum D. Q. F. ostendenda.

Componetur ita.

Sit AB diameter circuli positione et magnitudine data, et ipsi ad rectos angulos ducantur AC, BD, quarum utraque aequalis sit lateri quadrati circulo inscripti; erunt C, D puncta invenienda, hoc est si ab ipsis ad circumferentiam super diametrum AB descriptam, inflectantur utcunque CE, DE rectae, quae diametro in punctis F, G occurrant; erunt quadrata ex segmentis AG, FB simul aequalia quadrato ex diametro AB.

Ducatur enim EN perpendicularis ad diametrum, et quoniam quadratum ex AB aequale est quadrato ex AC bis, erit quadratum ex AB ad illud ex FG, ut quadratum ex AC bis

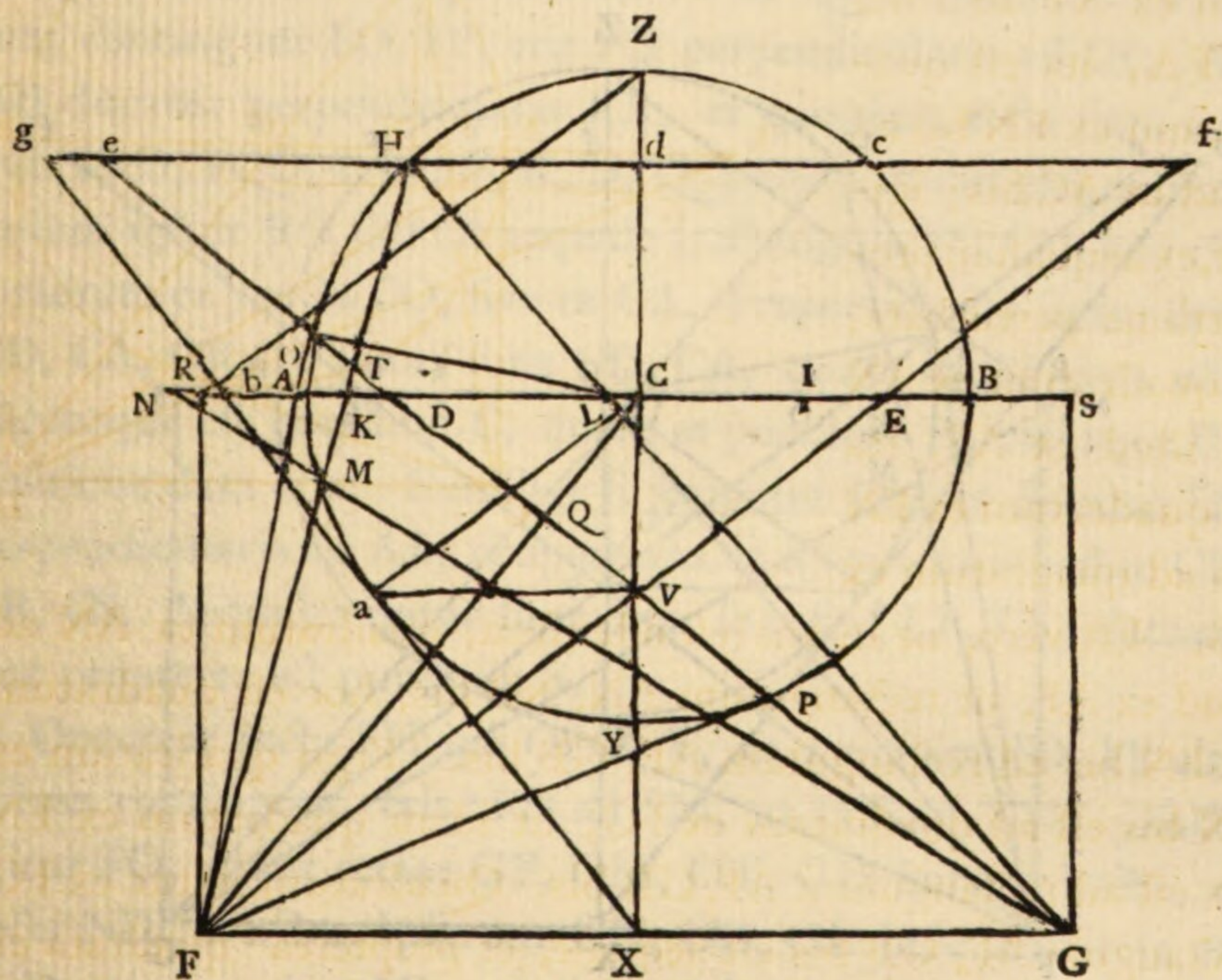
[illegible]

^d Pr. 44.

Hanc demonstrationem quae in Compositione habetur aliter tradit clariss. Eulerus in Actis Petropolitanis novis anno 1750. tom. 1. pag. 49. minime autem investigat Constructionem, sed ut Fermatius eam dederat assumit. Et quidem Propositionem Fermatii in hoc Casu primo anno 1715 demonstravi, priusquam aliquid de natura Porismatum cognoveram.

CAS. 2. Quando duo puncta data sunt intra vel extra circum-
culum.

Sit circulus cujus diameter AB positione et magnitudine
data est, centrumque sit C; et data sint in diametro, intra, vel
extra circumulum duo puncta D, E, aequaliter a centro distantia.
Data erunt alia duo puncta a quibus si ad circumferentiam



inflectantur utcunque duae rectae, abscindant hae duo seg-
menta diametri datis punctis D, E adjacentia, quorum sum-
ma quadratorum data erit.

Putanda Porisma verum esse; sintque F, G duo puncta inve-
nienda. Igitur inflexis utcunque ab ipsis ad circumferentiam
rectis FH, GH, quae diametro AB in K, L punctis occurrant,

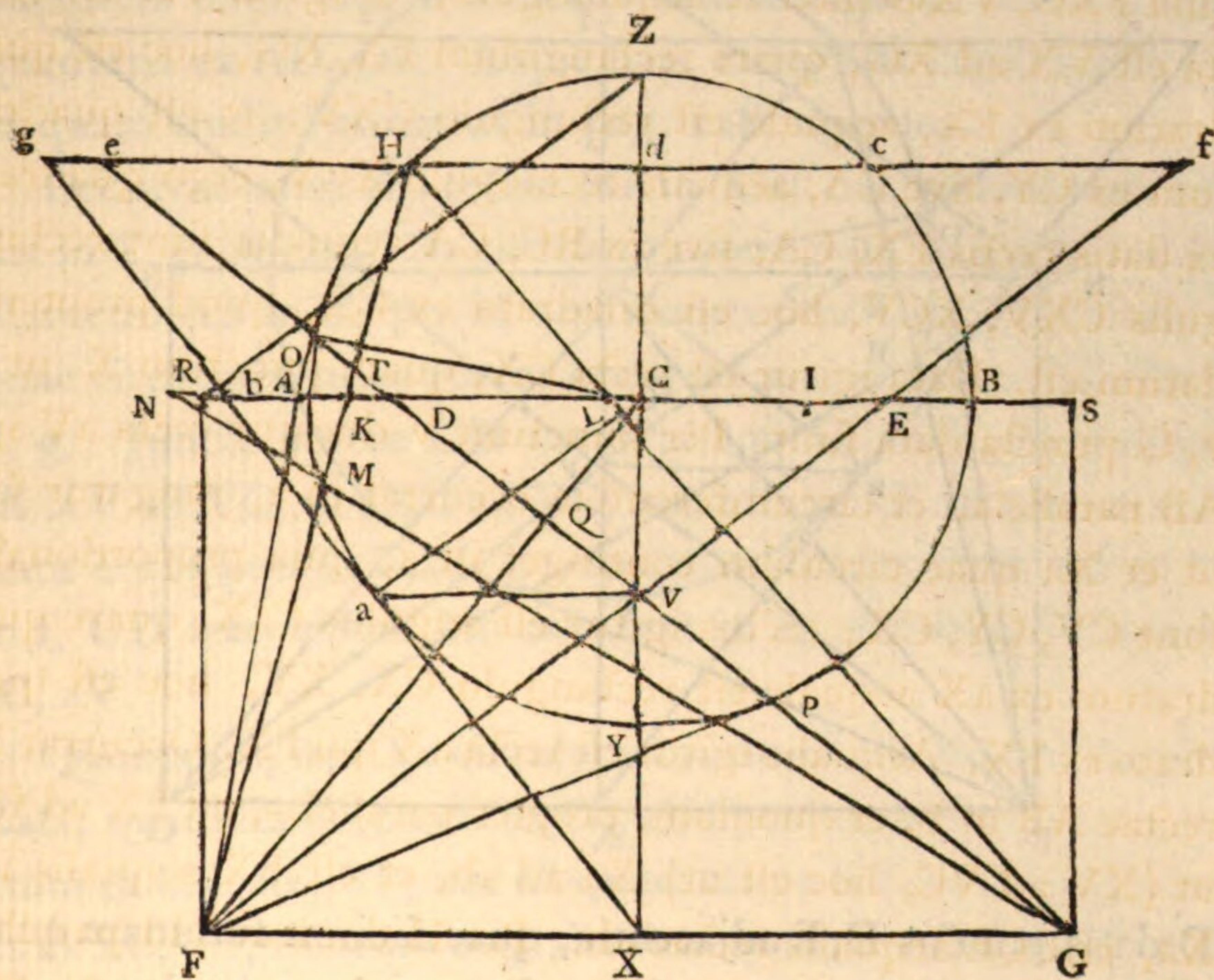
Jungatur GD et circumferentiae in O , P occurrat, junganturque FO , FP ; quoniam igitur ducta est FO ad circumferentiam in O , et recta GO quae tranfit per punctum D nullum aufert segmentum eidem puncto adjacens, recta FO nullibi praeter in O circumferentiae occurret, hoc est circulum continget; similiter ostendetur rectam FP contingere circulum. Jungatur FC occurratque rectae OP in Q , et quoniam circulum contingunt FO , FP , erit FQ perpendicularis ad OP . Ad AB ducatur perpendicularis FR , et quoniam recti sunt anguli FRD , FQD , erunt F , R , D , Q puncta in circulo, rectangulum igitur RC , CD est aequale (rectangulo FC , CQ , hoc est) quadrato ex juncta CO , sive ex CA . Proportionales igitur sunt CD , CA , CR , et datae sunt CD , CA , quare et CR data est; datumque est punctum C , quare et punctum R , rectaque RF positione data erit. Similiter si jungatur FE , et ducatur GS perpendicularis ad AB , proportionales ostendentur rectae CE , CB , CS . Aequales igitur sunt inter se rectae CR , CS ; datumque propterea est punctum S .

Occurrat recta FH ipsi OP in T , et quoniam FO , FP circulum contingunt, erit ^a FH ad FM , ut HT ad TM ; juncta ^a $Pr. 73.$ igitur FG , erunt rectae GF , GM , GT , GH harmonicales, et recta NDL a tribus ipsarum GN , GD , GL bifariam secta est in D , quare eadem NL parallela est ^b quartae FG ; parallelo- ^b $Pr. 82.$ grammum igitur est $FRSG$.

Occurrant FE , GD sibi mutuo in V , et jungatur CV quae occurrat ipsi FG in X . Quoniam igitur aequales sunt DC , CE , et sunt DE , FG parallelae, erunt et FX , XG inter se aequales; est igitur FX aequalis ipsi RC , quoniam dimidia sunt aequalium FG , RS , et sunt parallelae, quare CX est ipsi RF

parallela, rectusque propterea est angulus FXC . Occurrat CV circumferentiae in Y, Z ; et quoniam puncta F, Q, V, X sunt in circulo, recti enim sunt anguli FQV, FXV , erit rectangulum XC, CV aequale ipsi FC, CQ , hoc est quadrato ex CO , five CY ; proportionales igitur sunt CV, CY, CX . Et quoniam aequales sunt anguli FCX, VGX , erunt triangula rectangula FXC, VXG inter se aequiangula; ut igitur FX ad XC , ita est VX ad XG , quare rectangulum FX, XG , hoc est quadratum ex FX , aequale est rectangulo CXV ; et est quadratum ex CY , five CA , aequale rectangulo XCV , ergo quadrata ex datis rectis FX, CA , five ex RC, CA aequalia sunt rectangulis CXV, XCV , hoc est quadrato ex CX , quod propterea datum est. Data igitur est recta CX , quare punctum X , ut et F, G puncta data sunt. Per punctum V ducatur recta aV ipsi AB parallela, et circumferentiae occurrat in a , jungatur Ca , ut et Xa quae circulum continget in a , quia proportionales sunt CV, CY, CX ; rectus igitur est angulus CaX , quare quadratum ex aX aequale est rectangulo CX, XV , hoc est quadrato ex FX . Aequalis igitur est recta aX ipsi FX . Occurrat Xa rectae AB in b , et quoniam, propter parallelas, est FX ad CE , ut $(XV$ ad VC , hoc est ut) Xa ad ab , et est FX aequalis ipsi Xa , erit CE aequalis rectae ab . Per H ducatur Hd parallela ipsi FG , occurratque circumferentiae rursus in c , et rectis XZ, GD, FE Xa in punctis d, e, f, g . Et quoniam est FX ad df , ut $(XV$ ad Vd , hoc est ut) Xa ad ag , et aequales ostensae sunt FX, Xa , erit df aequalis ipsi ag . Quoniam autem contingit circulum ag , erit quadratum ex ag , hoc est df aequale rectangulo Hgc . Commune addatur quadratum ex Hd , et quadrata ex Hd, df simul aequalia erunt quadrato ex gd . Bifa-

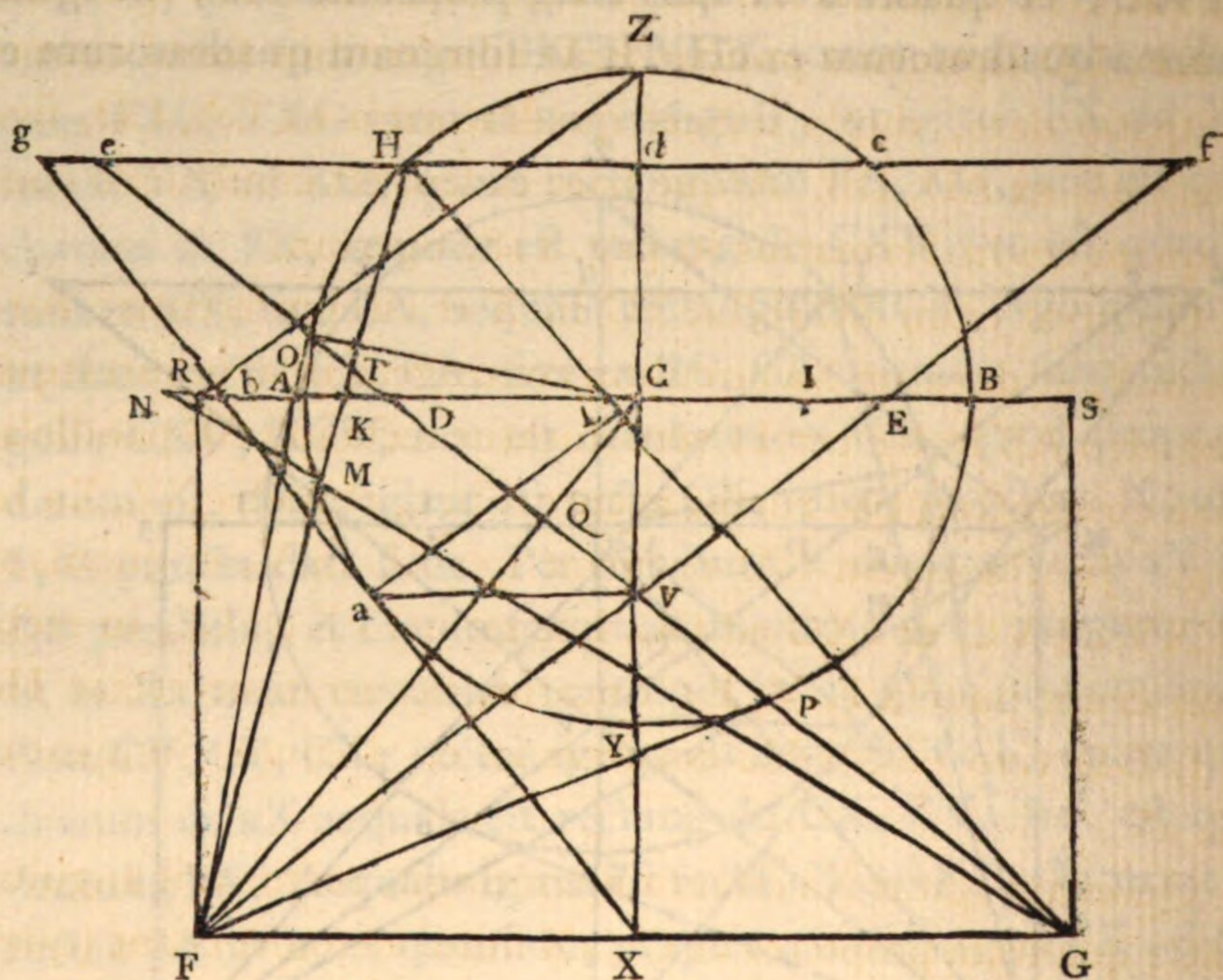
riam autem secta est ef in d , quia FG bifariam secta est in X , quare quadrata ex eH , Hf dupla sunt quadratorum ex Hd , df , hoc est quadrati ex gd . Est autem, propter parallelas, CH ad DL , ut (HG ad GL , hoc est ut HF ad FK , hoc est ut) Hf ad KE ; et quadrata ex ipsis sunt proportionalia; ut igitur summa quadratorum ex eH , Hf ad summam quadratorum ex



DL , KE , ita est (quadratum ex eH ad quadratum ex DL , et ita est quadratum ex HG ad illud ex GL , et ita est quadratum ex dX ad quadratum ex CX , et ita est) quadratum ex gd ad quadratum ex bc . Summa autem quadratorum ex eH , Hf dupla ostensa est quadrati ex gd , ergo summa quadratorum ex DL , KE dupla est quadrati ex bc , hoc est dupla quadratorum ex

$Z z z$

Ca, ab, five ex CA, CE, five CA, CD. Datae autem sunt rectae CA, CD, data igitur est summa quadratorum ex DL, KE. Data igitur ostensa sunt duo puncta F, G a quibus inflexae FH, GH utcunque ad circumferentiam, abscindunt segmenta KE, GH



LD datis punctis D, E adjacentia, quae faciunt summam quadratorum ex ipsis datam. Quae fuerunt invenienda.

Componetur vero ita.

Sit AB diameter circuli positione et magnitudine data, et in ea data sint duo puncta D, E intra vel extra circulum aequaliter distantia a centro C. Rectis CD, CA inveniatur tertia proportionalis CR, cui aequalis ad contrarias centri partes ponatur CS in diametro. Ducatur ad circumferentiam recta CZ

ipſi RC ad rectos angulos, et jungatur RZ, cui aequalis ducatur RF parallela ipſi ZC, et compleatur parallelogrammum FRSG; puncta F, G erunt ea quae invenienda fuerunt, hoc eſt, ſi ab ipſis ad circumferentiam utcunque inflectantur rectae FH, GH diametro AB occurrentes in K, L, erunt quadrata ex KE, LD ſegmentis punctis E, D adjacentibus ſimul aequalia ſpatio dato, duplo ſcilicet quadratorum ex CA, CD, ſive quadratis ex AD, DB. Atque haec eadem eſt conſtructio cum ea quam tradit Fermatius in pag. 118. operum.

Occurrat enim ZC rectae FG in X et circumferentiae rurfus in Y, et ducatur Xa circulum contingens in a, occurratque diametro AB in b; per H vero ducatur recta ipſi AB parallela, quae circumferentiae rurfus occurrat in c, et rectis XZ, Xa in d, g. Juncta autem GD occurrat ipſi XC in V, et quoniam eſt XV ad VC, ut (XG ad DC, hoc eſt ut) FX ad CE, in recta linea erunt puncta F, V, E; ducatur, occurratque rectae He in f, GD vero eidem Hc occurrat in e. Denique jungantur aC, aV.

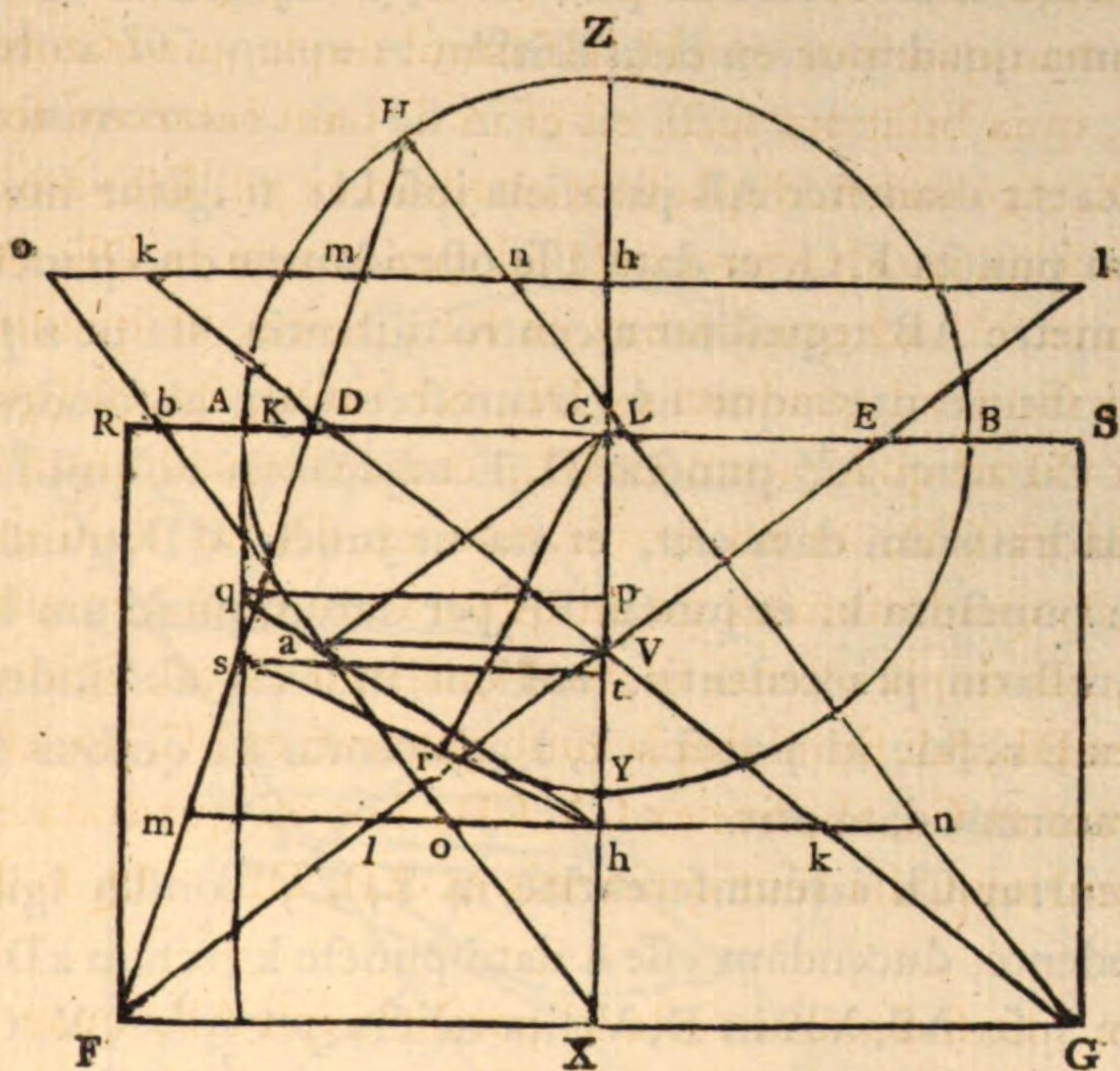
Quoniam igitur Xa circulum contingit, rectus erit angulus XaC; quadrata propterea ex Ca, aX ſimul aequalia erunt (quadrato ex CX, ſive RF, hoc eſt quadrato ex RZ, hoc eſt) quadratis ex ZC, CR, quorum aequalia ſunt quadrata ex Ca, CZ; reliquum igitur quadratum ex aX aequale eſt reliquo quadrato ex CR; aequalis igitur eſt recta aX ipſi CR, hoc eſt rectae FX. Et quoniam eſt CR ad CA, ut CA ad CD, hoc eſt Xa ad aC, ut aC ad CE; et eſt Xa ad aC, ut aC ad ab; erit ab aequalis ipſi CE. Et quoniam eſt XV ad VC, ut (FX ad CE, hoc eſt ut) Xa ad ab, erit aV parallela ipſi Cb. Eſt autem FX ad df, ut (XV ad VD, hoc eſt ut) Xa ad ag, et aequales oſtenſae ſunt

FX, Xa, quare aequales sunt df, ag. Quadratum igitur ex df aequale est quadrato ex ag, hoc est rectangulo Hgc, quia ag circulum contingit; commune apponatur quadratum ex Hd, et quadrata ex Hd, df simul aequalia erunt quadrato ex gd. Sunt autem quadrata ex eH, Hf simul dupla quadratorum ex Hd, df, quia bifariam secta est ef in d, nam bifariam secta est FG in X, ergo eadem dupla sunt quadrati ex gd. Est vero, propter parallelas, quadratum ex eH ad quadratum ex DL, ut quadratum ex Hf ad quadratum ex KE; igitur ut quadrata ex eH, Hf simul ad quadrata ex DL, KE simul, ita est (quadratum ex eH ad quadratum ex DL, et ita est quadratum ex eG ad illud ex GD, et ita quadratum ex dX ad illud ex XC, et ita est) quadratum ex gd ad quadratum ex bC; et quadrata ex eH, Hf dupla ostensa fuerunt quadrati ex gd, igitur quadrata ex DL, KE simul dupla sunt quadrati ex bC, hoc est quadratorum ex Ca, ab, five ex CA, CD; hoc est quadrata ex DL, KE simul aequalia sunt quadratis ex AD, DB. Q. E. D.

COR. Et si ducatur recta kl parallela ipsi AB, quae positione data sit, et ipsis XZ, GD, FE occurrat in h, k, l, rectis vero FH, GH in m, n; data erit summa quadratorum ex kn, ml.

Occurrat enim Xa ipsi kl in o; et quoniam datae sunt Xa, kl positione, datum erit punctum o, et datum est h, recta igitur oh magnitudine data est. Est autem, propter parallelas, quadratum ex kn ad quadratum ex DL, ut quadratum ex ml ad illud ex KE, igitur summa quadratorum ex kn, ml est ad summam eorum ex DL, KE, ut (quadratum ex Kn ad illud ex DL, hoc est ut quadratum ex nG ad illud ex GL, hoc est

ut quadratum ex hX ad quadratum ex CX , hoc est ut) quadratum ex ho ad quadratum ex Cb . Et summa quadratorum ex DL , KE aequalis est duplo quadrati ex bC , igitur summa



quadratorum ex kn , ml aequalis est duplo quadrati ex oh . Data autem est oh , quare et summa quadratorum ex kn , ml data est.

P R O P. LXXXIV.

Quâ præcedens magis generalis redditur.

“ DATO positione circulo AZB cujus centrum est C , dataque
 “ positione recta kl ad quam recta Ch a centro est perpendi-

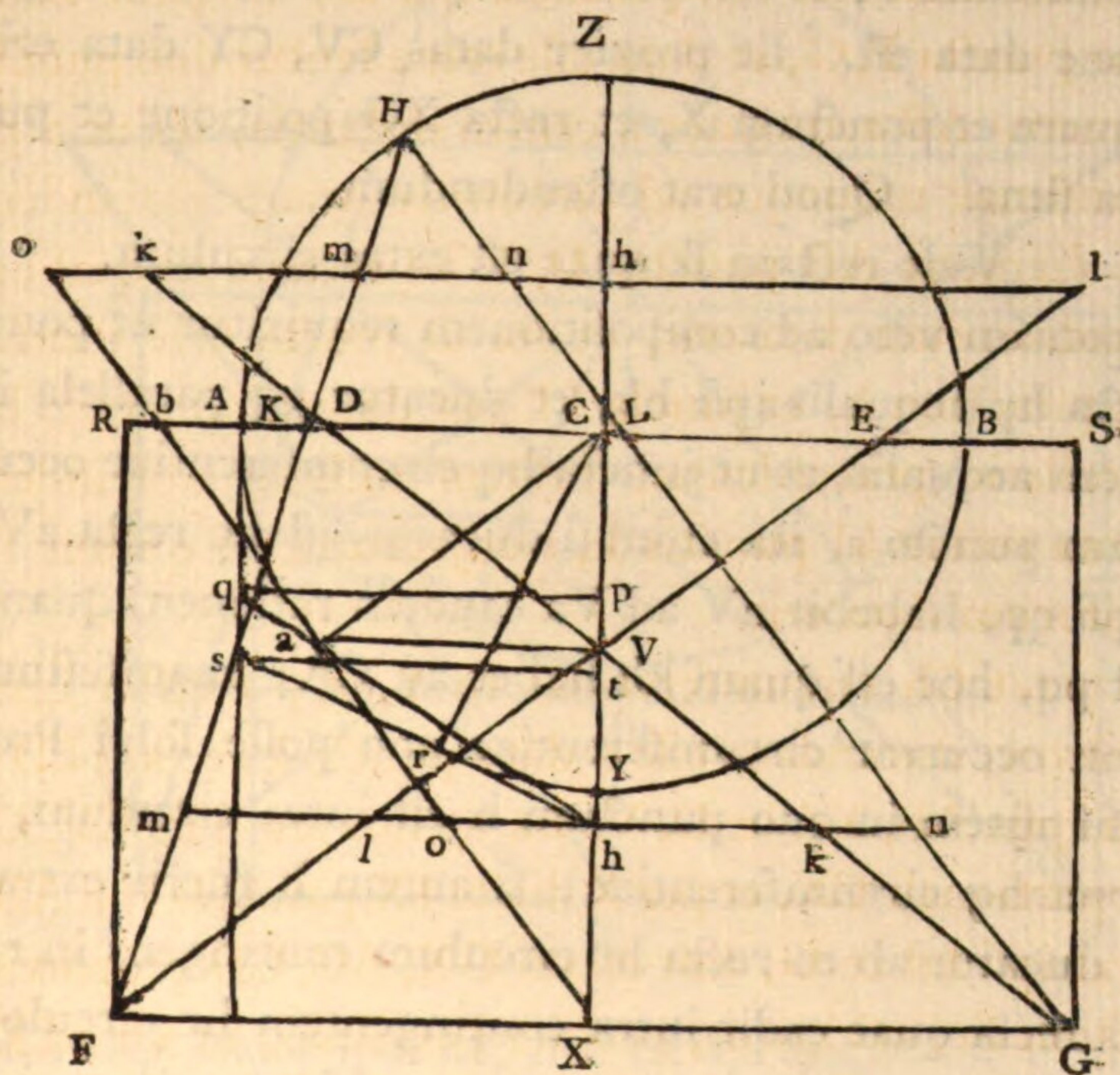
“cularis, et in kl datis duobus punctis k, l aequaliter a puncto h distantia; data erunt alia duo puncta a quibus ad circumferentiam utcunque inflexis duabus rectis, abscindant eae segmenta rectae kl punctis k, l adjacentia ex quibus summa quadratorum data erit.”

Ducatur diameter AB parallela ipsi kl ; si igitur inveniantur duo puncta F, G , et data esse ostendantur duo puncta D, E in diametro AB aequaliter a centro distantia, ita ut a punctis F, G inflexae utcunque ad circumferentiam abscindant segmenta diametri AB punctis D, E adjacentia ex quibus summa quadratorum data erit, et ita ut juncta GD transeat per datum punctum k , et juncta FE per datum punctum l ; patet ex Corollario praecedentis, easdem inflexas abscindere duo segmenta rectae kl punctis k, l adjacentia ex quibus summa quadratorum data erit.

Occurrat Ch circumferentiae in Y, Z ; constat igitur, ex praecedente, ducendam esse a dato puncto k rectam kD occurrentem ipsis AB, YZ in D, V , ita ut sumptâ ipsis CV, CY tertia proportionali CX , et per X ducta FX parallela ipsi AB , quae occurrat ipsi kd in G , sint etiam GX, AC, CD proportionales.

Factum fit; est igitur, propter parallelas, ut kh ad DC , ita hV ad VC , quare et rectangulum kh, XG est ad rectangulum DC, XG , hoc est, ex hypothese, ad quadratum ex AC , ut hV ad VC , hoc est ut rectangulum hV, VC ad quadratum ex VC . Ad circumferentiam ducatur Va ipsi AB parallela, et quoniam rectus est angulus CVa , et proportionales sunt XC, CY , sive Ca et CV , erit quadratum ex Va aequale rectangulo XV, VC . Et quoniam est XV ad VC , ut $(XG$ ad DC , hoc est ut)

quadratum ex XG ad rectangulum XG, DC , hoc est ad quadratum ex AC ; et est XV ad VC , ut quadratum ex aV ad quadratum ex VC , quia proportionales sunt XV, Va, VC ; erit quadratum ex XG ad quadratum ex AC , ut quadratum ex aV ad illud ex VC , quare et recta XG est ad ipsam AC , ut aV ad VC , et invertendo, AC ad XG , ut CV ad Va . Ut igitur rect-



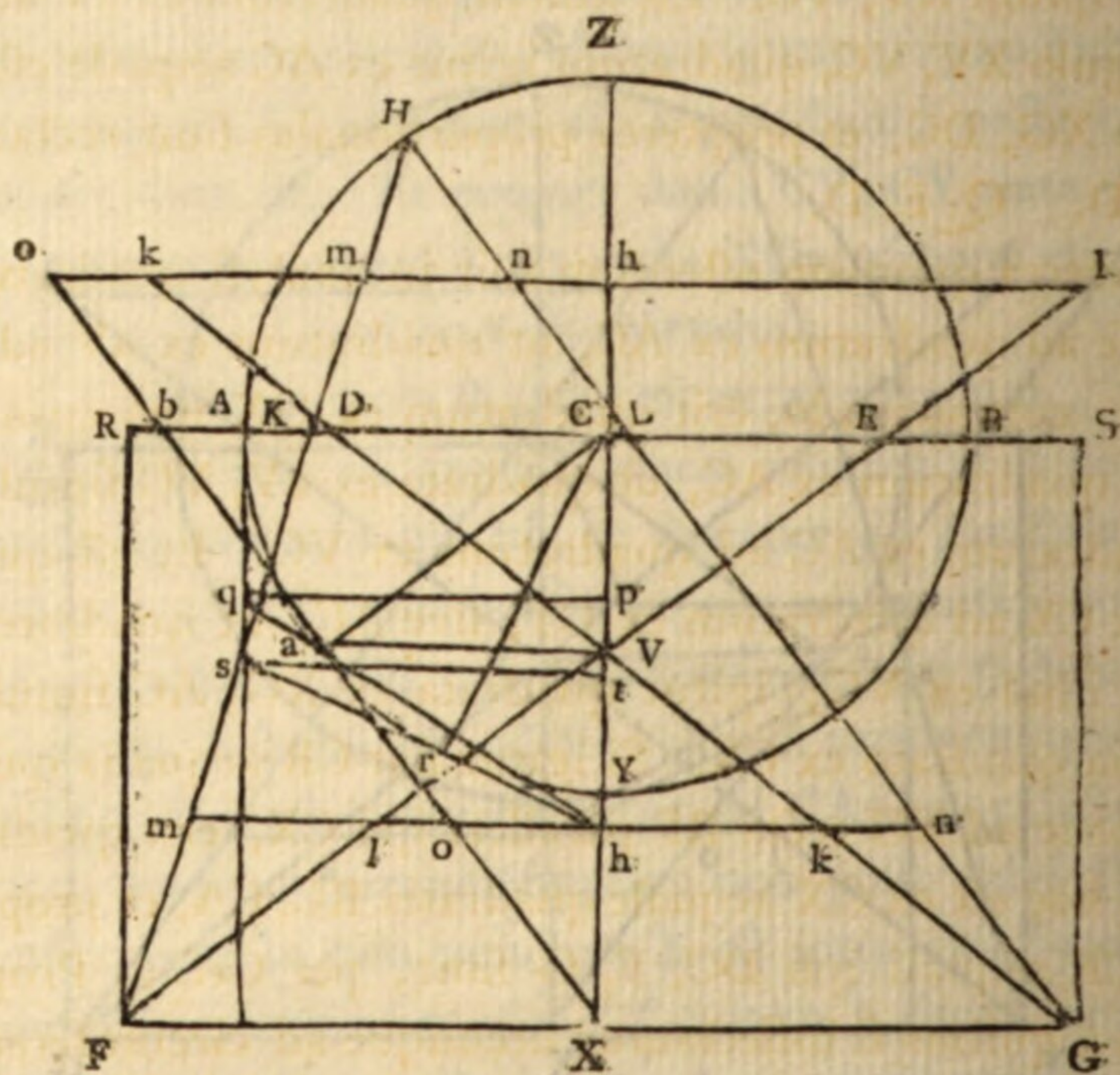
angulum kh , AC ad ipsum kh, XG , ita quadratum ex CV ad rectangulum aV, VC ; ostensum autem fuit rectangulum kh, XG ad quadratum ex AC , ut rectangulum hV, VC ad quadratum ex VC ; igitur, ex aequali in proportione perturbata, est kh, AC rectangulum ad quadratum ex AC , ut rectangulum hV, VC ad ipsum aV, VC ; quare ut recta kh ad ipsam

AC, ita est recta hV ad Va. Et datae sunt kh, AC, quare data est ratio rectae hV ad Va; et rectus est angulus hVa, juncta igitur ha, triangulum hVa specie datum est. Quoniam igitur data est recta hV positione, et datum punctum h, datusque angulus Vha, recta ha positione data est. Est autem et circumferentia positione data; datum igitur est punctum a, quare et punctum V, et datum est k punctum; recta igitur kV positione data est. Et propter datas CV, CY data erit recta CX, quare et punctum X, et recta XG positione et punctum G data sunt. Quod erat ostendendum.

Vide rectam lk quae est extra circulum.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ponatur in hc recta hp aequalis ipsi hk, et ducatur pq parallela ipsi AC et eidem aequalis, et ut juncta hq circumferentiae occurrat in quodam puncto a, ita enim si ducatur ad hc recta aV parallela ipsi qp, habebit hV ad Va eandem rationem quam habet hp ad pq, hoc est quam kh habet ad CA; manifestum est si hq non occurrat circumferentiae non posse solvi Problema. In casu autem in quo punctum h est intra circulum, semper occurret hq circumferentiae; si autem h fuerit extra circulum, ducatur ab eo recta hr circulum contingens in r, igitur omnis recta quae cadit intra contingentem hr circulo occurret, quae extra cadit ei non occurret. Ut vero intra cadat necesse est rectam kh majorem esse contingente hr; quod ita ostenditur. Ducatur As parallela ipsi hC, occurratque ei contingens hr in s, et ducatur ad hC recta st parallela ipsi AC, five ipsi qp, et jungatur Cr. Quoniam igitur in triangulis sth, Crh recti sunt anguli sth, Crh, communis autem ths cui aequalia latera st, Cr sunt opposita, erit et th aequalis ipsi hr. Quaevis

Ponatur autem in hC recta hp aequalis ipsi kh , et ducatur pq parallela et aequalis ipsi AC , igitur, ut ostensum, juncta hq circumferentiae occurret. Sit a alterum ex punctis occurfus, et ad hC ducatur aV parallela ipsi AC , et ipsis CV , CY tertia



proportionalis inveniatur CX , et per X ducatur recta FX parallela ipsi AB , eique occurrat juncta Vk in G , eademque ipsi AB occurrat in D ; erunt rectae GX , AC , CD proportionales.

Jungatur enim Ca , et quoniam proportionales sunt XC , CY , CV , erit rectangulum XC , CV aequale quadrato ex CY , sive Ca ; et, ablato communi quadrato ex CV , erit rectangulum XV , VC aequale quadrato ex Va . Et quoniam est hp ad pq , hoc est hk ad AC , ut hV ad Va , erit, permutando, kh

ad hV , ut AC ad aV ; est autem ut kh ad hV , ita DC ad CV ; igitur ut AC ad aV , ita est DC ad CV , et quoniam rectangula XG , DC et XV , VC super ipsas DC , CV sunt similia, erit ^a ^a 22. 6. quadratum ex AC ad quadratum ex aV , ut rectangulum XG , DC ad ipsum XV , VC . Est autem quadratum ex aV aequale rectangulo XV , VC , quadratum igitur ex AC aequale est rectangulo XG , DC , et propterea proportionales sunt rectae XG , AC , CD . Q. E. D.

Praeterea quoniam ostensum fuit in analysi quadratum ex GX esse ad quadratum ex AC , ut quadratum ex aV ad illud ex VC ; componendo, erit quadratum ex GX una cum eo ex AC ad quadratum ex AC , ut quadrata ex aV , VC simul, hoc est quadratum ex AC ad quadratum ex VC . Et est quadratum ex CX ad quadratum ex CY , five AC , ut quadratum ex AC ad illud ex VC ; igitur quadrata ex XG , AC simul sunt aequalia quadrato ex CX . Si igitur fiat CR aequalis ipsi XG , et ducatur ad XG recta RF parallela ipsi CX , erit quadratum ex RF , hoc est ex CX aequale quadratis RC , CA , et propterea, facta CE aequali ipsi DC , F , G sunt, per Cas. 2. Prop. 83. puncta a quibus si inflectantur utcumque ad circumferentiam rectae FH , GH abscindentes segmenta KE , DL diametri punctis D , E adjacentia, quadrata ex KE , DL simul aequalia erunt spatio dato, quadratis scilicet ex AD , DB ; et per Cor. Prop. 83. eadem rectae FH , GH abscindent segmenta ml , kn rectae kl , datis punctis k , l adjacentia, quorum quadrata simul aequalia erunt dato spatio, duplo scilicet quadrati ex oh . Quod erat ostendendum.

Dom. Matthaeus Stewart eandem Fermatii Propositionem quae in Cas. 2. Prop. 83. habetur, adhuc magis generalem

reddidit Propositione sequente, quam multis abhinc annis mihi communicavit, viz. [Vid. fig. Caf. 2. Prop. 83.]

Data positione et magnitudine diametro AB circuli, cujus centrum est C; datisque in AB duobus punctis D, I quae inaequaliter a centro distant ad contrarias ejus partes; data erunt alia duo puncta a quibus si inflectantur utcunque ad circumferentiam duae rectae, quarum altera diametro occurrat in K, reliqua vero ipsi in L, datum erit quadratum ex KI una cum spatium ad quod quadratum ex DL eandem habet rationem quam habet recta DC ad ipsam CI. Propositio autem haec investigari et ostendi potest modo non multum dissimili ei qui in Caf. 2. Prop. 83. adhibitus fuit.

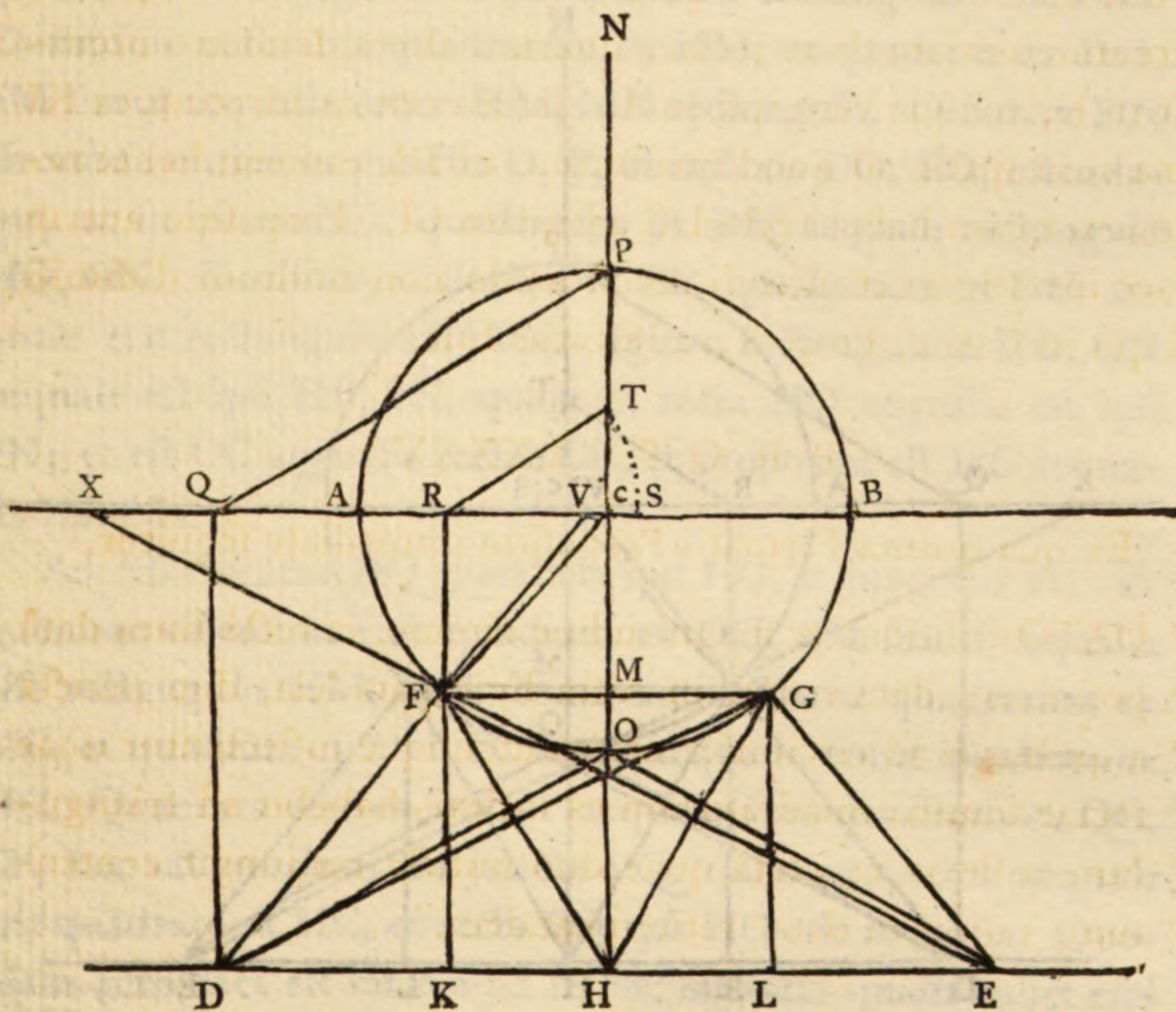
P R O P. LXXXV.

Ex qua quinta Fermatii Propositio immediate sequitur.

“ DATO positione et magnitudine circulo, et rectâ linea datâ
 “ positione; data erunt, in recta huic parallela, duo puncta
 “ a quibus si ad circumferentiam utcunque inflectantur duae
 “ rectae summa quadratorum ex inflexis habebit ad triangu-
 “ lum inflexis et rectâ quae duo puncta conjungit conten-
 “ tum, rationem datae rationi eandem.”

Sit circulus positione datus cujus diameter positione data sit AB et centrum C. Et puta Porisma verum esse, data scilicet esse duo puncta D, E in recta ipsi AB parallela a quibus utcunque inflexis DF, EF ad circumferentiam, summa quadratorum ex DF, EF habebit ad triangulum ipsis DF, FE et junctâ DE contentum rationem eandem datae rationi quam

habet a ad b . Per punctum F ducatur FG parallela ipsi DE ,
occurratque circumferentiae rursus in G ; bifariam autem se-
cetur DE in H , et ad DE ducantur perpendiculares FK , GL .
Quoniam igitur, ex hypothese, summa quadratorum ex DF ,
 FE habet ad DFE triangulum rationem quam habet a ad b ;



et quoniam similiter eandem habet rationem summa quadra-
torum ex junctis DG, GE ad triangulum DGE; est autem
triangulum DFE aequale^a triangulo DGE, igitur erit summa^a 37. 1.
quadratorum ex DF, FE aequalis summae quadratorum ex ip-
sis DG, GE. Est vero summa quadratorum ex DF, FE aequa-

angulum DFE, hoc est ut) duplum quadratorum ex DH, HF ad triangulum DFE. Erit igitur summa quadratorum ex DH, HF ad (duplum trianguli DFE, hoc est ad) rectangulum DE, FK, ut (recta NH ad ipsam DE, hoc est ut) rectangulum NH, FK ad ipsum DE, FK. Quare quadrata ex DH, HF simul aequalia sunt rectangulo NH, FK, hoc est rectangulo NH, HM. Commune auferatur quadratum ex HM, et quadrata ex DH, FM simul aequalia erunt HM, MN rectangulo. Occurrat HN circumferentiae in punctis O, P, et inflexis DO, EO, ostendetur, ut in praemissis, quadratum ex DH aequale rectangulo HO, ON. Similiter, inflexis DP, EP, quadratum ex DH aequale erit rectangulo HP, PN. Igitur rectangulum HO, ON aequale est ipsi HP, PN, quare et recta HO aequalis est ipsi PN; et est OC aequalis rectae CP, et propterea est HC aequalis ipsi CN.

Ad AB ducatur DQ parallela ipsi HC, et jungatur FC. Et quoniam ostensum fuit quadrata ex DH, FM simul aequalia esse rectangulo HM, MN, commune addatur quadratum ex MC, et quadrata ex DH, FC simul aequalia erunt quadrato ex HC. Quadrata vero ex DH, FC aequalia sunt quadratis ex QC, CP, hoc est quadrato ex juncta PQ, quod propterea aequale erit quadrato ex HC, et recta PQ ipsi HC erit aequalis. Quoniam vero data est ratio a ad b, hoc est ratio quam habet HN bis ad HD, data erit ratio quam habet HC pars quarta duplae ipsius HN ad HD, hoc est quam habet PQ ad ipsam QC. Specie igitur ^f datum est triangulum rectangulum CPQ, et ^f 46. Dat. data est CP magnitudine, quare et PQ, QC, hoc est CH, HD magnitudine datae erunt. Sed et positione data est CH quae a dato puncto C ad rectos angulos positione datae AB ducta

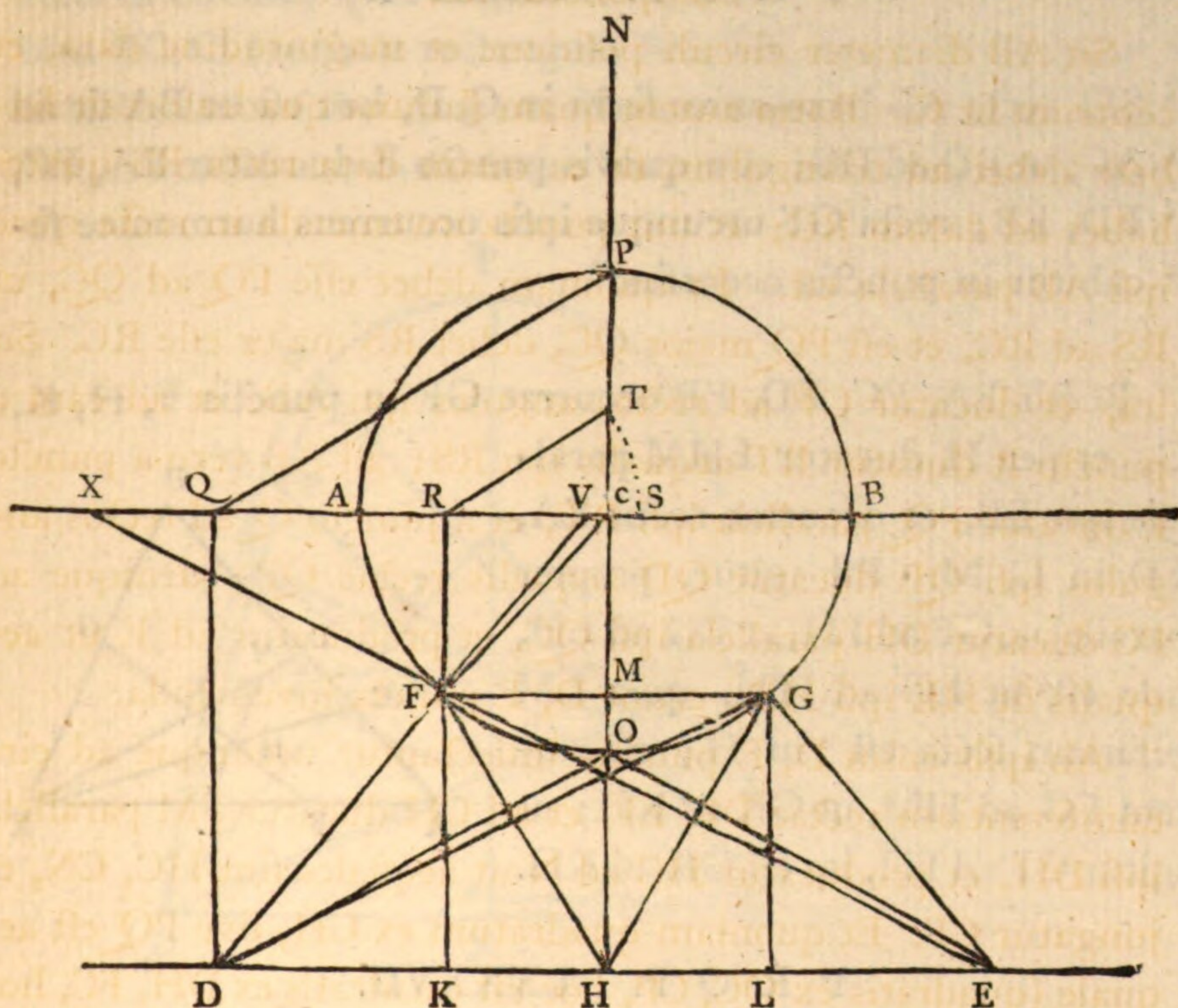
est; datum igitur est punctum H, et recta HD positione data; et datae sunt HD, DE magnitudine, quare data sunt D, E puncta. Quae fuerunt invenienda.

Componetur ita.

Sit AB diameter circuli positione et magnitudine data, et centrum sit C. Ratio autem quam summa quadratorum habere debet ad triangulum sit ea quam data recta RS quater habet ad datam RC; et sint puncta invenienda in recta quae ipsi AB parallela est. Et quoniam debet esse PQ ad QC, ut RS ad RC, et est PQ major QC, debet RS major esse RC. Sit ita, et ducatur CP ad rectos angulos ipsi AB, et ad eam a puncto R ducatur RT aequalis ipsi RS; ad AB vero a puncto P ducatur PQ parallela ipsi RT, et a puncto Q ad rectos angulos ipsi QB ducatur QD aequalis rectae QP; denique ad PC ducatur DH parallela ipsi QC, et producat ad E ut aequalis sit HE ipsi HD; erunt D, E puncta invenienda.

Ab ipsis enim D, E punctis inflectantur utcumque ad circumferentiam rectae DF, EF, et ad CH ducatur FM parallela ipsi DH, et producat HC ad N ut aequales sint HC, CN, et jungatur CF. Et quoniam quadratum ex CH, sive PQ est aequale (quadratis ex QC, CP, hoc est quadratis ex DH, FC, hoc est) quadratis ex DH, FM, MC, commune auferatur quadratum ex MC, et rectangulum HM, MN aequale erit quadratis ex DH, FM, sive ex DH, HK; commune addatur quadratum ex HM, sive KF, erit rectangulum NH, HM aequale tribus quadratis ex DH, HK, KF. Igitur tria haec quadrata sunt ad rectangulum DE, KF, ut (rectangulum NH, HM ad idem rectangulum DE, KF, hoc est ut) recta NH ad ipsam DE. Duplum igitur quadratorum ex DH, HK, KF est ad rectan-

gulum DE, KF, ut recta NH bis ad DE; et duplum eorundem quadratorum, hoc est quadrata ex DF, FE simul sunt ad triangulum DFE dimidium scilicet rectanguli DE, KF, ut



recta NH bis ad DH dimidium ipsius DE, hoc est ut CH quater, five PQ quater ad QC, hoc est ut RT, five RS quater ad RC, hoc est in ratione data. Q. E. D.

COR. Et productis DF, EF ad AB (vel ad quamvis rectam ipsi parallelam) in V, X, manifestum est summam quadratorum ex VF, FX esse ad triangulum VFX, ut summa quadra-

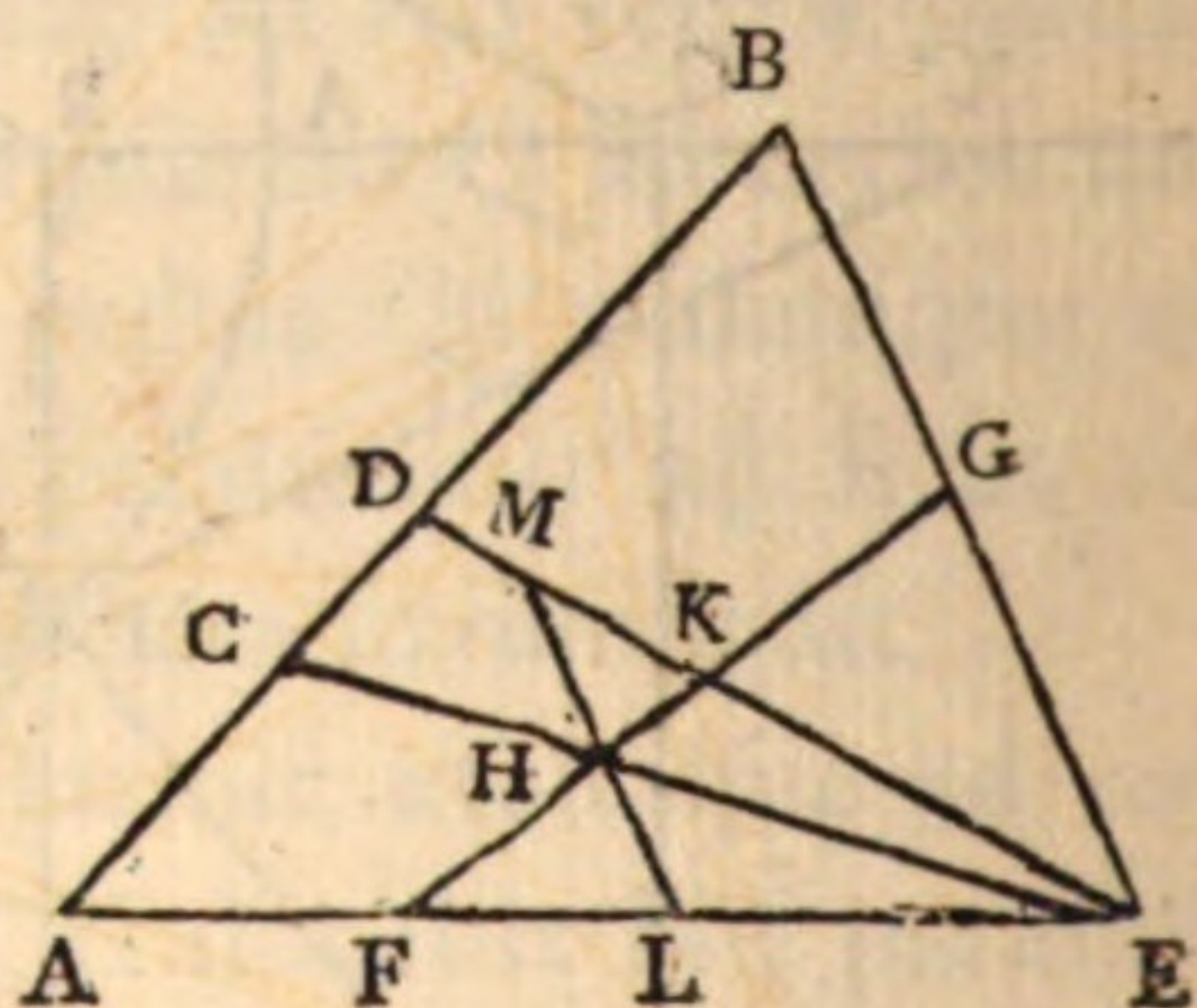
B b b b

torum ex DF, FE ad triangulum DFE, hoc est in ratione data. Et haec est Fermatii Propositio quinta.

P R O P. LXXXVI.

“ SIT recta AB harmonice secta in C, D, hoc est ut BA sit ad
 “ AC, ut BD ad DC; et a quovis puncto E ducantur EA, EC,
 “ ED, EB; recta GF utcumque ipsis occurrens harmonice se-
 “ cabitur in punctis occursus.”

Rectis EA, EC, ED, EB occurrat GF in punctis F, H, K, G, et per H ducatur LHM parallela ipsi EB, et occurrat rectis EA, ED in L, M. Est igitur, propter parallelas, GF ad FH, ut EG ad LH, hoc est ut EG ad HM, quia LM bifariam secta est^a in H; est autem EG ad HM, ut GK ad KH; ut igitur GF ad FH, ita est GK ad KH.



^a Pr. 82.

P R O P. LXXXVII.

“ SIT circulus cujus diameter OCP, et in ipsa sumantur duo
 “ puncta K, N ad easdem centri C partes, quae faciunt CK,
 “ CO, CN proportionales; si per alterutrum punctorum K,
 “ N, puta N, ducatur ND ad rectos angulos ipsi CN, et per
 “ reliquum punctum K ducatur utcumque recta linea KE quae
 “ occurrat ipsi ND in E, et circumferentiae in Q, R punctis;
 “ erit QE ad ER, ut QK ad KR.”

SR. Puncta autem C, S, N, E sunt in circulo quia recti sunt anguli ad S, N, quare rectangulum SK, KE aequale est ipsi CK, KN; et quadrata ex CS, SK simul aequalia sunt quadrato ex CK. Totum igitur, si fuerit punctum E extra circulum, vel reliquum si fuerit intra, quadratum scilicet ex CS una cum rectangulo ES, SK, hoc est una cum quadrato ex SR, hoc est quadratum ex semidiametro CR, aequale est toti vel reliquo rectangulo scilicet KC, CN. Proportionales igitur sunt CK, CO, vel CR, et CN.

P R O P. LXXXVIII.

“ SIT circulus cujus diameter OCP, et in ipsa sumantur duo
 “ puncta K, N ad easdem partes centri C quae faciunt CK,
 “ CO, CN proportionales, et a puncto N ducta ND ad rectos
 “ angulos ipsi CN, sumantur in recta ND duo puncta D, E
 “ ad contrarias partes ipsius N si punctum N fuerit extra cir-
 “ culum, ad easdem autem si fuerit intra, fitque rectangu-
 “ lum DN, NE aequale rectangulo ON, NP; ab alterutro au-
 “ tem punctorum D, E, puta E, si fuerit utrumque extra cir-
 “ culum, a puncto vero E quod intra circulum est, si unum
 “ fuerit extra et reliquum intra circulum, ducatur recta EK
 “ quae circumferentiae in Q, R occurrat; junctae DQ, DR
 “ circulum contingent.”

Jungatur DC quae ipsi QR occurrat in S, et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, erit rectangulum NC, CK aequale quadrato ex CO; auferantur aequalia haec a quadrato ex CN, si fuerit N extra circulum, at si fuerit intra, ab ipsis

uterque est; aequiangula igitur^b sunt triangula DNC, KNE, ^{b 6. 6.}
 et angulus CDN aequalis angulo NKE, five angulo CKS; et
 in triangulis DCN, KCS communis est angulus DCN, igitur
 angulus KSC aequalis est angulo recto DNC; quare^c in cir- ^{c conv. 22.}
 culo sunt D, N, K, S puncta. Rectangulum igitur DC, CS ^{aut 21. 3.}
 aequale est ipsi NC, CK, hoc est quadrato ex semidiametro
 CO, et propterea rectae DQ, DR circulum contingunt, rec-
 tus enim est angulus CSK.

P R O P. LXXXIX.

“ SIT recta linea AB, et duo puncta extra eam D, E, et ab eo-
 “ rum alterutro D ducta utcunque recta DGF ad circulum
 “ OGP cujus diameter OP, junctae EG, EF abscindent ae-
 “ qualia rectae AB segmenta adjacentia puncto K in quod
 “ cadit perpendicularis CK a centro C ducta ad rectam AB;
 “ erit juncta DE parallela rectae AB; occurrat autem CK ipsi
 “ DE in N, et circumferentiae in O, P, proportionales erunt
 “ CK, CO, CN; et rectangulum DN, NE aequale erit rectan-
 “ gulo ON, NP. Et contra, si fuerint CK, CO, CN proporti-
 “ onales, et CKN perpendicularis ad ipsas AB, DE, fueritque
 “ rectangulum DN, NE aequale ipsi ON, NP; si ab alterutro
 “ punctorum D, E ducatur DGF utcunque ad circulum, et
 “ jungantur EG, EF, abscindent hae aequalia rectae AB seg-
 “ menta puncto K adjacentia.”

PARS I. Jungatur EK occurratque circumferentiae in Q,
 R, et jungantur DQ, DR; quoniam igitur a puncto D ducta
 est DQ ad circulum, et juncta EQ nullum aufert segmentum

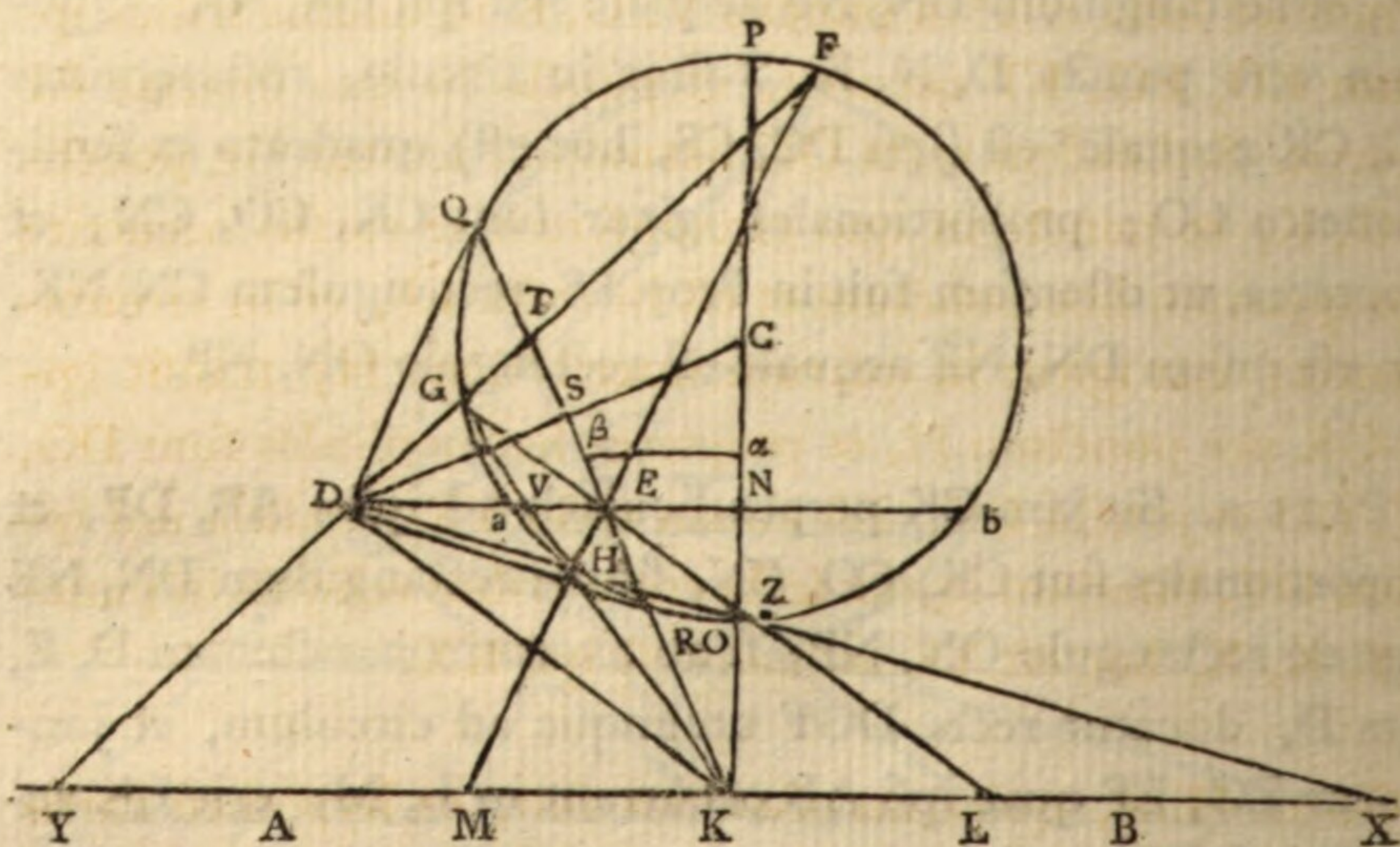
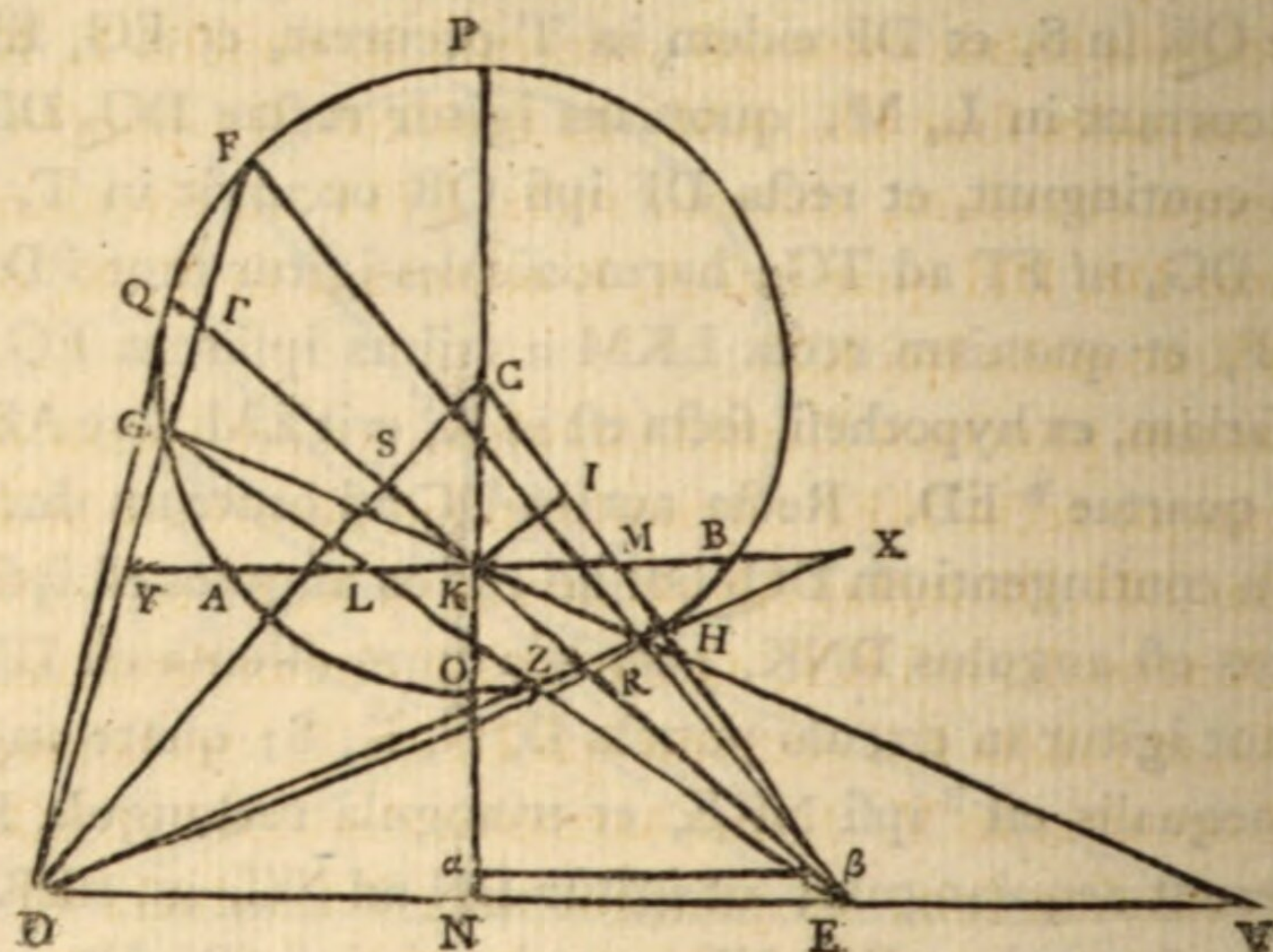
nullum, recta igitur DQ circulum contingit; similiter ostendetur rectam DR contingere circulum. Jungatur DC occurratque QR in S , et DF eidem in T occurrat, et EG , EF ipsi AB occurrant in L , M ; quoniam igitur rectae DQ , DR circulum contingunt, et recta DF ipsi QR occurrit in T , erit ^a ^{Pr. 73.} FD ad DG , ut FT ad TG ; harmonicales igitur sunt ED , EG , ET , EF , et quoniam recta LKM a tribus ipsarum EG , ET , EF bifariam, ex hypothesi, secta est in K , erit LM , five AB , parallela quartae ^{*} ED . Recta autem DC ad centrum ducta ab ^{*} ^{Pr. 82.} occurfu contingentium DQ , DR ad rectos angulos est ipsi QR , et rectus est angulus DNK , parallela enim ostensa est DN ipsi AB , sunt igitur in circulo puncta D , N , K , S ; quare angulus CDN aequalis est ^b ipsi NKE , et triangula rectangula DNC , ^{b22. aut 21. 3.} KNE erunt aequiangula; ut igitur DN ad NC , ita est KN ad NE , et rectangulum DN , NE aequale erit ipsi CN , NK . Quoniam vero puncta D , N , K , S sunt in circulo, rectangulum NC , CK aequale ^c est (ipsi DC , CS , hoc est) quadrato ex semi- ^c ^{Cor. 36. 3.} diametro CO ; proportionales igitur sunt CK , CO , CN ; et propterea, ut ostensum fuit in Prop. 88. rectangulum CN , NK , hoc est ipsum DN , NE aequale est rectangulo ON , NP .

PARS 2. Sit jam CK perpendicularis ad ipsas AB , DE , et proportionales sint CK , CO , CN , sitque rectangulum DN , NE aequale rectangulo ON , NP ; si ab alterutro punctorum D , E , puta D , ducatur recta DGF utcunque ad circulum, et jungantur EG , EF quae ipsi AB occurrant in L , M ; erit LK aequalis ipsi KM .

Primò, sit punctum D a quo ducta est DGF extra circulum, et jungatur EK quae circumferentiae occurrat in Q , R ;

C c c c

et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, et DN perpendicularis ad CN, et rectangulum DN, NE aequale ipfi ON,



^d Pr. 88. NP, junctae DQ, DR circulum contingent^d. Occurrat DF rec-

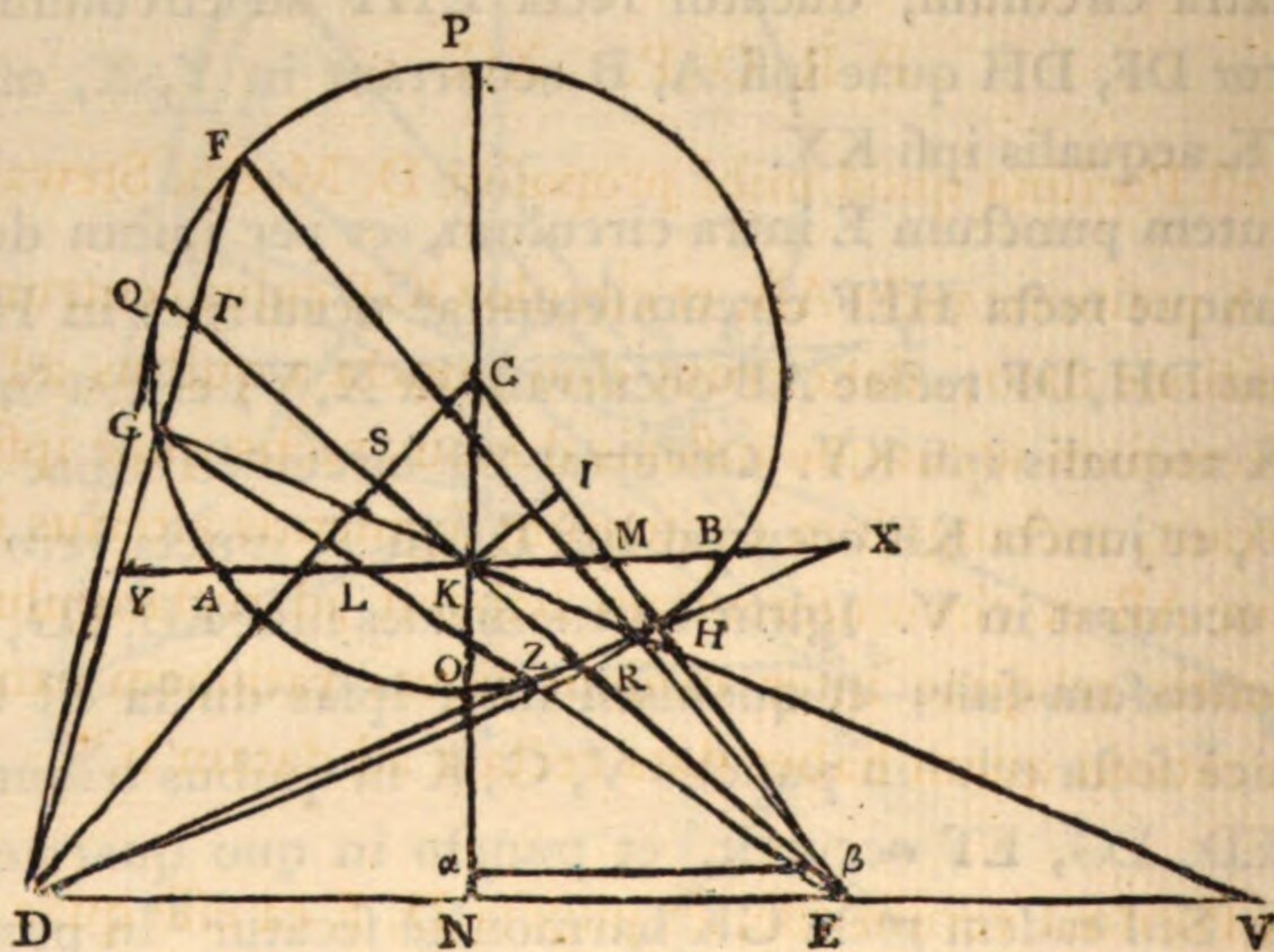
^a Pr. 73. tae QR in T, recta igitur DF harmonicè secta est^a in punctis D,

G, T, F, et rectae ED, EG, ET, EF sunt harmonicales. Recta autem LM parallela est uni ipsarum ED, quare bifariam secta erit a reliquis tribus quae ipsi occurrunt in punctis L, K, M, hoc est aequales sunt LK, KM. Et similiter, si a puncto E, si fuerit extra circulum, ducatur recta EHF ad circulum, et jungantur DF, DH quae ipsi A, B occurrant in Y, X, ostendetur YK aequalis ipsi KX.

Sit autem punctum E intra circulum, et per ipsum ducatur utcumque recta HEF circumferentiae occurrens in H, F, et junctae DH, DF rectae AB occurrant in X, Y; erit et in hoc casu KX aequalis ipsi KY. Occurrat DF circumferentiae rursus in G, et juncta KE occurrat ipsi DF in T, juncta vero KG ipsi DE occurrat in V. Igitur harmonicales sunt ED, EG, ET, EF, ut ostensum fuit; et quoniam inter ipsas ducta est GK, harmonicè secta erit ^e in punctis V, G, K in quibus tribus ip- ^e Pr. 86. sarum ED, EG, ET occurrit, et puncto in quo quartae EF occurrit. Sed eadem recta GK harmonicè secatur ^d in punctis ^d Pr. 87. V, G, K, et puncto in quo circumferentiae rursus occurrit; ergo quantum hoc punctum et est in recta EF, et in circumferentia; erit igitur in ipsarum intersectione H; transit igitur GK per punctum H, et propterea harmonicales sunt DG, DV, DH et juncta DK. Est autem recta YX parallela uni ipsarum DV, bifariam igitur secta erit a tribus reliquis in punctis Y, K, X, hoc est YK aequalis est ipsi KX.

COR. Hinc, quoniam ostensum fuit, ex hypothesi Partis primae, rectangulum DN, NE aequale esse rectangulo ON, NP, erit rectangulum GD, DF ad ipsum HE, EF, ut recta DN ad ipsam NE.

Si enim recta DE fuerit extra circulum, rectangulum GD, DF aequale est ^f quadrato ex DN una cum rectangulo ON, NP, hoc est, per Partem 1. hujus Prop. quadrato ex DN et rectangulo DN, NE, hoc est rectangulo ED, DN; similiter rectan-



gulum HE, EF aequale ostendetur rectangulo DE, EN. Igitur est rectangulum GD, DF ad ipsum HE, EF, ut ED, DN rectangulum ad ipsum DE, EN, hoc est ut recta DN ad ipsam NE.

Vide fig. 2.
pag. 570.

Si vero recta DE occurrat circulo in punctis a, b, erit rectangulum GD, DF, hoc est ipsum aD, Db excessus quadrati ex DN et quadrati ex aN, five rectanguli ON, NP, hoc est, per Partem 1. erit rectangulum GD, DF excessus quadrati ex DN et rectanguli DN, NE, qui excessus aequalis est rectangulo ND, DE. Rectangulum autem HE, EF, five aE, Eb excessus est quadrati ex aN, hoc est rectanguli ON, NP, five, per Par-

tem 1. hujus, rectanguli DN, NE, et quadrati ex EN, qui excessus aequalis est rectangulo DE, EN. Igitur rectangulum GD, DF est ad ipsum HE, EF, ut rectangulum ND, DE ad ipsum DE, EN, hoc est ut recta DN ad ipsam NE.

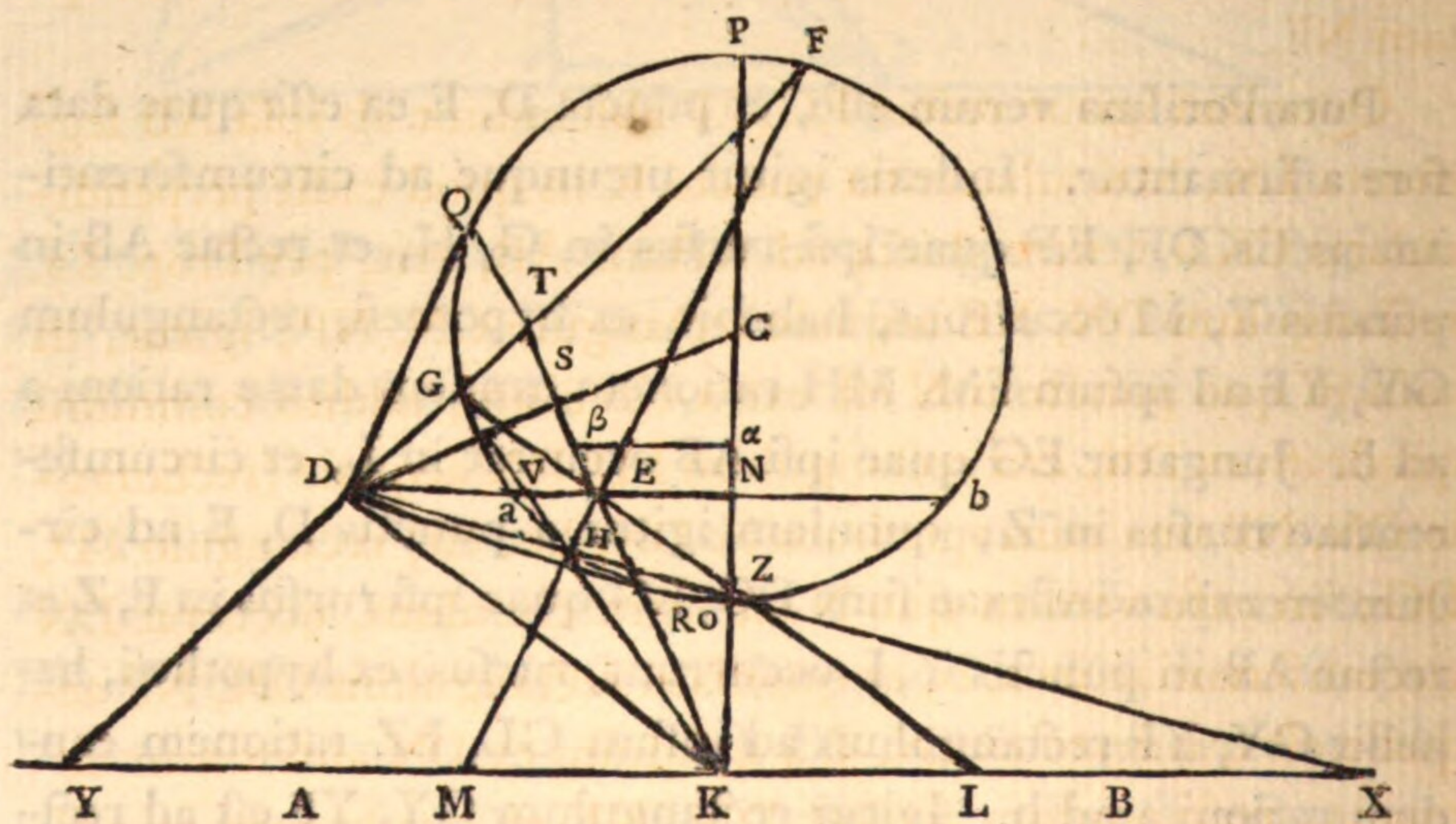
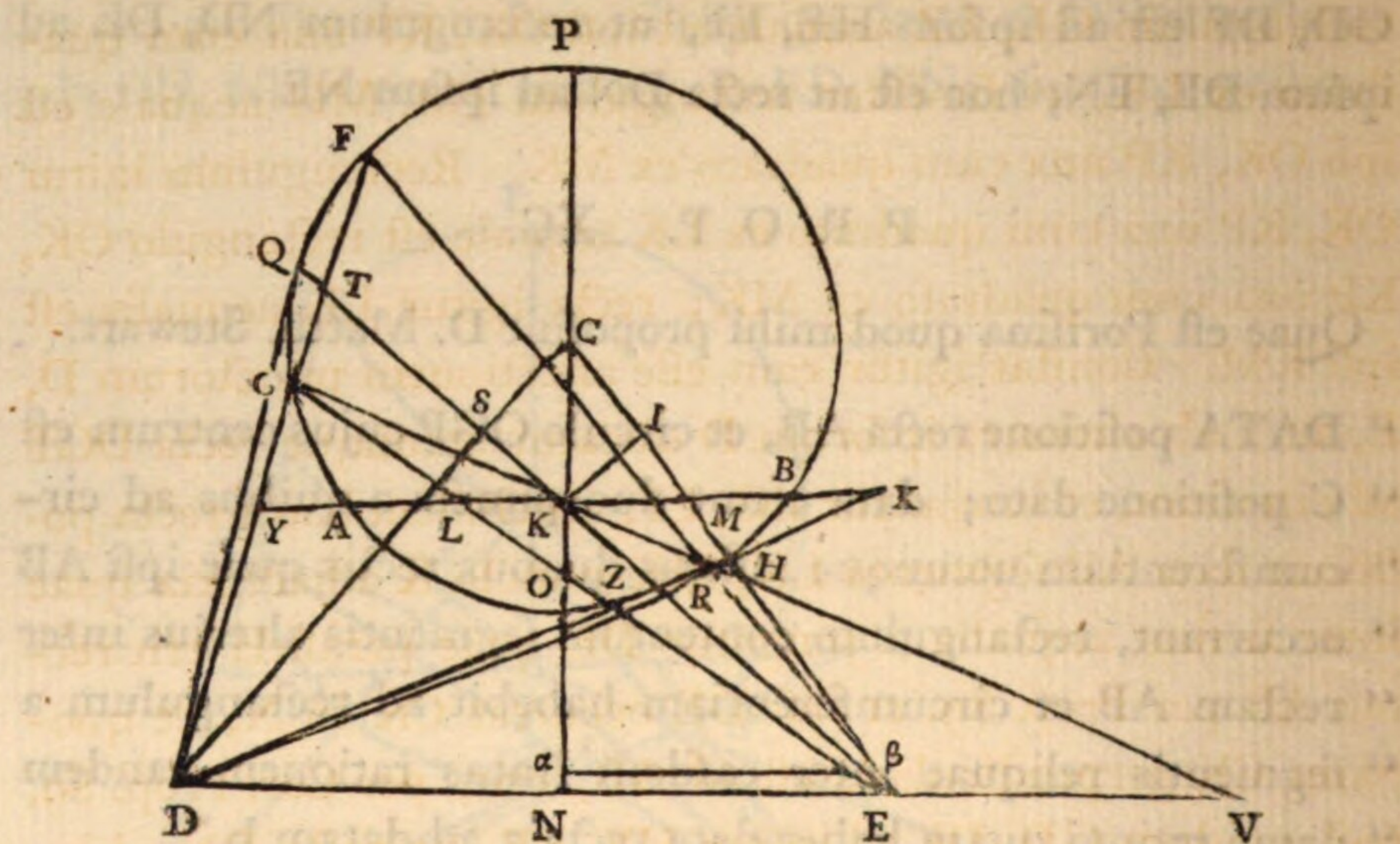
P R O P. XC.

Quae est Porisma quod mihi proposuit D. Matth. Stewart.

“ DATA positione recta AB, et circulo OGP cujus centrum est
 “ C positione dato; data erunt duo puncta a quibus ad circumferentiam utcumque inflexis duabus rectis quae ipsi AB
 “ occurrant, rectangulum contentum segmentis alterius inter
 “ rectam AB et circumferentiam habebit ad rectangulum a
 “ segmentis reliquae inter easdem lineas rationem eandem
 “ datae rationi quam habet data recta a ad datam b.”

Putat Porisma verum esse, et puncta D, E ea esse quae data fore affirmantur. Inflexis igitur utcumque ad circumferentiam rectis DF, EF quae ipsi rursus in G, H, et rectae AB in punctis Y, M occurrunt, habebit, ex hypothese, rectangulum GY, YF ad ipsum FM, MH rationem eandem datae rationi a ad b. Jungatur EG quae ipsi AB occurrat in L, et circumferentiae rursus in Z; quoniam igitur a punctis D, E ad circumferentiam inflexae sunt DG, EG quae ipsi rursus in F, Z et rectae AB in punctis Y, L occurrunt, rursus, ex hypothese, habebit GY, YF rectangulum ad ipsum GL, LZ rationem eandem rationi a ad b. Igitur rectangulum GY, YF est ad rectangulum FM, MH, ut idem GY, YF ad rectangulum GL, LZ, quod propterea aequale est ipsi FM, MH. Ad AB duca-

tur perpendioularis CK quae circumferentiae occurrat in O, P, et, si K fuerit intra circulum, occurrat AB circumferentiae



in A, B punctis, aequales igitur sunt AK, KB; et quoniam rectangulum GL, LZ aequale est ipsi FM, MH, erit et rect-

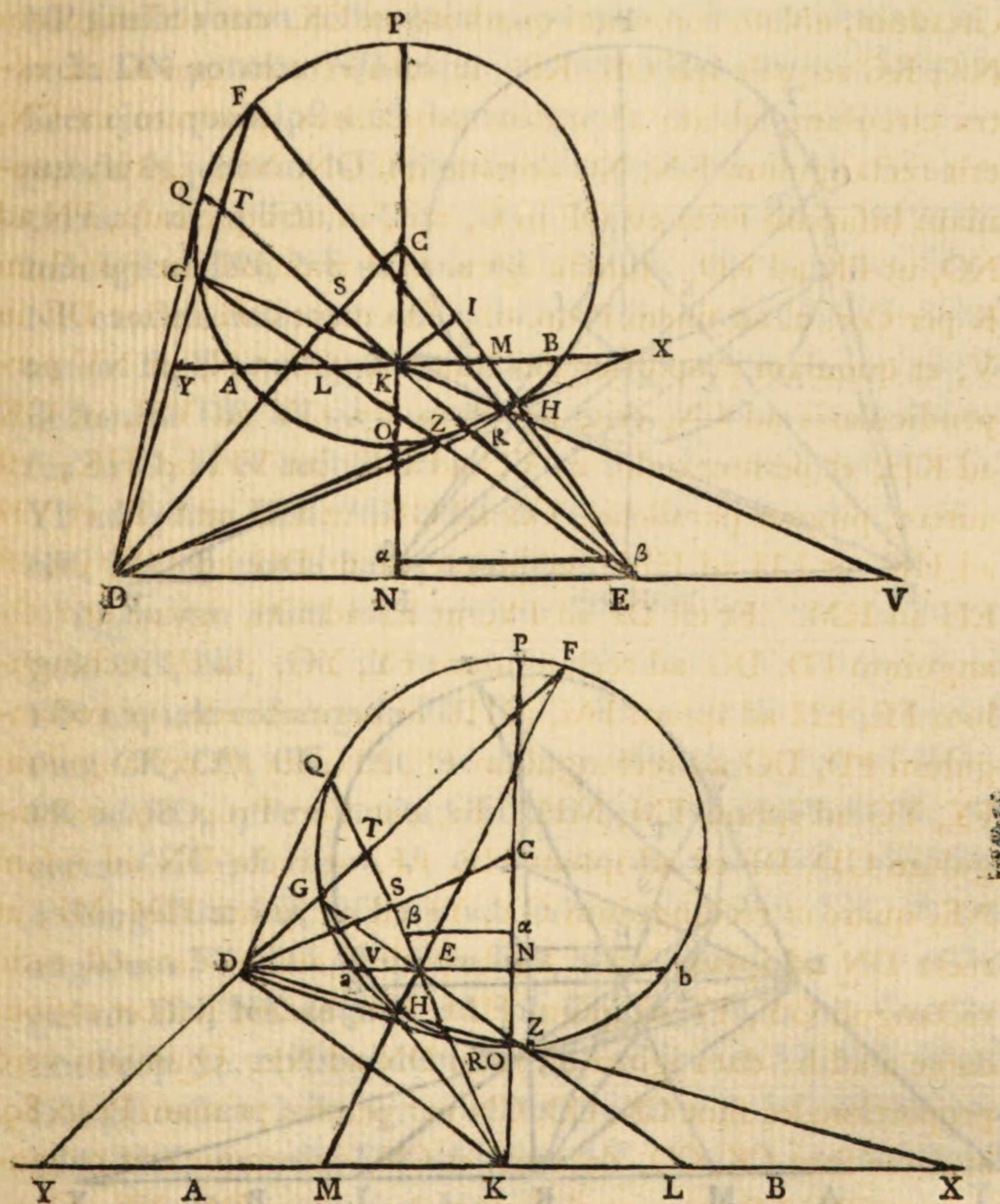
angulum AL, LB aequale ipsi AM, MB, quare recta LK ipsi KM est aequalis. Si vero punctum K fuerit extra circulum, rectangulum GL, LZ aequale est ipsi OK, KP una cum quadrato ex LK, et similiter rectangulum FM, MH aequale est ipsi OK, KP una cum quadrato ex MK. Rectangulum igitur OK, KP una cum quadrato ex LK aequale est rectangulo OK, KP una cum quadrato ex MK; recta igitur LK aequalis est ipsi KM. Constat igitur eam esse affectionem punctorum D, E, ut si ab alterutro ipsorum D ducatur utcunque recta DGF ad circulum, et jungantur EG, EF, abscindunt hae a recta positione data AB segmenta LK, MK puncto K adjacentia quae inter se sunt aequalia. Jungatur DE quae parallela erit rectae AB per Prop. 89. et ipsi DE occurrat CK in N, et quoniam CK perpendicularis est ad AB, erit, per Cor. Prop. 89. rectangulum GD, DF ad ipsum HE, EF, ut recta DN ad ipsam NE.

Quoniam igitur rectae EG, EF abscindunt ab ipsa AB segmenta LK, MK adjacentia puncto K in quod cadit perpendicularis CK a centro ducta ad rectam AB, erit, per Prop. 89. rectangulum DN, NE aequale rectangulo ON, NP; igitur, in casu in quo punctum N est extra circulum, addito communi quadrato ex DN, erit rectangulum ED, DN aequale (rectangulo ON, NP una cum quadrato ex DN, hoc est) rectangulo FD, DG; in casu vero in quo N est intra circulum, occurrat DN circumferentiae in a, b, et quoniam rectangulum ON, NP aequale est quadrato ex aN, si a quadrato ex DN auferantur aequalia, rectangulum scilicet DN, NE et quadratum ex aN, erit reliquum rectangulum ED, DN aequale reliquo aD, Db, hoc est rectangulo FD, DG. Et quoniam, per eandem Prop.

89. proportionales sunt CN, CO, CK, erit rectangulum NC, CK aequale quadrato ex CO, et, in casu in quo K est intra circulum, ablato communi quadrato ex CK, erit rectangulum NK, KC aequale ipsi OK, KP; in casu vero in quo K est extra circulum, ablato ab iisdem aequalibus quadrato ex CN, erit rectangulum KN, NC aequale ipsi ON, NP; igitur, quoniam bifariam secta est OP in C, erit, in utroque casu, PN ad NO, ut PK ad KO. Juncta igitur GH transibit per punctum K per Cor. 2. ad finem Prop. 61. Occurrat GH rectae DE in V, et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, et NV perpendicularis ad CN, erit, per Prop. 87. GV ad VH, ut GK ad KH, et permutando, ut VG ad GK, ita VH ad HK; est autem, propter parallelas, VG ad GK, ut DG ad GY, et VH ad HK, ut EH ad HM; et propterea ut DG ad GY, ita est EH ad HM. Et est DF ad FY, ut EF ad FM, igitur ut rectangulum FD, DG ad rectangulum FY, YG, ita est rectangulum FE, EH ad ipsum FM, MH; et permutando, ut rectangulum FD, DG ad rectangulum FE, EH, ita est rectangulum FY, YG ad ipsum FM, MH. Et, per Cor. Prop. 89. rectangulum GD, DF est ad ipsum HE, EF, ut recta DN ad ipsam NE, quare et rectangulum GY, YF est ad ipsum HM, MF, ut recta DN ad ipsam NE. Ex hypothese autem data est ratio rectanguli GY, YF ad ipsum HM, MF, eadem scilicet rationi datae a ad b; data igitur est ratio DN ad NE. Quoniam vero proportionales sunt CK, CO, CN per partem primam Prop. 89. et datae sunt CK, CO, data erit et CN, datumque erit rectangulum ON, NP cui aequale^b est rectangulum DN, NE. Quoniam igitur data est ratio DN ad ipsam NE, et datum est rectangulum ipsis contentum, specie et magnitudine datum est

^b Pr. 89.

rectangulum DN, NE, et propterea ipsius latera DN, NE magnitudine data sunt^c, sed et positione, et datum est punc-^c 6o. Dat.



tum N, igitur D, E puncta data sunt. Quod erat ostenden-
dum.

D d d d

CK, CO fumatur tertia proportionalis CN, et per N ducatur DE parallela rectae AB; fiatque rectangulum aequale ipsi ON, NP simile autem rectangulo quod ipsis a, b continetur; et in recta DN ponatur ND aequalis alteri lateri inventi, lateri scilicet ejus quod ipsi a est homologum; et ad contrarias partes puncti N ponatur NE aequalis reliquo lateri, si AB circulo occurrat; ad easdem autem partes si non occurrat. Rectangulum igitur DN, NE aequale est ipsi ON, NP, et habet DN ad NE eandem rationem quam habet recta a ad ipsam b. Puncta autem D, E erunt puncta invenienda, hoc est, si ab ipsis inflectantur DF, EF ad circumferentiam, occurrantque ipsi rursus in G, H et rectae AB in Y, M, habebit rectangulum GY, YF ad ipsum HM, MF eandem rationem quam habet DN ad NE, hoc est quam habet a ad b.

Quoniam enim rectangulum DN, NE aequale est rectangulo ON, NP, erit, ut in analysi ostensum, rectangulum ED, DN aequale rectangulo FD, DG. Et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, erit, ut ibidem ostensum, PN ad NO, ut PK ad KO, quare juncta GH transibit per punctum K. Occurrat GH ipsi DE in V, et omnino ut in analysi, ostendetur rectangulum FD, DG esse ad rectangulum FE, EH, ut rectangulum FY, YG ad ipsum FM, MH. Quoniam vero rectangulum DN, NE aequale est ipsi ON, NP, erit, per Corollarium Prop. 89. rectangulum FD, DG ad ipsum FE, EH, ut recta DN ad rectam NE; igitur rectangulum FY, YG est ad ipsum FM, MH, ut recta DN ad ipsam NE, hoc est, ex constructione, ut recta a ad ipsam b.

COR. Si igitur fuerint duo puncta D, E a quorum alterutro D ducta DGF ad circulum, junctae EG, EF aequalia rectae AB

segmenta abscindunt adjacentia puncto K in quod perpendicularis a centro C ad AB cadit, si CK occurrat junctae DE in N, DF vero et EF occurrant AB in Y, M; erit rectangulum GY, YF ad ipsum HM, MF, ut recta DN ad ipsam NE.

P R O P. XCI.

Quae est Theorema cujus enuntiationem tradit Dom. Matthaeus Stewart in vol. 1. libri dicti "Essays and Observations physical, &c. Edinburgh 1754."

"SIT AB diameter circuli positione et magnitudine dati, occurratque recta CD ipsi normalis in dato puncto C; non autem sit C centrum circuli, et datum sit punctum D in recta CD; fitque quadratum ex CD majus rectangulo ACB, si sit punctum C intra circulum; si vero sit extra, fit quadratum ex CD minus rectangulo ACB; producat DC ad E, ut sit CE aequalis ipsi CD; data erunt duo puncta F, G extra rectam DE, ut, si ab ipsis inflectantur FH, GH ad punctum quodvis H in circumferentia, rectae DE occurrentes in K, L, erit summa quadratorum ex DK, EK ad rectangulum DLE in ratione data."

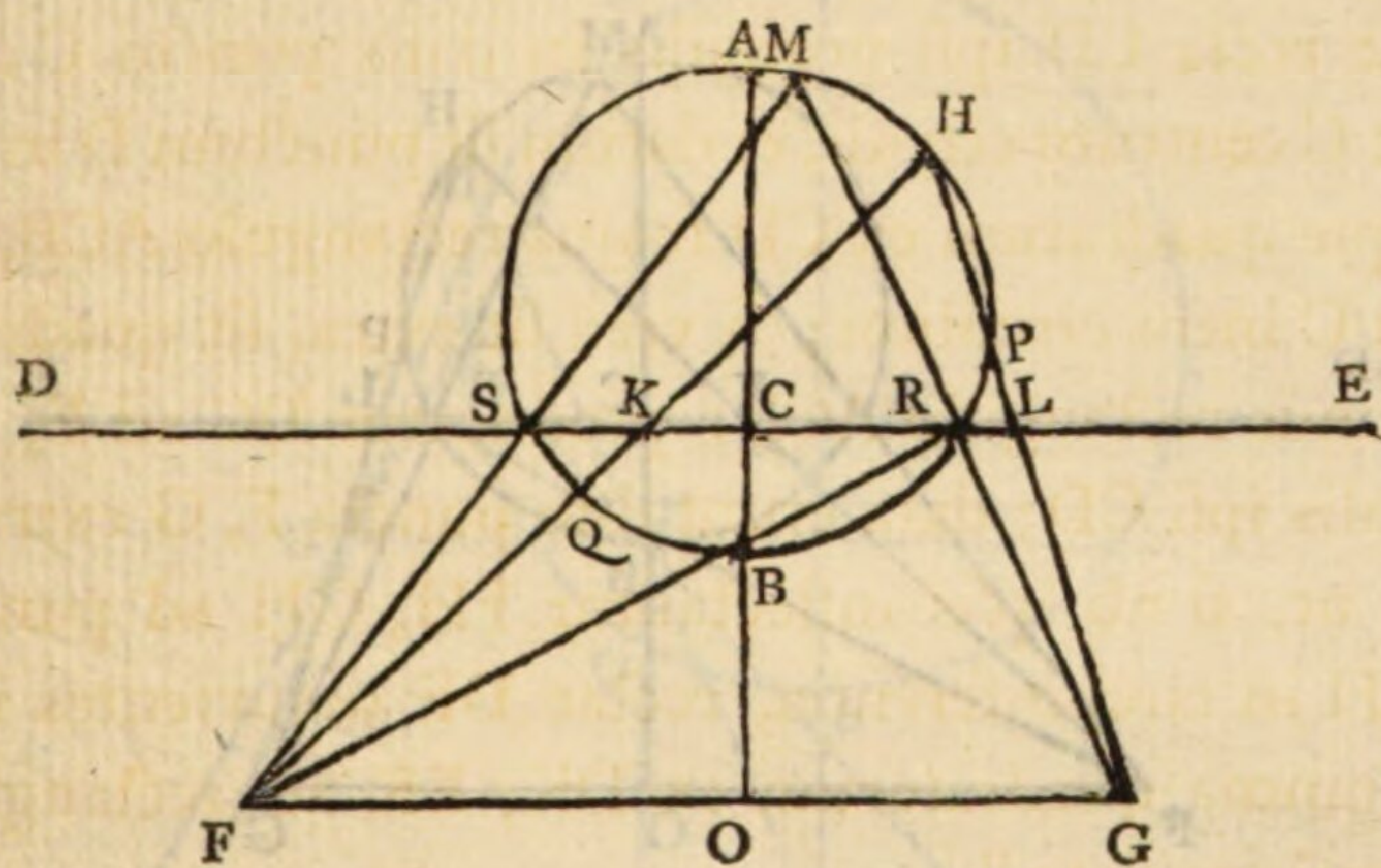
Theorema hoc est revera Porisma, quod ut sequitur investigavi.

CAS. 1. Quando punctum C est intra circulum.

Putaverum esse Porisma, occurratque recta DE circumferentiae in punctis R, S; quoniam igitur DE perpendicularis est ad diametrum AB, erit CR aequalis ipsi CS; et quoniam, ex hypothese, data est ratio summae quadratorum ex DK, KE ad rectangulum DL, LE, data erit et ratio dimidii hujus sum-

mae, hoc est ^a ratio quadratorum ex KC, CE ad rectangulum

DL, LE. Inflectantur FR, GR ad punctum R, et similiter data erit ratio quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE. Igitur quadrata ex CR, CE sunt ad rectangulum DR, RE, ut quadrata ex KC, CE ad rectangulum DL, LE; et reliquum, rectangulum scilicet SK, KR erit ^b ad reliquum rectangulum ^b 19. 5. SL, LR, ut quadrata ex CR, CE ad DR, RE rectangulum. Datae autem sunt DR, CR, CE, et propterea RE, data igitur est ratio quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE, et propterea data est ratio rectanguli SK, KR ad ipsum SL, LR.

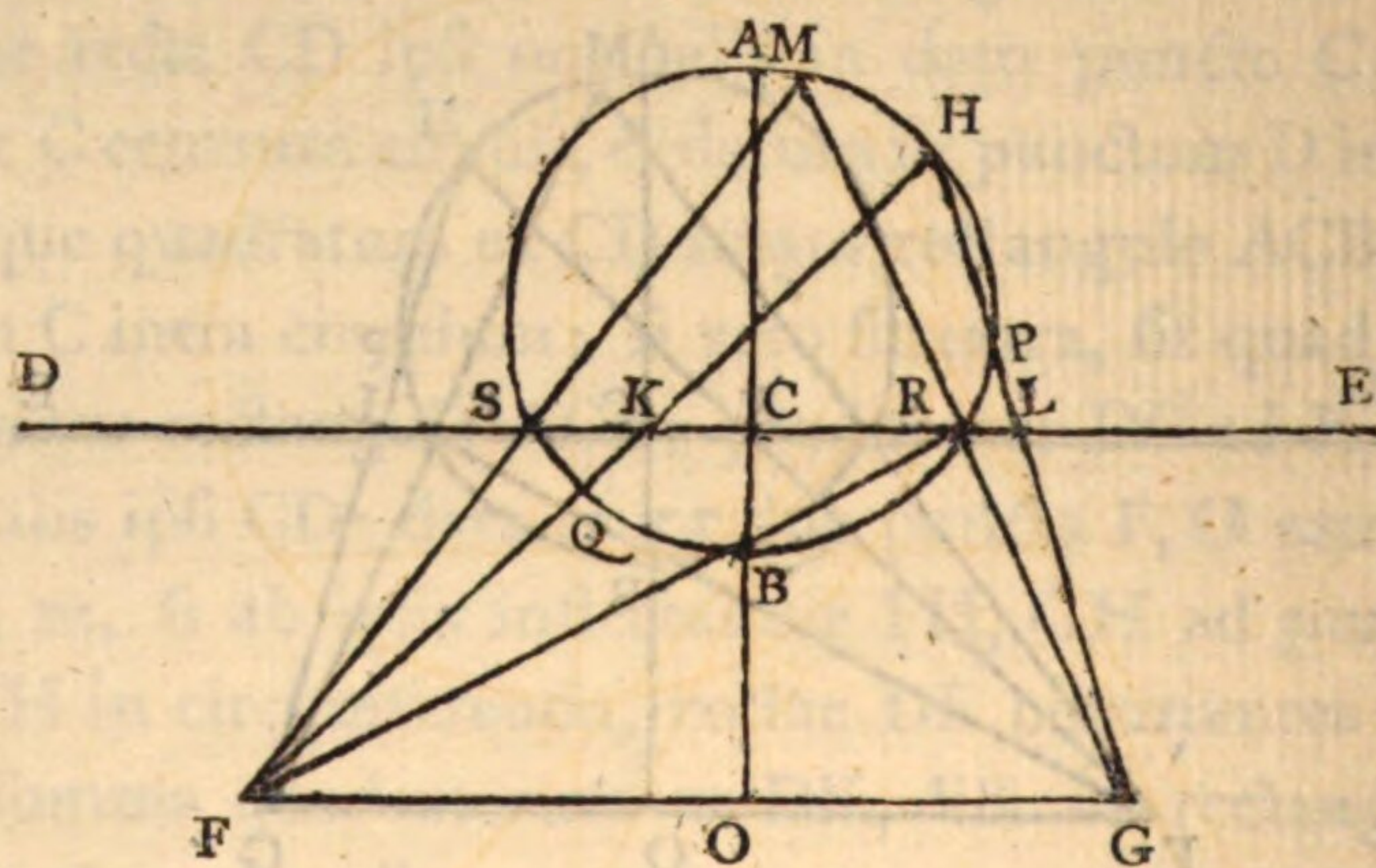


Occurrant rectae FH, GH circumferentiae rursus in Q, P, et quoniam rectangulum SK, KR aequale est rectangulo QK, KH, et SL, LR ipsi PL, LH, habebit rectangulum QK, KH ad ipsum PL, LH datam rationem quam habet summa quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE. Quoniam igitur duo sunt puncta F, G a quibus inflexis utcunque FH, GH ad circumferentiam quae ei rursus in Q, P et rectae DE in punctis K, L occurrunt, et est ratio rectanguli QK, KH ad ipsum PL, LH, eadem datae rationi quam habet summa qua-

dratorum ex CR, CE ad DR, RE rectangulum, data erunt puncta F, G per Prop. 90.

Componetur ita.

Inveniantur igitur puncta F, G, ut in Prop. 90. ostensum fuit; si ab ipsis utcunque inflectantur FH, GH ad circumferentiam, et rectae DE occurrant in K, L, habebit summa quadratorum ex DK, KE ad rectangulum DL, LE datam rationem, quam scilicet habet duplum quadratorum ex CR, RE ad DR, RE rectangulum. Quoniam enim, ex constructione, rect-



angulum QK, KH est ad ipsum PL, LH, hoc est rectangulum SK, KR est ad ipsum SL, LR, ut summa quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE; erit reliquum, quadrata scilicet ex KC, CE ad reliquum rectangulum DL, LE, ut summa quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE. Igitur duplum quadratorum ex KC, CE, hoc est summa quadratorum ex DK, KE est ad rectangulum DL, LE, ut duplum quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE, hoc est in ratione data.

rectangulum PL, LH ad ipsum QK, KH, ut recta GO ad ipsam OF. Est autem PL, LH rectangulum aequale rectangulo AC, CB et quadrato ex LC; et similiter rectangulum QK, KH aequale est rectangulo AC, CB et quadrato ex KC; horum igitur ratio eadem est rationi GO ad OF. Jungatur CF et circumferentiae occurrat in M, et juncta MG occurrat ipsi DE in N. Igitur idem ostendetur de inflexis GM, FM, quod de ipsis GH, FH jam ostensum est, scilicet rectangulum AC, CB et quadratum ex NC esse ad rectangulum AC, CB, ut recta

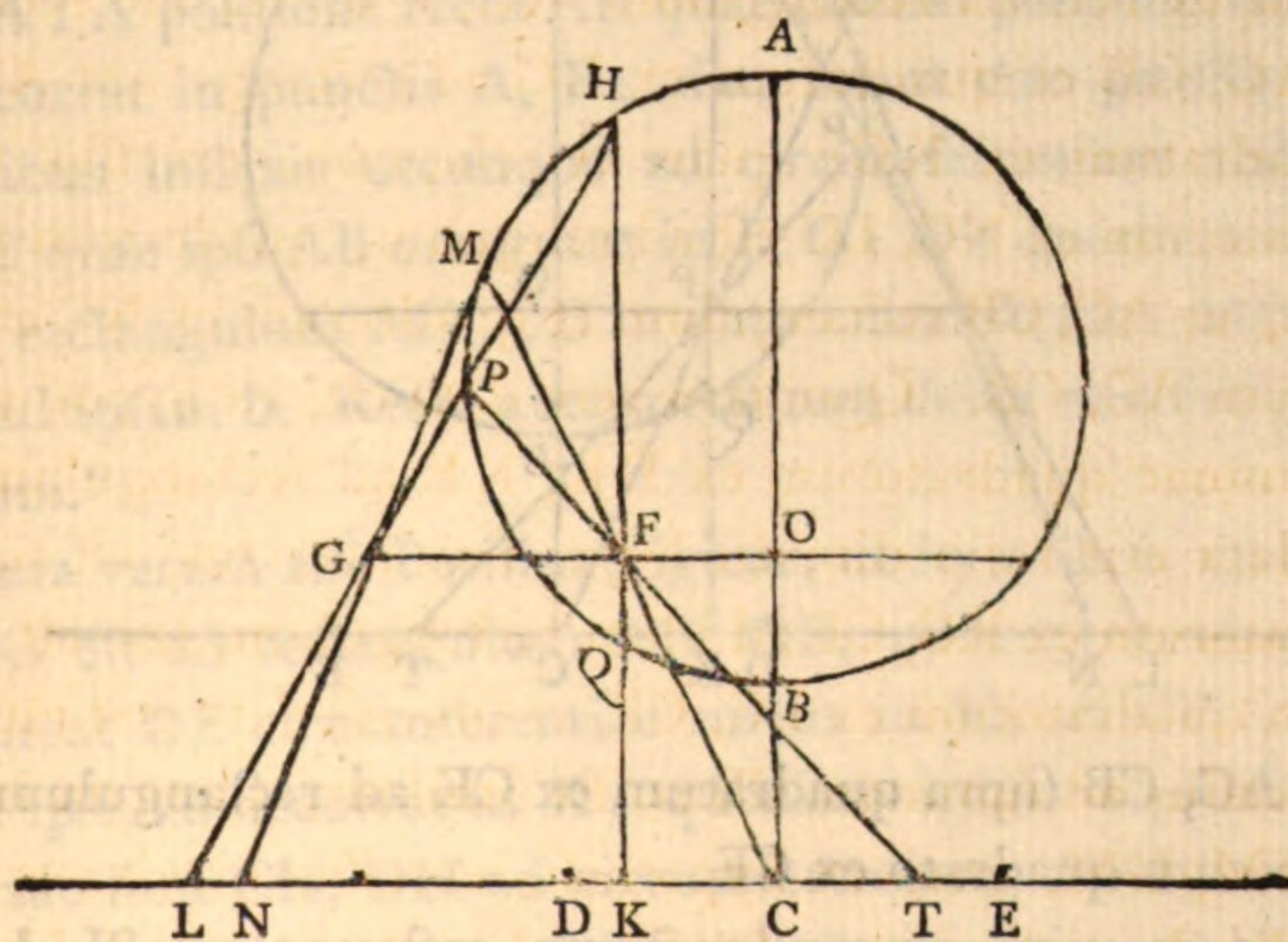
* GO ad ipsam OF. Ut igitur rectangulum AC, CB et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB, ita est rectangulum AC, CB et quadratum ex LC ad rectangulum AC, CB et quadratum ex KC; quare et reliquum, excessus scilicet quadratorum ex NC, LC est ad reliquum, quadratum scilicet

† ex KC, ut AC, CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB. Quoniam vero data est, ex hypothesi, ratio summae quadratorum ex DK, KE ad rectangulum DL, LE, data erit ratio dimidii hujus summae, hoc est summae quadratorum ex KC, CE ad idem rectangulum, hoc est ad excessum quadratorum ex LC, CE, et inverse data erit ratio hujus excessus ad summam illam. Et similiter, quoniam inflexae sunt FM, GM, erit, ex hypothesi, excessus quadratorum ex NC, CE ad quadratum ex CE in eadem data ratione. Ut igitur excessus quadratorum ex NC, CE ad quadratum ex CE, ita est excessus quadratorum ex LC, CE ad summam quadratorum ex KC, CE; quare reliquum, excessus scilicet quadratorum ex NC, LC est ad reliquum, quadratum scilicet ex KC, ut excessus quadratorum ex NC, CE ad quadratum ex CE. Et fuit †

† Vid. hanc notam. excessus quadratorum ex NC, LC ad quadratum ex KC, ut

AC, CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB; igitur excessus quadratorum ex NC, CE est ad quadratum ex CE, ut AC, CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB. Quare, ut reliquum, summa scilicet rectanguli AC, CB et quadrati ex CE, ad reliquum, excessum scilicet rectanguli AC, CB et quadrati ex CE, ita est AC, CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB, et ita ostensum fuit * rectangulum AC, CB et quadratum ex LC ad rectangulum AC, CB et quadratum ex KC, hoc est rectangulum PL, LH ad ipsum QK, KH. Data autem sunt puncta A, B, C, E; data

* Vid. hanc notam.



igitur est ratio rectanguli AC, CB et quadrati ex CE ad eorundem excessum, et propterea data est ratio rectanguli PL, LH ad ipsum QK, KH; igitur data sunt puncta F, G per Prop. 90.

Componetur ita.

Inveniantur puncta F, G per Prop. 90. ita ut ab ipsis ut-
cunque inflexis ad circumferentiam APB duabus rectis FH,

E e e e

una cum quadrato ex CE, ut rectangulum AC, CB una cum quadrato ex CE ad eorundem excessum; et invertendo, est summa quadratorum ex KC, CE ad rectangulum DL, LE, ut excessus rectanguli AC, CB et quadrati ex CE ad eorundem summam; igitur duplum quadratorum ex KC, CE, hoc est quadrata ex DK, KE simul sunt ad rectangulum DL, LE ut duplum excessus rectanguli AC, CB et quadrati ex CE ad rectangulum AC, CB una cum quadrato ex CE. Q. E. D.

P R O P. XCII.

“ DATA positione rectâ AB quae circulo positione dato AEB
 “ occurrat in punctis A, B; data erunt duo puncta C, D a
 “ quibus inflexis utcunque ad circumferentiam rectis CE,
 “ DE quae ipsi AB occurrant in F, G; erit quadratum ex FG
 “ ad rectangulum AG, GB in data ratione quam habet recta
 “ a ad ipsam b. Recta autem AB non debet transire per cen-
 “ trum.”

Putaverim esse Porisma; igitur, ex hypothese, quadratum ex FG est ad rectangulum AG, GB, ut recta a ad ipsam b. Occurrat DE circumferentiae rursus in H, et CH jungatur quae ipsi AB occurrat in K; quoniam igitur a punctis C, D inflexae sunt CH, DH ad circumferentiam, rursus, ex hypothese, erit quadratum ex GK ad rectangulum AG, GB, ut a ad b; est igitur quadratum ex FG aequale quadrato ex GK, et recta FG aequalis ipsi GK; hoc est puncta C, D sunt ejusmodi, ut ductâ a puncto D recta DHE utcunque ad circumferentiam, junctae CE, CH aequalia intercipient segmenta rectae AB inter ipsas et rectam DE. Si igitur ducatur DA, ea necessario circumferentiam in A continget, nam juncta CA nullum aufert seg-

est, ex hypothesi, in data ratione. Et datum est quadratum ex DA, datum igitur est quadratum ex DC, et data erit recta DC, datumque punctum C. Quod fuit ostendendum.

Componetur ita.

A punctis A, B ducantur AD, BD circulum contingentes, et per D ducatur recta ipsi AB parallela, et in ea sumatur DC, ita ut quadratum ex CD sit ad illud ex DA, ut recta a ad ipsam b; erunt C, D puncta invenienda.

Inflectantur enim utcunque ad circumferentiam rectae CE, DE quae ipsi AB occurrant in F, G punctis. Quoniam igitur est ^a ED ad DH, ut EG ad GH, erit quadratum ex ED ad ^a Pr. 73. rectangulum ED, DH, ut quadratum ex EG ad rectangulum EG, GH; et permutando, ut quadratum ex ED ad quadratum ex EG, hoc est ut quadratum ex CD ad illud ex FG, ita est rectangulum ED, DH, sive quadratum ex AD ad rectangulum EG, GH, hoc est ad ipsum AG, GB; et rursus permutando, ut quadratum ex CD ad quadratum ex DA, hoc est ut recta a ad ipsam b, ita est quadratum ex FG ad rectangulum AG, GB. Q. E. D.

P R O P. XCIII.

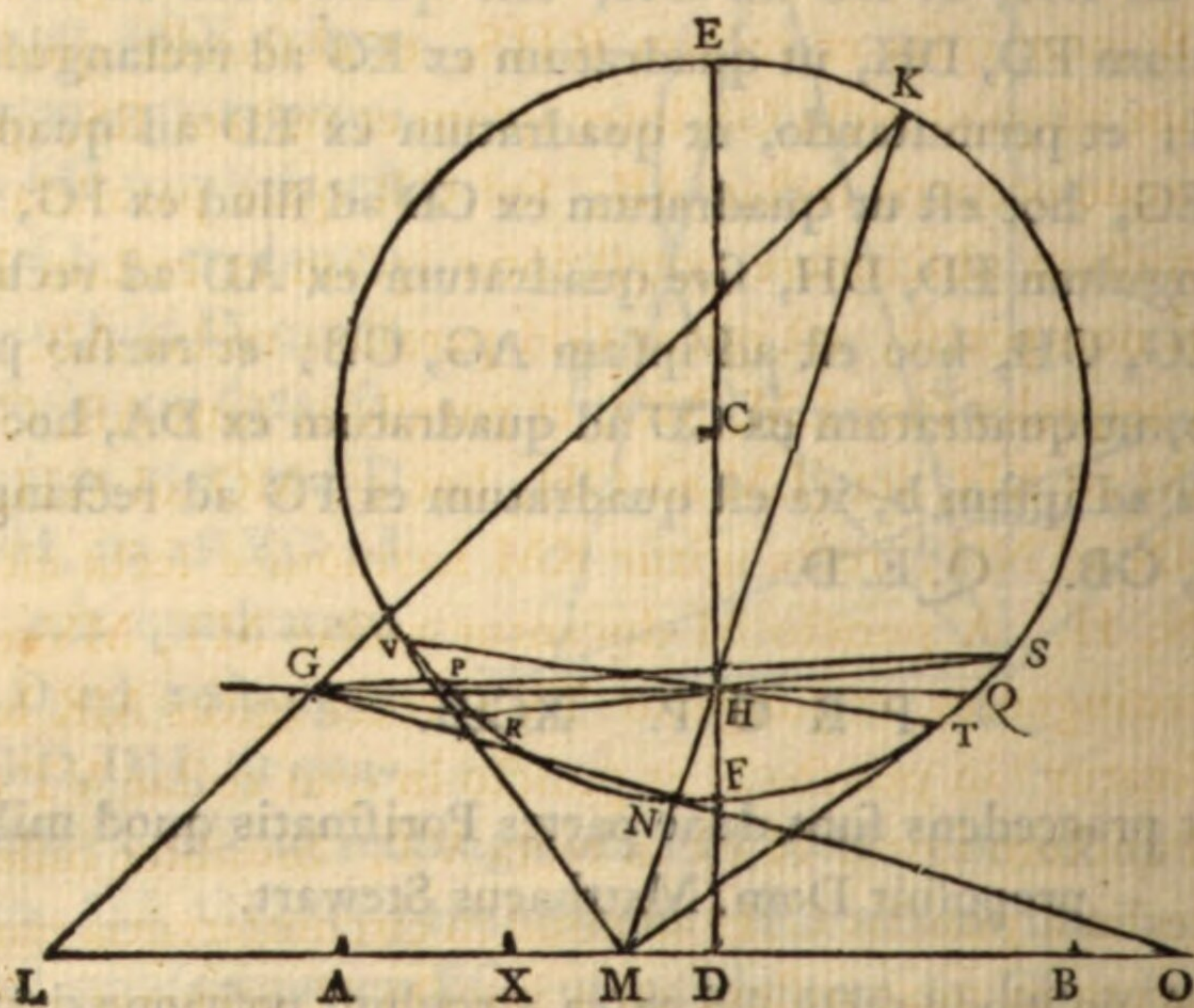
Haec et praecedens sunt duae partes Porismatis quod mihi proposuit Dom. Matthaeus Stewart.

- “ DATA positione rectae AB extra circulum positione datum
- “ EPF, ducatur a centro C recta CD perpendicularis ad AB,
- “ quae circumferentiae occurrat in E, F; et in AB sumantur
- “ puncta A, B aequaliter a puncto D distantia, ita ut qua-
- “ dratum ex AD, vel DB sit aequale rectangulo ED, DF. Da-

“ta erunt duo puncta G, H, a quibus inflexis utcunque ad
 “circumferentiam rectis GK, HK quae ipsi AB occurrant in
 “punctis L, M, erit quadratum ex LM ad quadrata ex MA,
 “MB simul in data ratione quam recta a habet ad rectam b
 “bis.”

Putamus verum esse Porisma; igitur, ex hypothese, quadratum
 ex LM est ad quadrata ex AM, MB simul, ut recta a ad ip-
 sam b bis, quare et quadratum ex LM est ad dimidium qua-
 dratorum ex AM, MB, hoc est ^a ad quadrata ex AD, DM si-

^a 9. aut 10. 2.

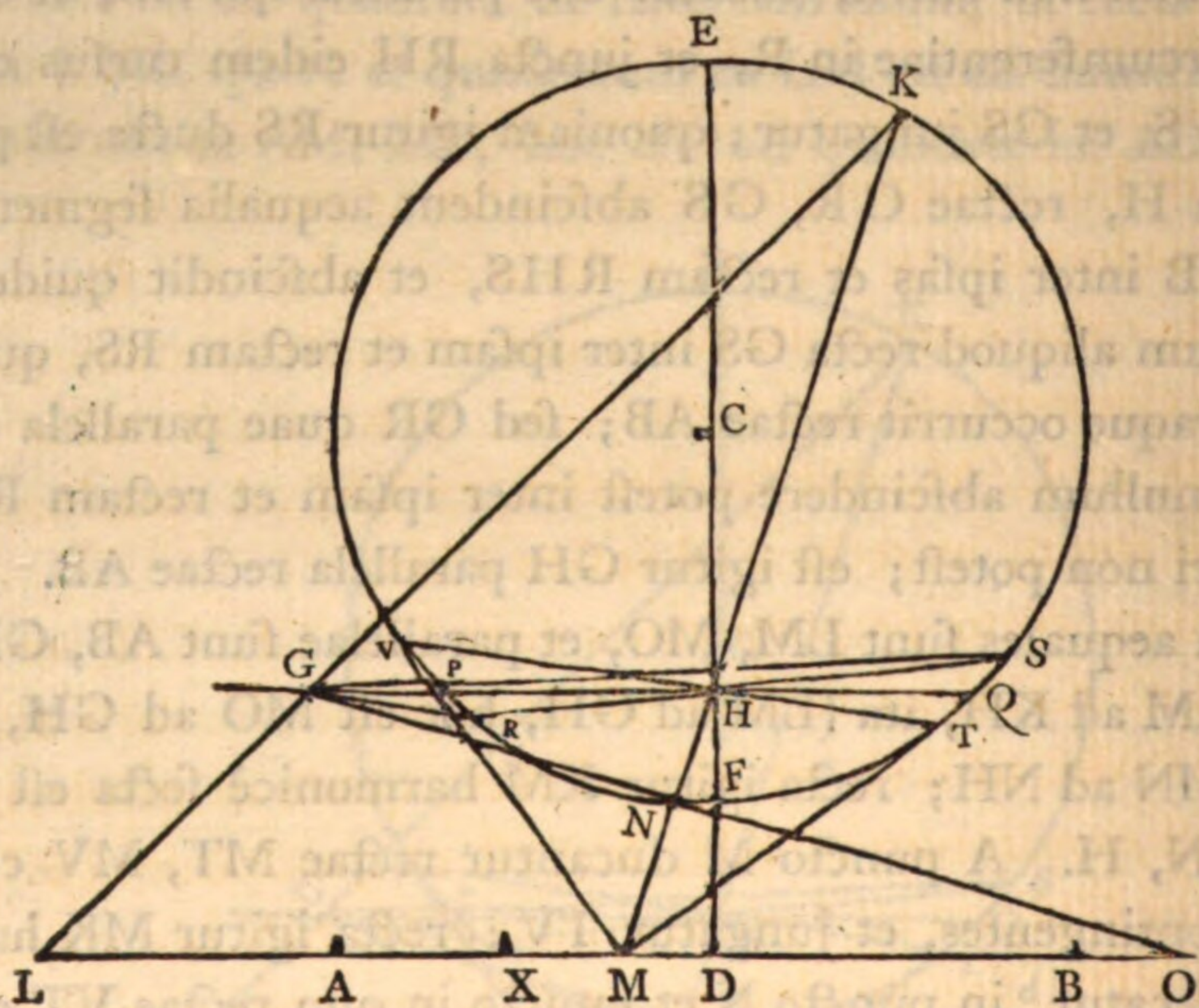


mul, ut recta a ad ipsam b. Occurrat HK circumferentiae
 rursus in N, et juncta GN rectae AB occurrat in O; quoniam
 igitur a punctis G, H inflexae sunt GN, HN quae rectae AB
 occurrunt in O, M, similiter ostendetur quadratum ex OM

esse ad quadrata ex AD, DM simul, ut recta a ad ipsam b. Igitur quadratum ex LM aequale est quadrato ex OM, et recta LM aequalis ipsi OM. Ea igitur est affectio punctorum G, H, ut per H ducta utcunque recta HK quae circumferentiae in K, N occurrit, junctae et productae GK, GN aequalia abscindunt segmenta LM, OM rectae AB inter ipsas et rectam KHM; et ex hoc sequitur junctam GH parallelam esse rectae AB; si enim non fuerit, ducatur GR parallela ipsi AB, et occurrat circumferentiae in R, et juncta RH eidem rursus occurrat in S, et GS jungatur; quoniam igitur RS ducta est per punctum H, rectae GR, GS abscindent aequalia segmenta rectae AB inter ipsas et rectam RHS, et abscindit quidem segmentum aliquod recta GS inter ipsam et rectam RS, quoniam utraque occurrit rectae AB; sed GR quae parallela est ipsi AB nullum abscindere potest inter ipsam et rectam RS, quod fieri non potest; est igitur GH parallela rectae AB. Et quoniam aequales sunt LM, MO, et parallelae sunt AB, GH, erit ut KM ad KH, ita (LM ad GH, hoc est MO ad GH, et ita est) MN ad NH; recta igitur KM harmonicè secta est in punctis N, H. A puncto M ducantur rectae MT, MV circumculum contingentes, et jungatur TV; recta igitur MK harmonicè secatur^b in puncto N et puncto in quo rectae VT occurrit. Punctum igitur H est in recta VT. Similiter inflexis duabus rectis a punctis G, H ad aliud in circumferentia punctum, quarum ea quae inflexa est a puncto H occurrat rectae AB in X, ostendetur punctum H esse in recta quae jungit tactus contingentium quae a puncto X ducuntur; punctum igitur H est in occurfu hujus rectae et ipsius VT. Recta autem VT, ut et quaevis alia quae jungit contactus contingen-

^b Pr. 73.

tium quae a puncto quovis in AB ducuntur, transit per punctum in diametro CD cujus distantia a centro C tertia est proportionalis rectis CD, CF, ut ostenditur in Lemmate ad finem hujus Propositionis. Punctum igitur H est in recta CD, et proportionales sunt CD, CF, CH. Datae autem sunt CD, CF, data propterea magnitudine est CH, sed et positione; quare datum est punctum H, ut et rectangulum KH, HN. Quoni-



am vero est MK ad KH, ut MN ad NH, erit ut quadratum ex MK ad quadratum ex KH, hoc est ut quadratum ex LM ad illud ex GH, ita rectangulum KM, MN ad rectangulum KH, HN; et permutando, ut quadratum ex LM ad rectangulum KM, MN, ita quadratum ex GH ad rectangulum KH, HN. Est autem rectangulum KM, MN aequale rectangulo ED, DF una cum quadrato ex DM, hoc est quadratis ex AD,

DM; et, ex hypothesi, data est ratio quadrati ex LM ad quadrata ex AD, DM, eadem scilicet rationi rectae a ad ipsam b . Data igitur est ratio quadrati ex GH ad KH, HN rectangulum quod datum ostensum est; quare datum est quadratum ex GH, et recta GH et punctum G data erunt. Quod fuit ostendendum.

Componetur ita.

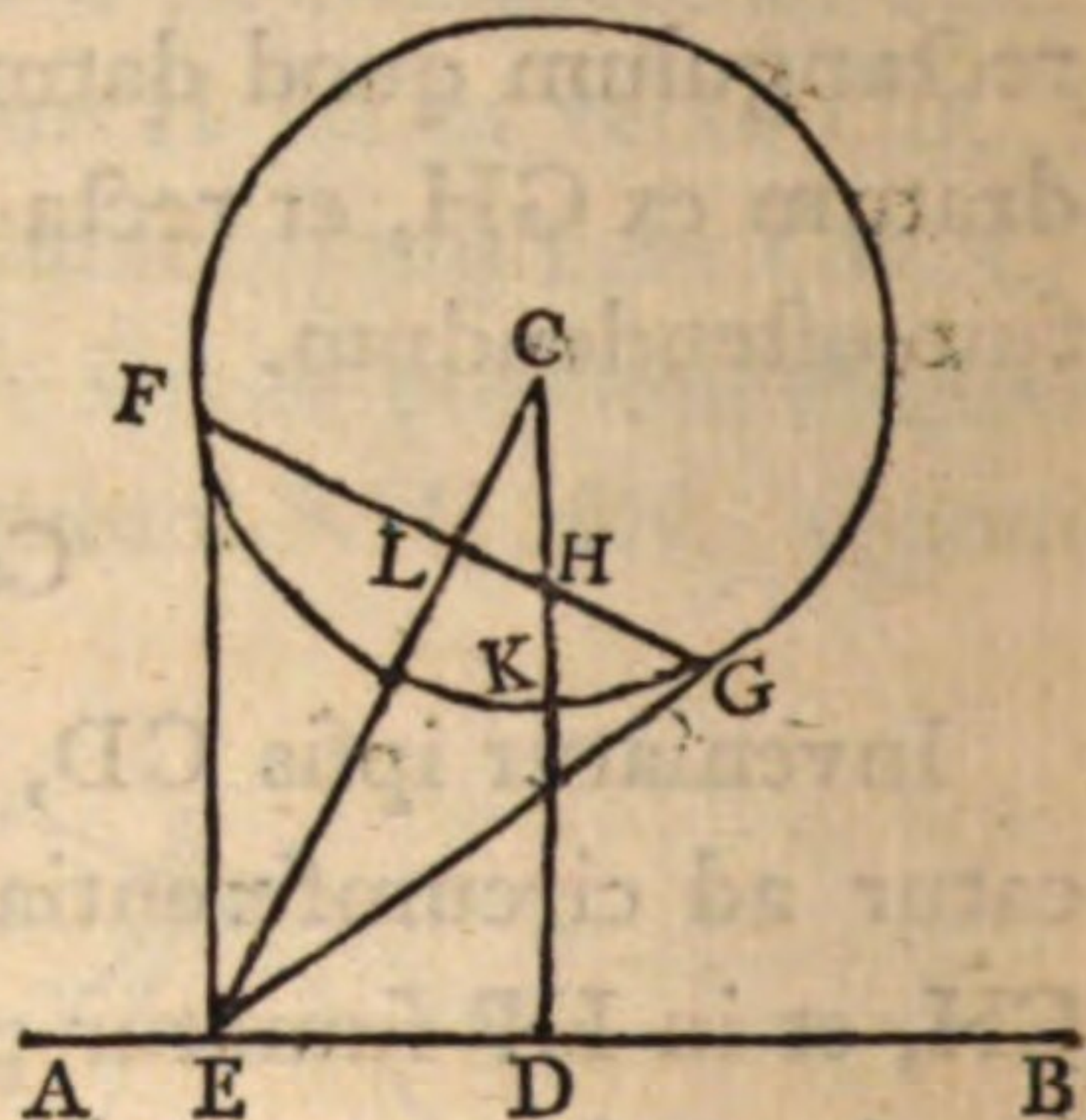
Inveniatur ipsis CD, CF tertia proportionalis CH, et ducatur ad circumferentiam recta HP ad angulos rectos ipsi CH, et in HP sumatur punctum G, ita ut quadratum ex GH sit ad quadratum ex HP, ut recta a ad ipsam b . Erunt G, H puncta quae invenienda sunt; hoc est, inflexis utcunque ab ipsis ad circumferentiam rectis GK, HK, quae rectae AB occurrant in L, M, erit quadratum ex LM ad quadrata ex AM, MB simul, ut recta a ad ipsam b bis.

Quoniam enim proportionales sunt CD, CF, CH, et per H ducta est KHM ad rectam AB quae perpendicularis est ad CD, erit ^c MK ad KH, ut MN ad NH; quare ut quadratum ^e Prop. 87. ex MK ad quadratum ex KH, hoc est ut quadratum ex LM ad illud ex GH, ita est ^d rectangulum KM, MN hoc est rect- ^d Pr. 22. 6. angulum EDF, five quadratum ex AD, una cum quadrato ex DM ad rectangulum KH, HN, hoc est ad quadratum ex PH; et permutando, ut quadratum ex LM ad quadrata ex AD, DM simul, ita est quadratum ex GH ad illud ex PH, et ita, ex constructione est recta a ad ipsam b . Est igitur quadratum ex LM ad duplum quadratorum ex AD, DM, hoc est ad quadrata ex AM, MB simul, ut recta a ad ipsam b bis. Q. E. D.

F f f f

L E M M A ad Prop. 93.

SIT recta AB extra circulum cujus centrum est C, et ad AB ducatur perpendicularis CD; si a puncto quovis E in AB ducantur rectae circulum contingentes in punctis F, G, et juncta FG occurrat rectae CD in H, CD vero occurrat circumferentiae in K inter C et D; proportionales erunt CD, CK, CH.



Jungatur enim EC occurratque rectae FG in L. Igitur quoniam recti sunt anguli ELH, EDH puncta E, L, H, D sunt in circulo, quare rectangulum DC, CH aequale est ipsi EC, CL, hoc est quadrato ex semidiametro CK; proportionales igitur sunt CD, CK, CH.

Et si per punctum H intra circulum ducatur utcunque recta FHG, et ducantur a punctis F, G, in quibus circumferentiae occurrit, rectae FE GE circulum contingentes, et per ipsarum occursum E ducatur ED perpendicularis ad rectam CH productam; erunt similiter CD, CK, CH proportionales; demonstratur ut praecedens.

LOGARITHMIS.

LEMMA I.

“QUAEVIS ratio AB ad BC componi potest ex rationibus
 “inter se iisdem, quarum numerus major sit numero quovis
 “dato.”

Inter AB et BC inveniatur media proportionalis BD, et
 rursus inter AB, BD, et inter BD,
 BC, inveniantur mediae EB, FB, et
 ita deinceps; numerus rationum in
 quovis casu duplus erit numeri ea-
 rum in praecedente; atque ita major fieri potest quovis nu-
 mero dato.

A E D F C B

LEMMA II.

“SI fuerint duae rationes, utraque majoris ad minorem; una
 “autem earum composita sit ex rationibus quae inter se sunt
 “eadem, et reliqua etiam ex iisdem componatur; erit ea
 “quae composita est majore numero rationum major ratione,
 “quae componitur ex minore numero earundem. Et vice
 “versa, major ratio componetur ex majore numero earundem
 “rationum; quae quidem manifesta sunt.

“Contrarium autem eveniet si utraque ratio fuerit mino-
 “ris ad majorem, ut patet.”

L E M M A III.

“ SI una ratio major fit altera, utraque vero fit majoris ad
 “ minorem, et utraque composita fit ex eodem numero ratio-
 “ num inter se earundem; erit una ex rationibus ex quibus
 “ major ratio composita est major unâ ex iis ex quibus com-
 “ posita est reliqua ratio; nam si eadem esset huic vel minor
 “ ipsâ, major ratio eadem esset minori, vel ipsâ minor, quod
 “ fieri non potest.”

L E M M A IV.

“ SINT duae magnitudines, quarum AB minor et AC ma-
 “ jor, potest series deinceps proportionalium quarum prima
 “ est AB, et secunda AC continuari ita ut earum ultima ma-
 “ jor fit quavis magnitudine data AD.”

Sumatur BE multiplex ipsius BC quae major fit BD, et ip-
 sis AB, AC, tertia proportionalis inveniatur AF et ipsis AC,
 AF inveniatur tertia proportionalis, et ita deinceps, donec tot
 sumantur rationes quarum prima
 est AB ad AC quot sunt partes in BE aequales ipsi BC; fitque AG ul-
 tima proportionalium. Et quoniam
 CF excessus tertiae et secundae proportionalis major est BC,
 excessu secundae et primae, et ita deinceps; erit magnitudo
 BG, quae continet tot harum proportionalium differentias quot
 BE continet partes aequales ipsi BC, major quam BE, et mul-
 to quam BD major.

A BCF

DEG

L E M M A V.

“QUAEVIS ratio AB ad BC componi potest ex rationibus
 “inter se iisdem, quarum una minor sit quavis ratione data
 “DB ad BC.”

Fiat series deinceps proportionalium, quarum prima est BC, et secunda BD, et continuetur ita ut ultima earum BE major sit quam BA, quod fieri potest per Lemma 4. et componatur, quod fieri potest per Lemma 1. ratio AB ad BC ex rationibus inter se iisdem, quarum numerus major sit numero rationum, quae eadem sunt rationi DB ad BC, ex quibus composita est ratio EB ad BC.

E	A F	D C C	B

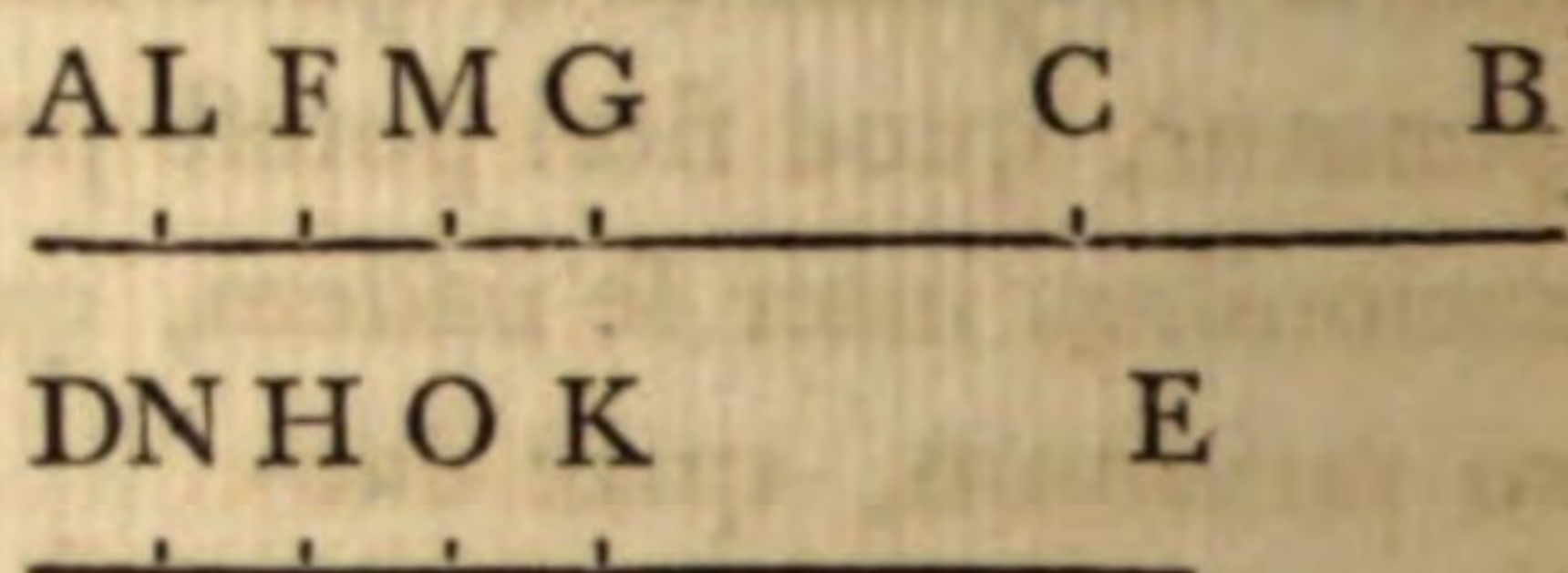
Sit ratio AB ad BF una ex iis ex quibus composita est ratio AB ad BC; sit autem ratio AB ad BG ea ex hisce composita, quarum numerus idem est cum numero rationum ex quibus composita est ratio EB ad BC.

Quoniam igitur ratio AB ad BC composita est ex majori numero earundem rationum quam ratio AB ad BG; erit ratio AB ad BC major ratione AB ad BG, per Lemma 2; est igitur BC minor quam BG, [10. 5.] et est EB major quam AB, igitur ratio EB ad BC major est ratione AB ad BG; et compositae sunt hae rationes ex eodem numero rationum, quare [Lem. 3.] ratio DB ad BC una ex iis ex quibus composita est ratio EB ad BC major est ratione AB ad BF, quae una est ex iis ex quibus composita est ratio AB ad BG; ratio autem AB ad BC composita est ex hisce, hoc est ex rationibus quae minores sunt ratione data DB ad BC.

DEFINITIO I.

SIT data ratio AB ad BC et data magnitudo DE; componatur autem ratio AB ad BC ex quocunque numero rationum quae eadem sunt inter se, non autem sint rationes aequalis ad aequalem, ex. gr. Ex AB ad BF, FB ad BG, &c. et fecetur DE in tot partes aequales DH, HK, &c. quot sunt rationes ex quibus composita est ratio

AB ad BC; vel si ratio AB ad BC componatur ex rationibus quarum numerus major vel minor est quam in praecedente



exemplo, ut ex rationibus AB ad BL, LB ad BF, &c. Secetur semper DE in tot partes aequales DN, NH, &c. quot sunt rationes. Hoc facto, ratio AB ad BF, vel ratio AB ad BL, &c. una scilicet ex iis ex quibus, in quovis casu, componitur ratio AB ad BC, dicatur ratio radicalis; et pars DH, vel DN, &c. in eodem casu, dicatur pars radicalis. Ratio autem data AB ad BC dicatur ratio assumpta, et data magnitudo DE dicatur magnitudo assumpta.

D E F. II.

SI ratio aliqua FG ad GH componatur ex rationibus radicalibus, hoc est ex iisdem ex quibus composita est ratio AB ad BC, fitque magnitudo KL quae continet tot partes aequales iis in quas divisa est magnitudo DE, quot sunt rationes ex quibus composita est ratio FG ad GH; magnitudo KL dicatur Logarithmus rationis FG ad GH; quoniam scilicet KL continet

tot partes radicales quot sunt rationes radicales ex quibus composita est ratio FG ad GH.

Quoniam vero ratio HG ad GF, quae reciproca est rationis FG ad GH, componitur ex eodem numero rationum ex quibus ratio FG ad GH composita est, idem erit utriusque rationis Logarithmus.

Ut vero cognoscatur quando Logarithmus KL est rationis minoris ad majorem, convenit notam aliquam ei praefigere, ut postea ostendetur.

$$\begin{array}{r} \text{F} \qquad \qquad \text{H} \qquad \text{G} \\ \hline \text{K} \qquad \qquad \text{L} \\ \hline \text{A} \qquad \qquad \text{C} \qquad \text{B} \\ \hline \text{D} \qquad \qquad \text{E} \\ \hline \end{array}$$

COR. Et manifestum est DE Logarithmum esse rationis AB ad BC.

D E F. III.

SI autem ratio aliqua FG ad GH, quae primo fit majoris ad minorem, non componatur ex rationibus radicalibus, fit ratio FG ad GM ea quae ex iisdem composita proxime minor est ratione FG ad GH, et fit ratio FG ad GN ex iisdem composita proxime ma-

ior ratione FG ad

GH; fit autem

magnitudo KO

Logarithmus ra-

tionis FG ad GM, et KP Logarithmus rationis FG ad GN;

magnitudo KL, quae semper major est quam KO et minor

quam KP, quicumque fuerit numerus rationum radicalium ex

quibus assumpta ratio AB ad BC composita est, dicatur Lo-

garithmus rationis FG ad GH.

$$\begin{array}{r} \text{F} \qquad \qquad \text{M H N} \qquad \qquad \text{G} \\ \hline \text{K} \qquad \qquad \text{O L P} \\ \hline \end{array}$$

Si vero sit ratio HG ad GF minoris ad majorem, fumatur ratio MG ad GF quae ex rationibus radicalibus composita proxime major est ratione HG ad GF, et ratio NG ad GF quae ex iisdem composita proxime minor est eadem ratione; et sint KO, KP,

Logarithmi harum rationum, qui iidem sunt cum Logarithmis ratio-

F	M H N	G
—————		
K	O L P	
—————		

onum FG ad GM, et FG ad GN, et magnitudo KL, quae semper major est KO et minor quam KP, dicatur Logarithmus rationis HG ad GF, qui, ut patet, idem est cum Logarithmo rationis FG ad GH.

COR. 1. Hinc Logarithmus rationis aequalis ad aequalem est nullius magnitudinis sive est nihil.

Sit enim ratio AB ad BA, aequalis ad aequalem, et si ejus Logarithmus habeat ullam magnitudinem, sit ea magnitudo DF, et componatur assumpta ratio AB ad BC ex rationibus, quarum numerus major sit numero partium ipsi DF aequalium quae

in assumpta magnitudine DE continentur. Igitur quoniam numerus partium radicalium major est numero

A G	C	B
—————		
D H F		E
—————		

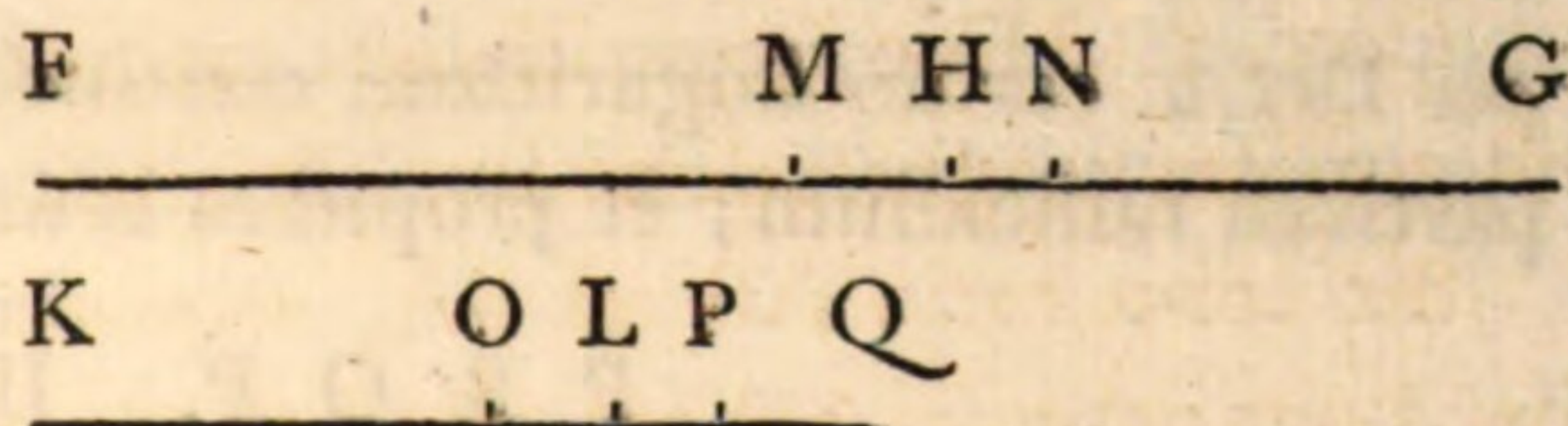
partium in DE aequalium ipsi DF, una ex partibus radicalibus minor erit quam DF. Sit ratio AB ad BG prima rationum radicalium, quae propterea est prima quae major est ratione AB ad BA, et sit DH prima partium radicalium; erit igitur DH minor DF, ex Definitione vero 3. DH Logarithmus sc. rati-

onis AB ad BG, major est quam Logarithmus rationis AB ad BA, hoc est quam DE, quod fieri non potest. Logarithmus igitur rationis AB ad BA aequalis sc. ad aequalem, nihil est.

COR. 2. Ejusdem rationis unicus est Logarithmus.

Si ratio proposita componatur ex rationibus radicalibus, hoc manifestum est. Si autem ratio aliqua FG ad GH non ex iisdem componatur, fit KL ejus Logarithmus secundum Def. 3. et si alius potest esse ejusdem Logarithmus, fit is KQ, quae primo major fit quam KL; et componatur assumpta ratio AB ad BC ex rationibus, quarum numerus major est numero partium ipsi LQ aequalium, quae in assumpta magnitudine DE continentur; fit autem ratio FG ad GM ea quae ex rationibus illis composita proxime minor est ratione FG ad GH, et fit ratio FG ad

GN ex iisdem composita quae proxime major est ratione FG ad GH, sintque KO,



KP harum rationum Logarithmi. Et quoniam ratio FG ad GN componitur ex rationibus radicalibus quarum numerus unitate major est numero earundem ex quibus composita est ratio FG ad GM, numerus partium radicalium in KP unitate major erit numero earundem in KO; est igitur OP una harum partium. Et quoniam numerus rationum ex quibus ratio AB ad BC composita est, hoc est numerus partium radicalium in DE major, ex constructione, est numero partium ipsi LQ aequalium quae in DE continentur, erit OP minor quam LQ, quare multo minor est LP ipsa LQ; minor igitur est KP quam KQ. Quoniam vero KP Logarithmus est rationis quae

ex radicalibus composita proxime major est ratione FG ad GH, erit KP [Def. 3.] major KQ quae Logarithmus ponitur rationis FG ad GH; quod fieri non potest. Nullus igitur est Logarithmus rationis FG ad GH praeter KL. Si vero ponatur KQ minorem esse quam KL, idem eodem modo ostendetur.

P R O P. I.

“ SI duae rationes sint inter se eadem, et una earum composita ex rationibus radicalibus; Logarithmi harum rationum erunt inter se aequales.”

Quoniam enim rationes sunt inter se eadem, compositae erunt ex eodem numero earundem rationum, ut patet; quare, per Def. 2. earum Logarithmi continebunt eundem numerum partium radicalium; et propterea erunt inter se aequales.

P R O P. II.

“ SIT ratio FG ad GH eadem rationi KL ad LM, fitque alia ratio A ad B; non autem composita sit ratio FG ad GH ex rationibus quarum unaquaeque eadem est rationi A ad B, unde neque ratio KL ad LM ex iisdem componatur. Sit autem ratio FG ad GN, ea quae ex rationibus A ad B composita proxime major est ratione FG ad GH; fitque ratio KL ad LO ea quae ex iisdem composita proxime major est ratione KL ad LM; erit ratio FG ad GN eadem rationi KL ad LO. Et similiter si sumantur rationes ex praedictis compositae quae proxime minores sunt FG ad GH, et KL ad LM, erunt rationes illae inter se eadem.”

Si enim rationes FG ad GN, KL ad LO, non sunt inter se eadem, una earum erit major altera; fit ratio FG ad GN major, et ut KL ad LO, ita fit FG ad GP. Igitur [Cor. 13.5.] ratio FG ad GN major est ratione FG ad GP. Et quoniam ratio FG ad GN ea est ex rationibus A ad B composita quae proxime major est ratione FG ad GH, erit ratio FG ad GH major ratione FG ad GP, quae minor est ratione FG ad GN. Igitur quoniam ratio KL ad LM eadem est rationi FG ad GH, quae major est ratione FG ad GP, erit [13.5.] ratio KL ad LM major (ratione FG ad GP, hoc est) ratione KL ad LO; sed et minor, quod fieri non potest. Igitur ratio FG ad GN eadem est rationi KL ad LO. Similiter altera pars Propositionis ostendetur.

F	P	H	N	G
—————				
K	M O			L
—————				
A				
—————				
B				
—————				

P R O P. III.

“ SI duae rationes FG ad GH, et KL ad LM, utraque majoris ad minorem, sint inter se eadem, non autem compositae sint ex rationibus radicalibus ex quibus scilicet composita est ratio assumpta AB ad BC; erit Logarithmus rationis FG ad GH idem cum Logarithmo rationis KL ad LM.”

Sit enim ratio FG ad GN ea quae ex radicalibus composita proxime major est ratione FG ad GH; fitque ratio KL ad LO

B

ea quae ex iisdem composita proxime major est ratione KL ad LM; et fit ratio FG ad GP ex radicalibus composita proxime minor ratione FG ad GH; et ratio KL ad LQ ea quae ex iisdem composita proxime minor est ratione KL ad LM. Sit autem RS logarithmus rationis FG ad GN, et RT logarithmus rationis FG ad GP; fit vero RV logarithmus rationis FG ad GH, qui scilicet, per Def. 3. semper major est quam RT, et minor quam RS. Erit etiam RV logarithmus rationis KL ad LM. Quoniam enim ratio FG ad GH eadem est rationi KL ad LM, et est ratio FG ad GN ex radicalibus composita proxime major ratione FG ad GH, ratio vero KL ad LO ex iisdem composita, proxime major est ratione KL ad LM; erit, per Prop. 2. ratio FG ad GN, eadem rationi KL ad LO. Igitur, per Prop. 1. logarithmi harum rationum sunt inter se aequales. Est autem RS logarithmus rationis FG ad GN, quare et RS logarithmus est rationis KL ad LO. Similiter ostendetur RT logarithmum scilicet rationis FG ad GP, esse etiam logarithmum rationis KL ad LQ. Quoniam igitur RV semper major est quam RT logarithmo rationis KL ad LQ, et minor quam RS logarithmo rationis KL ad LO, erit [Def. 3.] RV logarithmus rationis KL ad LM.

F	P	H	N	G
K	Q	M	O	L
R	T	V	S	

P R O P. IV.

“ Logarithmus majoris rationis major est logarithmo minoris; utraque autem ratio fit majoris ad minorem.”

CAS. I. Si utraque ratio composita fit ex rationibus radica-

libus, numerus rationum ex quibus composita est major ratio, major est [Lem. 2.] numero earundem, ex quibus minor ratio composita est; et propterea logarithmus majoris rationis major est logarithmo minoris, ut patet ex Def. 2.

CAS. 2. Si una ratio, viz. ratio KL ad LM composita sit ex rationibus radicalibus, reliqua autem ratio FG ad GH ex iisdem non sit composita. Sit ratio FG ad GN eadem rationi KL ad LM; et primo, sit ratio KL ad LM, hoc est ratio FG ad GN, quae ex rationibus

radicalibus est composita,
$$\begin{array}{ccccccc} F & & & N & H & N & G \\ \hline & & & & & & \\ K & & & M & & L & \\ \hline \end{array}$$
 vel ea est quae proxime major est ratione FG ad GH, vel est major eâ quae proxi-

me major est; et in primo Casu, per Def. 3. in altero, per Cas. 1. et Def. 3. logarithmus rationis FG ad GN, hoc est rationis KL ad LM [Prop. 1.] major erit logarithmo rationis FG ad GH. Si vero ratio KL ad LM minor sit ratione FG ad GH, similiter ostendetur logarithmus rationis KL ad LM minor logarithmo rationis FG ad GH.

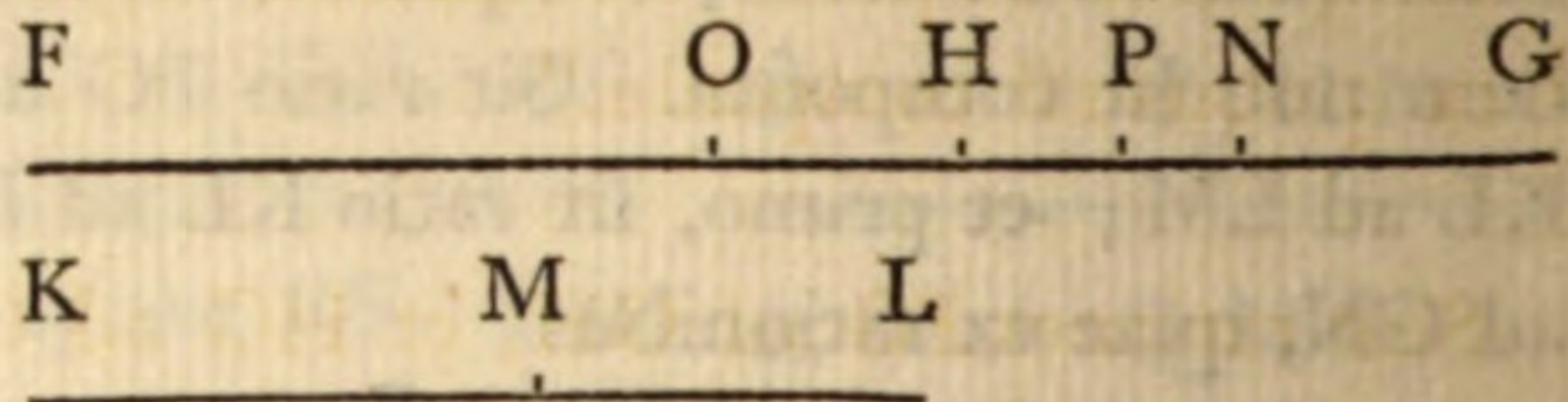
CAS. 3. Si vero neutra rationum sit composita ex rationibus radicalibus, sit FG ad GH minor ratio, et KL ad LM major; et rationi

KL ad LM eadem
$$\begin{array}{ccccccc} F & & & O & H & P & N & G \\ \hline & & & & & & & \\ K & & & M & & L & & \\ \hline \end{array}$$
 sit ratio FG ad GN. Igitur ratio FG ad GN major

est ratione FG ad GH, et propterea GN minor est quam GH. [10. 5.] Componatur vero ratio assumpta AB ad BC ex rationibus inter se iisdem, quarum una quaevis minor est ratione

HG ad GN, quod fieri potest [Lem. 5.]; et fit ratio FG ad GO ea quae ex hisce composita proxime minor est ratione FG ad GH. Igitur ratio OG ad GP una est ex hisce rationibus, quae propterea minor est ratione HG ad GN, quare multo magis ratio HG ad GP minor est ratione HG ad GN, et erit GP major GN.

[10. 5.] Ratio igitur FG ad GN major est ratione FG ad GP. Et quoni-



am ratio FG ad GP composita est ex rationibus radicalibus, logarithmus rationis FG ad GN major erit eo rationis FG ad GP [per Cas. 2.] et per eundem, logarithmus rationis FG ad GP major est logarithmo rationis FG ad GH. Multo igitur logarithmus rationis KL ad LM major est logarithmo rationis FG ad GH.

COR. 1. Et si utraque ratio fuerit minoris ad maiorem, erit logarithmus rationis, cujus reciproca major est alterius reciproca, major logarithmo alterius rationis.

COR. 2. Et si una ratio fuerit majoris ad minorem, et reliqua minoris ad maiorem, erit logarithmus rationis quae vel cujus reciproca, si fuerit minoris ad maiorem, major est reliqua vel ejusdem reciproca, si fuerit reliqua minoris ad maiorem, major erit logarithmo reliquae; idem enim est logarithmus rationis et ejus reciprocae, per Def. 3.

COR. 3. Hinc logarithmus major est majoris, et minor est logarithmus minoris rationis, si scilicet utraque ratio sit majoris ad minorem; vel, in aliis casibus, fumendo rationes quae sunt reciprocae rationum minoris ad maiorem.

P R O P. V.

“ SI utraque duarum rationum composita fit ex rationibus
 “ radicalibus, utraque autem fit vel majoris ad minorem, vel
 “ minoris ad majorem; logarithmus rationis ex duabus hisce
 “ compositae aequalis est summae logarithmorum rationum
 “ ex quibus est composita.”

Sint rationes FG ad GH, et HG ad GK ex quibus composita est ratio FG ad GK. Numerus igitur rationum radicalium, ex quibus composita est ratio

FG ad GK, aequalis est numero earundem ex quibus componitur ratio FG ad GH una cum numero earundem ex quibus componitur ratio

F	H	K	G
K	H	F	G

HG ad GK; igitur, per Def. 2. logarithmus rationis FG ad GK aequalis est summae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK.

COR. Si vero una ex rationibus fuerit majoris ad minorem, reliqua vero minoris ad majorem, erit logarithmus rationis ex hisce compositae aequalis excessui logarithmorum rationum ex quibus est composita.

CAS. I. Quando ratio FG ad GH, majoris scilicet ad minorem, major est reciproca rationis

reliquae HG ad GK; vel quando ratio FG ad GH est minoris ad majorem, et reciproca ejus HG ad GF major est reliqua ratione HG ad GK.

F	K	H	G
H	K	F	G

Quoniam enim ratio FG ad GH composita est ex rationi-

bus FG ad GK, et KG ad GH, quarum utraque vel est majoris ad minorem, vel minoris ad majorem; erit logarithmus rationis FG ad GH aequalis summae logarithmorum rationum FG ad GK, et KG ad GH, per hanc scilicet Propositionem. Igitur excessus logarithmi rationis FG ad GH supra logarithmum rationis KG ad GH, qui idem est cum logarithmo rationis HG ad GK [Def. 2.] aequalis est logarithmo rationis FG ad GK.

$$\begin{array}{cccc} F & K & H & G \\ \hline H & K & F & G \end{array}$$

CAS. 2. Quando ratio FG ad GK composita est ex ratione FG ad GH, minoris ad majorem, et ex ratione HG ad GK, majoris ad minorem, quae major est reciproca primae, major sc. ipsa HG ad GF; idem sequetur, nam quoniam ratio HG ad GK composita est ex ratione HG ad GF, et FG ad GK, quarum utraque est majoris ad minorem, logarithmus rationis FG ad GK, aequalis erit summae logarithmorum rationum HG ad GF, et FG ad GK. Igitur excessus logarithmi rationis FG ad GK supra logarithmum rationis HG ad GF, qui idem est cum logarithmo rationis FG ad GH, aequalis est logarithmo rationis FG ad GK.

$$\begin{array}{cccc} H & F & K & G \\ \hline \end{array}$$

CAS. 3. Quando ratio FG ad GH majoris ad minorem, minor est reciproca reliquae rationis HG ad GK.

Quoniam utraque ratio HG ad GF, et FG ad GK est minoris ad majorem, erit [Prop. 5.] logarithmus rationis HG ad GK aequalis summae logarithmorum rationum HG ad GF, et FG ad GK. Igitur excessus logarithmi ratio-

$$\begin{array}{cccc} K & F & H & G \\ \hline \end{array}$$

nis HG ad GK supra logarithmum rationis HG ad GF, qui idem est cum logarithmo rationis FG ad GH, aequalis est logarithmo rationis FG ad GK.

P R O P. VI.

“ SI sint duae rationes FG ad GH, et GH ad GK, utraque
 “ majoris ad minorem, quarum altera FG ad GH composita
 “ est ex rationibus radicalibus, reliqua vero HG ad GK ex
 “ iis non est composita; erit logarithmus rationis FG ad GK
 “ quae ex duabus illis est composita, aequalis summae loga-
 “ rithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK.”

Si enim magnitudines hae non sint aequales, altera earum major erit; et primò, fit LM, summa scilicet logarithmorum rationum FG ad

GH, et HG ad	F	H		K	O	G
GK, major LN lo-						
garithmo rationis	L	N P	MA		C	B
FG ad GK, fitque						
NM ipfarum ex-				D		E
cessus; et compo-						

natur ratio assumpta AB ad BC ex rationibus radicalibus, quarum numerus major sit numero partium ipsi NM aequalium, quae in data magnitudine DE continentur; et secetur DE in partes aequales, quarum numerus aequalis est numero rationum ex quibus composita est ratio AB ad BC; igitur una ex hisce partibus minor est ipsa NM. Sit ratio FG ad GO ea, quae ex rationibus radicalibus composita proxime major est

ratione FG ad GK; et fit LP logarithmus rationis FG ad GO. Et quoniam [Def. 3.] LN, logarithmus rationis FG ad GK, cadit inter logarithmum LP rationis FG ad GO, quae proxime major est ratione FG ad GK, et logarithmum rationis quae ex radicalibus composita proxime minor est ratione FG ad GK, erit NP excessu horum logarithmorum qui est una partium radicalium, et propterea minor est NM; multo igitur NP minor est quam NM. Igitur LP, logarithmus sc. rationis FG ad GO,

minor est quam	F	H	K	O	G
LM, summa sc. lo-					
garithmorum ra-	L	NP	MA	C	B
tionum FG ad GH,					
et HG ad GK.			D		E

Quoniam vero ratio FG ad GO, quae est composita ex rationibus radicalibus, eadem est rationi compositae ex rationibus FG ad GH et HG ad GO, quarum ratio FG ad GH composita est ex rationibus radicalibus, reliqua ratio HG ad GO composita erit ex iisdem. Igitur, per Prop. 5. hujus, logarithmus LP rationis FG ad GO est aequalis summae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GO. Est autem LM summa logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK. Et quoniam LP minor est LM, erit prima summa minor reliqua, et, ablato communi logarithmo rationis FG ad GH, erit reliquus logarithmus rationis HG ad GO minor reliquo logarithmo rationis HG ad GK. Igitur [Cor. 3. Prop. 4.] ratio HG ad GO minor est ratione HG ad GK; sed et major, quod fieri non potest. Non igitur est LM major LN.

Sed si dicatur LM minor quam LN, sumpta ratione FG ad GO quae ex radicalibus composita,

proxime minor est ratione FG ad GK; similiter ostendetur

non posse LM minorem esse quam LN; aequalis igitur est LN logarithmus rationis FG ad GK ipsi LM, summae scilicet logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK.

P R O P. VII.

“SINT rationes FG ad GH, et HG ad GK, quarum neutra
“composita est ex rationibus radicalibus; fit autem ratio FG
“ad GK, quae ex illis composita est, ex rationibus radicali-
“bus composita; erit logarithmus rationis FG ad GK ae-
“qualis summae logarithmorum rationum FG ad GH, et
“HG ad GK.”

Si enim non fit aequalis summae huic, erit vel major, vel minor. Primò, fit logarithmus LM rationis FG ad GK major summa logarithmo-
rum rationum FG ad GH, et HG ad GK; et fit LN logarithmus ra-
tionis FG ad GH, igitur NM major est lo-
garithmo rationis HG ad GK; fit hujus rati-
onis logarithmus OM,
minor sc. quam NM, et componatur ratio assumpta AB ad

C

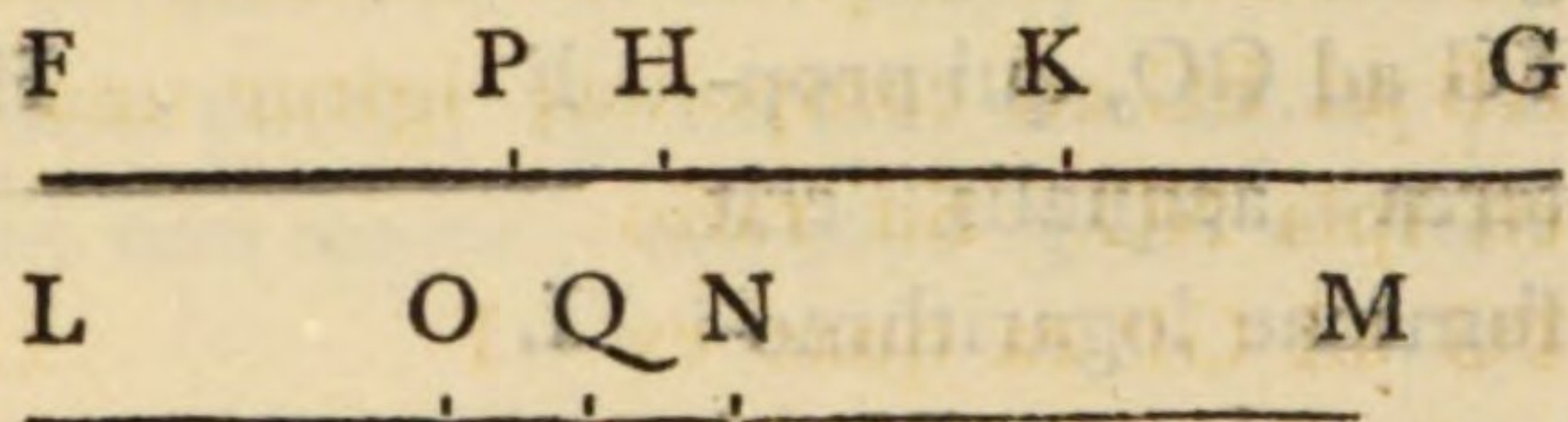
ad BC ex rationibus radicalibus, quarum numerus major sit numero partium ipsi NO aequalium, quae in data magnitudine DE continentur, et secetur DE in partes aequales, quarum numerus aequalis est numero rationum ex quibus ratio AB ad BC est composita; igitur una harum partium minor est ipsa NO. Sit ratio

FG ad GP ea quae ex	F	H	P	K	G
rationibus radicalibus					
composita proxime ma-	L	N	Q	O	M
ior est ratione FG ad					
GH, fitque LQ loga-	A	C	B		
rithmus rationis FG ad					
GP; erit igitur NQ mi-	D	E			
nor quam una parti-					

um radicalium, quod ut simile in praecedente Prop. ostendetur, multo igitur NQ minor est quam NO; quare QM major est quam OM. Et ut simile in praecedente, ostendetur logarithmus rationis FG ad GK aequalis summae logarithmorum rationum FG ad GP, et PG ad GK. Igitur quoniam LM est logarithmus rationis FG ad GK, et LQ logarithmus est rationis FG ad GP, erit reliqua QM logarithmus rationis HG ad GK. Quoniam igitur ostensa est QM major OM, erit logarithmus rationis PG ad GK major logarithmo rationis HG ad GK; quare ratio PG ad GK major est ratione HG ad GK; sed et minor, quoniam PG minor est HG; quod fieri non potest.

Sed si LM logarithmus rationis FG ad GK dicatur minor quam summa logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK; sit LM logarithmus rationis FG ad GH, igitur NM

minor est logarithmo rationis HG ad GK; fit OM logarithmus hujus rationis major sc. quam NM; et sumptâ ratione FG ad GP, quae ex radicalibus composita proxime minor est ratione FG ad GH, reliquisque ut in praecedente casu constructis, ostendetur QN minor quam



ON, quare et QM logarithmus rationis PG ad GK minor erit quam OM logarithmus rationis HG ad GK. Ratio igitur PG ad GK minor est ratione HG ad GK, quod fieri non potest. Igitur LM non est minor summa logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK, et ostensa est non major eadem summa; igitur est aequalis.

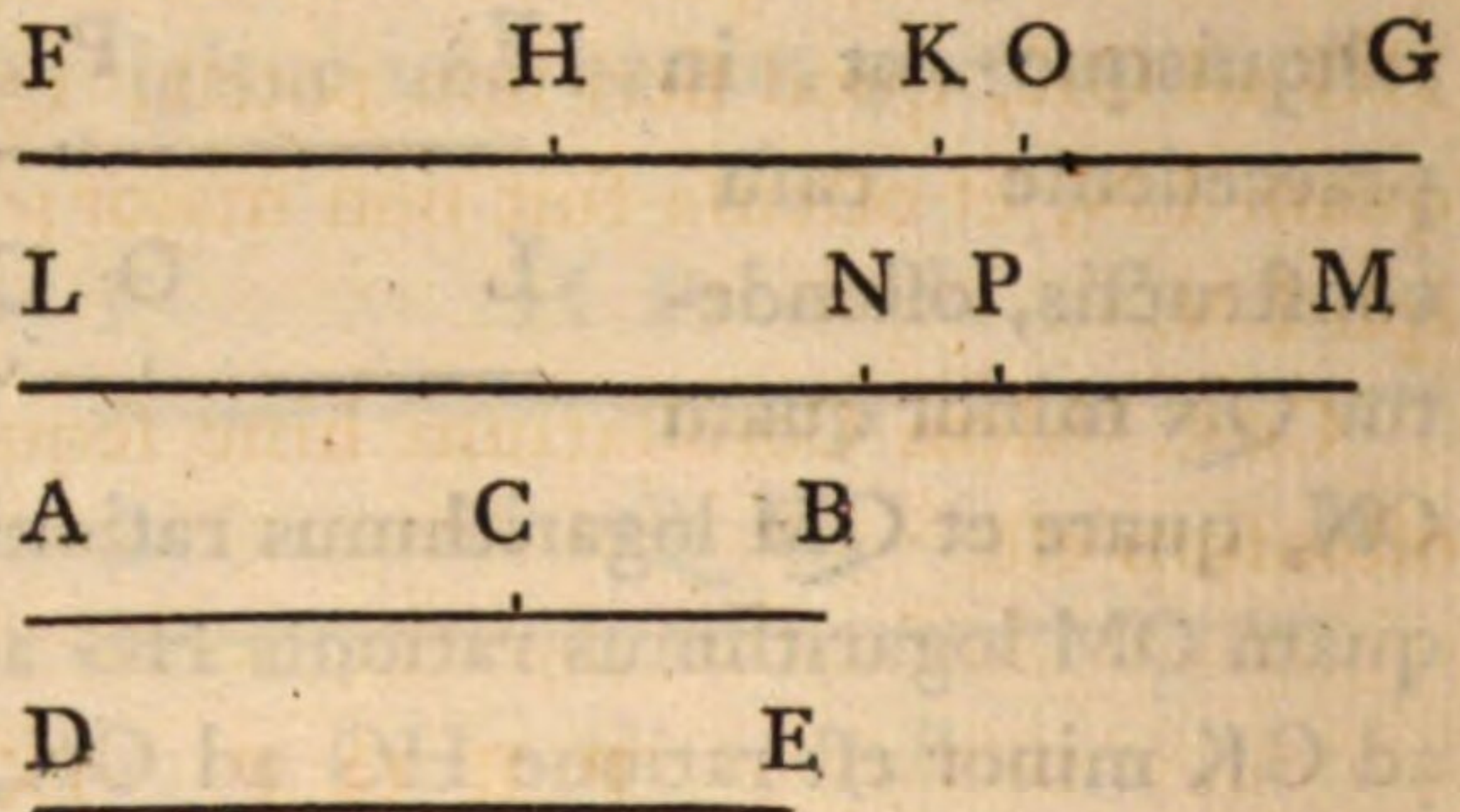
P R O P. VIII.

“SINT rationes FG ad GH, et HG ad GK, quarum neutra
 “est composita ex rationibus radicalibus; erit summa logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK aequalis
 “logarithmo rationis FG ad GK, quae est ex illis composita.”

Si enim non fit; primò, fit LM summa logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK major quam LN logarithmus rationis FG ad GK; et componatur ratio assumpta AB ad BC ex rationibus, quarum numerus major sit numero partium ipsi NM aequalium, quae in magnitudine assumpta DE continentur. Secetur DE in partes aequales, quarum numerus idem sit cum numero rationum ex quibus composita

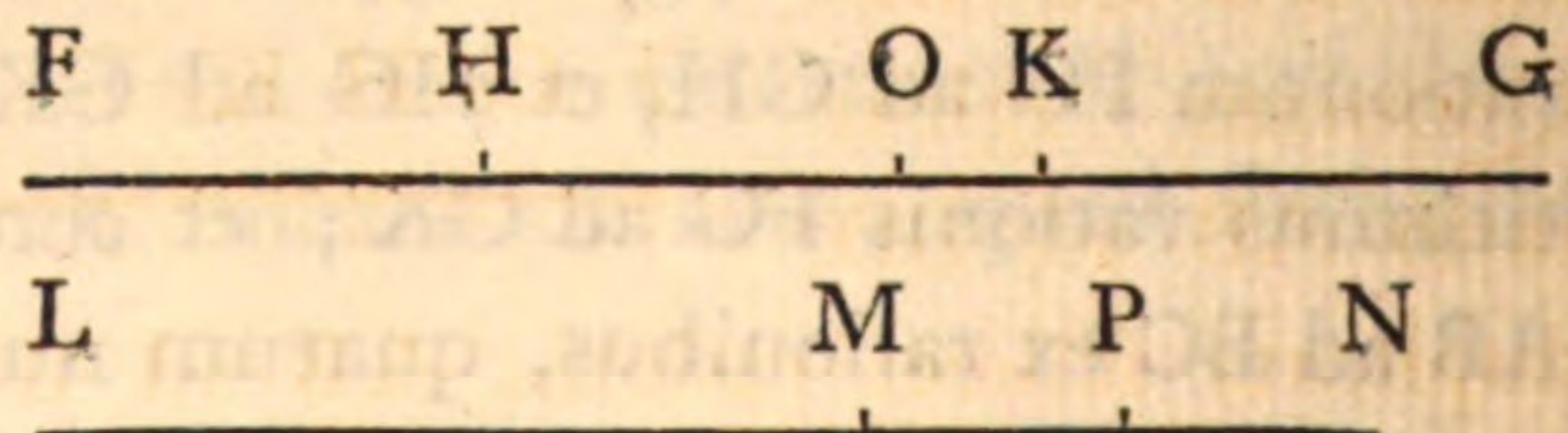
est ratio AB ad BC; igitur una harum partium minor erit quam MN. Sit ratio FG ad GO ea quae ex rationibus radicalibus composita proxime major est ratione FG ad GK, fitque LP logarithmus rationis

FG ad GO, qui propterea aequalis erit summae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GO. Erit igitur NP minor quam una partium radicalium, ut in



Prop. 6. ostensum, et propterea multo quam NM minor; quare LP minor est LM. Est autem LP, per Prop. 7. aequalis summae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK. Prima igitur summa minor est reliquâ; et, ablato communi logarithmo rationis FG ad GH, erit reliquus, logarithmus rationis sc. HG ad GO, minor reliquo logarithmo rationis HG ad GK. Igitur ratio HG ad GO minor est ratione HG ad GK; sed et major, quoniam GO minor est GK; quod fieri non potest. Igitur LM non est major quam LN.

Sed si ponatur LM minor quam LN, sumatur ratio FG ad GO, quae ex radicalibus composita proxime minor est ratione FG ad GK; fitque LP logarithmus rationis FG ad GO, reliquisque ut antea constructis, ostendetur LP major quam LM, hoc est summa logarithmorum rationum



FG ad GH, et HG ad GO major summa logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK; igitur, ablato communi, logarithmus rationis HG ad GO major est logarithmo rationis HG ad GK; quare et ratio HG ad GO major est ratione HG ad GK, quod fieri non potest; igitur LM non minor est quam LN, et ostensa fuit non major; aequalis igitur est LM ipsi LN.

COR. Idem Corollarium hinc sequitur, quod ex Prop. 5. ostensum est.

P R O P. IX.

“ SI una ratio multiplicata fuerit alterius rationis, quam
 “ multiplicata est ea alterius, tam multiplex erit logarithmus
 “ ejus logarithmi alterius.”

Sint enim AB, BC, BD, BE, &c. deinceps proportionales, erunt igitur rationes primae ad secundam, secundae ad tertiam, &c. inter se eadem; quare et logarithmi earum sunt inter se aequales, [Prop. 2. vel 3.] Sit FG logarithmus rationis AB ad BC, et GH

logarithmus rationis BC ad BD.	A C D E	B

Quoniam igitur ratio AB ad BD,	F G H K

duplicata scilicet rationis AB ad BC, composita est ex rationibus AB ad BC, et BC ad BD, erit logarithmus rationis AB ad BD aequalis ipsi FH summae logarithmorum rationum AB ad BC, et BC ad BD, [Prop. 5, aut 6, 7, 8.] hoc

est duplo logarithmi FG rationis AB ad BC. Similiter, quoniam ratio AB ad BE, triplicata scilicet rationis AB ad BC, composita est ex ratione AB ad BD, et ratione BD ad BE, erit logarithmus rationis

AB ad BE aequa-	A C D E	B
lis summae loga-	F G H K	
rithmorum ratio-		
num AB ad BD, et		

BD ad BE. Logarithmus autem FH rationis AB ad BD, duplus ostensus est logarithmi FG rationis AB ad BC, et HK logarithmus rationis BD ad BE aequalis est ipsi FG; igitur FK logarithmus rationis AB ad BE triplus est ipsius FG logarithmi rationis AB ad BC; et ita deinceps.

D E F. IV.

LOGARITHMI omnium rationum ex assumpta ratione AB ad BC, et assumpta magnitudine DE provenientes, secundum Def. 2. et Def. 3. dicuntur esse ejusdem speciei. Sed si sumatur eadem ratio AB ad BC, et sumatur alia magnitudo DE, logarithmi ex hisce, secundum Def. 2. et 3. provenientes dicuntur esse diversae speciei a praecedente.

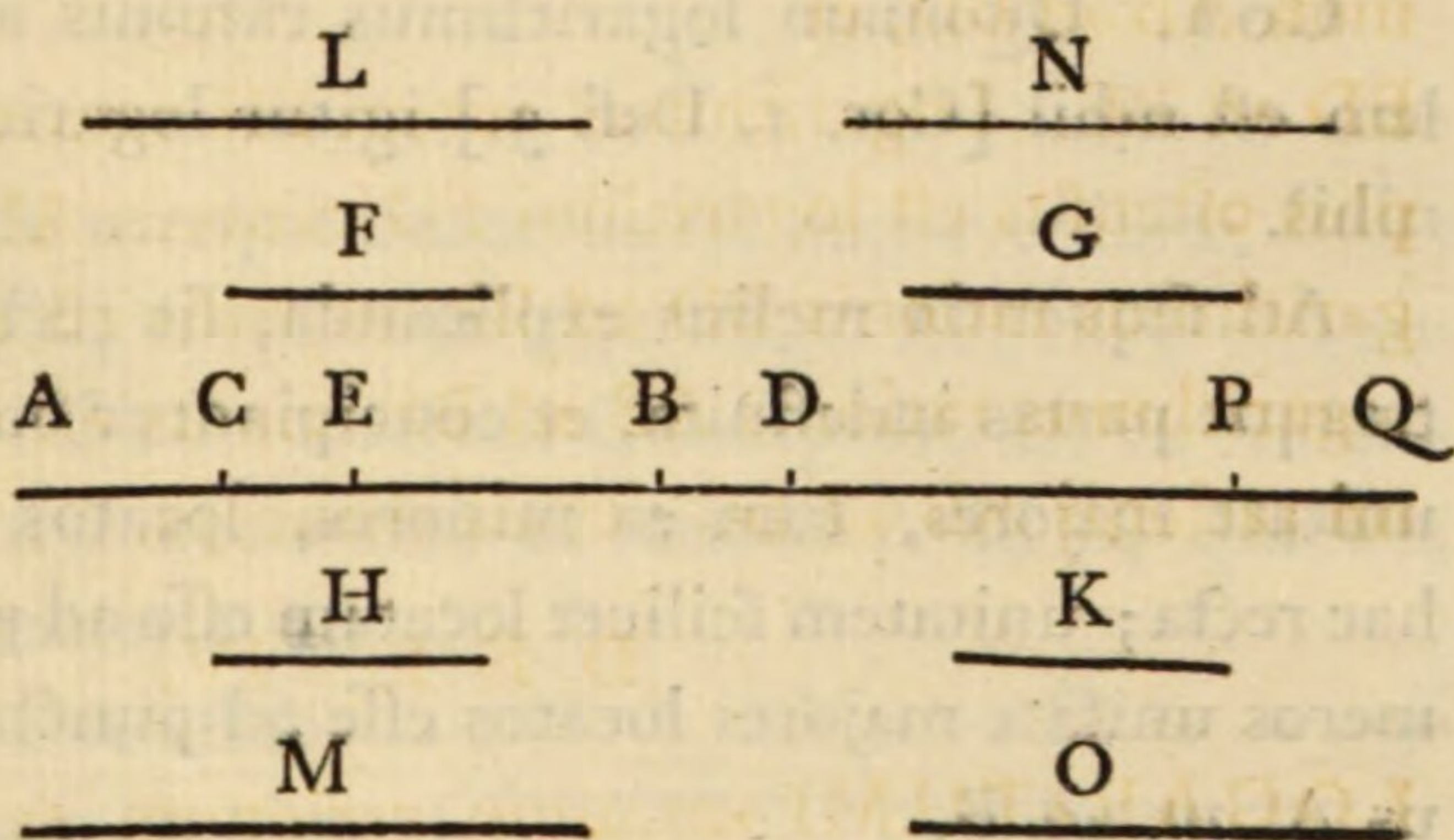
P R O P. X.

“ Logarithmi duarum rationum unius speciei eadem inter se
 “ habent rationem quam logarithmi earundem rationum cu-
 “ jussibet alius speciei.

“ Sint duae rationes AB ad BC, et AD ad DE, et sint F,
 “ G earum logarithmi unius speciei, et H, K earundem loga-
 “ rithmi alterius speciei; erit F ad G, ut H ad K.”

Sumantur ipsarum F, H aequemultiplices utcunque L, M ; et ipsarum G, K aliae utcunque aequemultiplices N, O . Quam multiplex autem est L ipsius F , vel M ipsius H , tam multiplicata fit ratio AP ad PC , rationis AB ad BC , et tam multiplicata fit ratio AQ ad QE rationis AD ad DE quam multiplex est N ipsius G , vel O ipsius K . Quoniam igitur F est logarithmus

rationis AB ad BC , et est L tam multiplex ipsius F , quam ratio AP ad PC est multiplicata rationis AB ad BC , erit L logarithmus rationis AP ad PC [Prop. 9.];



eadem ratione erit N logarithmus rationis AQ ad QE , uterque scilicet in altera specie. Si igitur logarithmus L major sit logarithmo N , erit ratio AP ad PC major ratione AQ ad QE [Cor. 3. Prop. 4.]; et quoniam ratio AP ad PC major est ratione AQ ad QE , erit [Prop. 4.] logarithmus M major logarithmo O in altera specie; igitur, si L major sit N , erit et M major O ; eadem ratione, si L aequalis fuerit ipsi N , vel eadem minor, erit M aequalis ipsi O , vel minor quam ea. Quoniam igitur quatuor sunt magnitudines F, G, H, K , et sumptae sunt ipsarum F, H utcunque aequemultiplices L, M ; et ipsarum G, K , aliae utcunque aequemultiplices N, O ; et ostensum est si L major sit N , et M maiorem esse quam O ; et

si aequalis aequalem; et si minor minorem esse; erit [5. Def. 5.] F ad G, ut H ad K.

D E F. V.

LOGARITHMUS rationis cujusvis numeri ad unitatem dicitur etiam logarithmus illius numeri.

COR. Quoniam logarithmus rationis aequalis ad aequalem est nihil [Cor. 1. Def. 3.] igitur logarithmus unitatis est nihil.

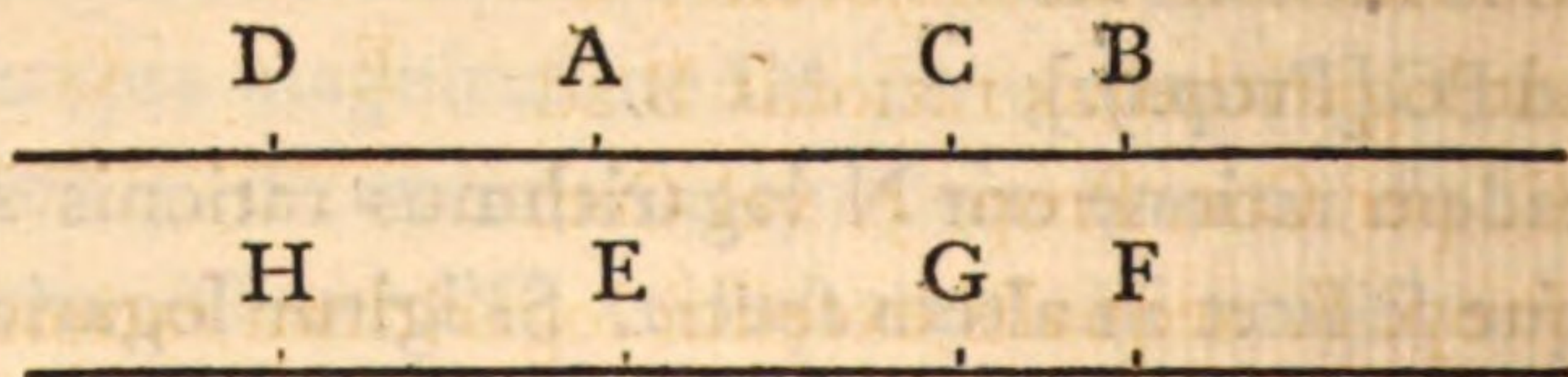
Ad sequentia melius explicanda, fit recta linea AB ad utrasque partes indefinita, et concipiantur omnes numeri, tum unitate majores, tum ea minores, locatos esse ad puncta in hac recta; unitatem scilicet locatam esse ad punctum A, et numeros unitate majores locatos esse ad puncta ad dextram ipsius A, ut ad B,

C, &c. eos vero

qui sunt unita-

te minores ad

puncta quae



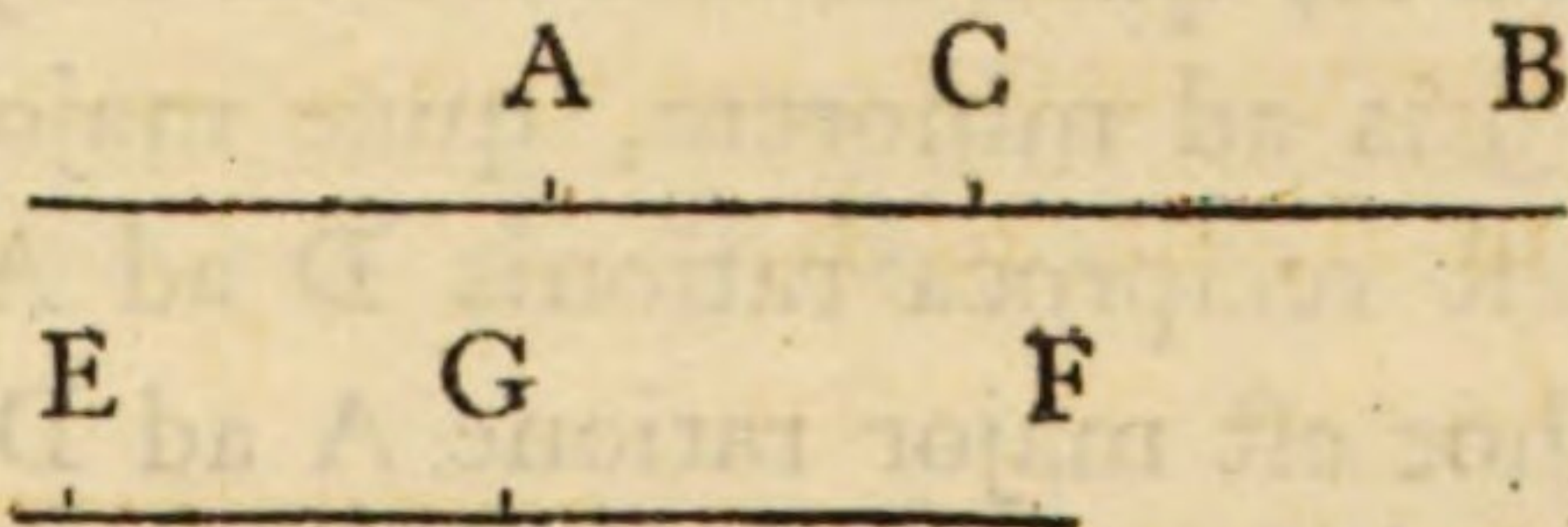
funt ad contrarias partes puncti A, ut ad D, &c. Sit alia recta indefinita EF, in qua sit punctum E, respondens puncto A, hoc est, ut logarithmus unitatis sit ad ad punctum E, logarithmus vero cujusvis aliûs numeri, ut ejus qui est ad punctum B, fumatur a puncto E, ad eas partes ejus ad quas est B respectu puncti A, ut EF, quae semper aequalis sit ipsi AB; et ita EG aequalis ipsi AC, sit logarithmus numeri ad punctum C, et EH aequalis ipsi AD sit logarithmus numeri ad D, et ita deinceps.

PROP. XI.

“ SI fumantur a puncto E logarithmi duorum quorumvis
 “ numerorum, ut eorum qui locati sunt ad puncta B, C (qui,
 “ brevitatis gratia, in sequentibus vocentur numeri B, C),
 “ qui logarithmi sint EF, EG; distantia GF inter ipsorum
 “ terminos erit logarithmus rationis numeri B ad numerum
 “ C.”

CAS. 1. Quando uterque numerus est major unitate.

Sint numeri B, C, et ipsorum logarithmi EF, EG; et quoniam ratio numeri B ad numerum C composita est ex ratione B ad numerum, five unitatem, et ratione A ad C, quarum prima est ratio majoris ad minorem, reliqua vero est ratio minoris ad majorem; erit logarithmus rationis B ad C, per Cor. Prop. 5. vel Cor.



Prop. 8. aequalis excessui logarithmi rationis B ad A, hoc est logarithmi numeri B supra logarithmum rationis A ad C, hoc est supra logarithmum numeri C; est autem EF logarithmus numeri B, et EG logarithmus ipsius C, GF vero est horum excessus, qui propterea est logarithmus rationis B ad C.

CAS. 2. Quando alter numerus major est unitate, reliquus vero minor.

Sit numerus B major unitate, numerus vero D ad contrarias partes ipsius A, minor sit unitate; et quoniam ratio numeri B ad ipsum D composita est ex ratione B ad A, five uni-

D

tatem, et ratione A ad D, quarum utraque est majoris ad minorem, erit, per Prop. 5, aut 6, 7, 8. logarithmus rationis B ad D aequalis summae logarithmorum rationum B ad A, et A ad D; est autem EF logarithmus rationis B ad A, five numeri B; et similiter EH est logarithmus numeri D, five rationis D ad A; igitur HF ipsorum summa est logarithmus rationis B ad D.

D	A	B
H	E	F

CAS. 3. Quando uterque numerus minor est unitate.

Sint numeri D, K, et ipsarum logarithmi EH, EL; et quoniam ratio numeri D ad ipsum K composita est ex ratione D ad A, quae est minoris ad majorem, et ratione A ad K, majoris ad minorem, quae major est reciproca rationis D ad A, hoc est major ratione A ad D; erit, per Cas. 2. Cor. Prop. 5. logarithmus rationis D ad K aequalis excessui logarithmi rationis A ad K, five logarithmi ipsius K supra logarithmum rationis D ad A, five logarithmum ipsius D. Est autem EL logarithmus ipsius K, et EH logarithmus ipsius D, quorum excessus est HL, qui propterea est logarithmus rationis D ad K.

K	D	A
L	H	E

COR. Si logarithmis rationum minoris ad majorem, vel numerorum qui sunt unitate minores apponatur signum subtractionis — logarithmus rationis numeri cujusvis ad numerum minorem, invenietur auferendo, secundum regulas in Al-

gebra traditas, logarithmum minoris numeri a logarithmo majoris. In secundo enim casu praecedente, si a logarithmo EF numeri B auferatur — EH logarithmus numeri D unitate minoris, appposito signo subtractionis, reliquum erit $EF + EH$, hoc est HF, prorsus ut in eo casu ostensum fuit. Et in casu tertio, si logarithmi numerorum D, K unitate minorum fiant — EH — EL, et a logarithmo — EH majoris numeri D auferatur — EL logarithmus minoris numeri K, reliquum erit $EL - EH$, hoc est LH, ut in Cas. 3. ostensum fuit. Utile igitur est apponere signum — logarithmis numerorum qui unitate minores sunt, tum ut distinguantur a logarithmis numerorum qui sunt eorum reciproci, et qui iidem sunt magnitudine cum illis, tum ut regulae pro operationibus arithmetice de logarithmis generaliores fiant, ut in sequentibus plenius apparebit.

P R O P. XII. P R O B.

Invenire logarithmum facti sive producti a duobus numeris.

CAS. I. Quando uterque numerus major est unitate.

Sint duo numeri B, C, et EF, EG ipsorum logarithmi, erit summa logarithmorum EF, EG aequalis logarithmo facti a numeris B, C. Sit enim M numerus factus ab ipsis B, C, et logarithmus ejus sit EN; et quoniam ut unitas, seu A, ad alterum ex numeris C, ita reliquus B ad numerum M ab ipsis factum; hoc est, quoniam ratio C ad A eadem est rationi M ad B, erunt [Prop. 1. aut 3.] logarithmi harum rationum

A	C	B	M
E	G	F	N

inter se aequales. Est autem EG logarithmus numeri C, five rationis C ad A, et, per Prop. 11. est FN logarithmus rationis numeri M ad ipsum B. Aequalis igitur est EG ipsi FN, quare EG, una cum EF, aequalis est ipsi EN logarithmo facti M ab ipsis B, C numeris.

CAS. 2. Quando alter numerus est major, reliquus autem minor unitate.

Sit numerus B major D, vero minor unitate; et primò, sit B major reciproco numero ipsius D, hoc est major quam $\frac{1}{D}$; erit igitur factus ab ipsis B, D major unitate; sit factus numerus M, cadit igitur M ad

dextram unitatis quae est

D	A	M	B
H	E	N	F

in A; et quoniam unitas, seu A, est ad B, ut D ad factum M, erit ratio B ad A

eadem rationi M ad D; igitur logarithmi harum rationum erunt inter se aequales. Sit EF logarithmus rationis D ad A, EN vero logarithmus rationis M ad A, unde, per Prop. 11. erit HN logarithmus rationis M ad D. Igitur EF aequalis est ipsi HN, et, ablato communi HE, erit excessus EF supra HE aequalis ipsi EN, hoc est, erit excessus logarithmi numeri B supra logarithmum numeri D, aequalis logarithmo facti ab ipsis M.

Si vero ipsi EH logarithmo numeri D unitate minoris apponatur signum — five subtractionis, erit summa logarithmorum numerorum B, D, quae est EF — EH aequalis ipsi EN logarithmo facti M, ut in Casu 1.

Secundò, sit numerus B minor quam $\frac{1}{D}$, erit igitur factus

a B, D minor unitate; sit factus M, cadit igitur M ad laevam ipsius A. Et quoniam unitas, seu A, est ad B, ut D ad factum M, erit ratio B ad A eadem rationi M ad D; igitur logarithmi harum rationum sunt inter se aequales. Sit EF logarithmus rationis B ad A, et EH logarithmus rationis D ad A, EN vero logarithmus rationis M ad A; igitur, per Prop. 11. erit HN logarithmus rationis M ad D; et propterea EF est aequalis ipsi HN, quibus ex HE ablati, erit reliquum, excessus sc. ipsius EH supra EF, aequale reliquo EN; hoc est, excessus logarithmi ipsius D supra eum numeri B aequalis est logarithmo facti M.

Et si EH notetur signo —, ut in praecedente Casu, erit summa logarithmorum numerorum B, D, scilicet EF — EH aequalis ipsi — EN logarithmo facti M. Et quoniam logarithmi in tabulis aequae respondent numeris unitate majoribus quibus in tabulis apponuntur, ac eorum reciprocis; igitur ad inveniendum numerum M, qui unitate minor est, ope tabularum, sumendus est reciprocus numerus ejus cui convenit logarithmus numeri M in tabulis; quod in omni casu observandum.

CAS. 3. Quando uterque numerus minor est unitate.

Sit uterque numerus D, K minor unitate, et sit M factus ab iisdem, qui propterea minor etiam erit unitate; quare M cadit ad easdem partes unitatis A ad quas sunt D, K; sint vero EH, EL, EN logarithmi numerorum D, K, M; erit EN aequalis summae ipsarum EH, EL.

Quoniam enim est unitas, seu A ad D, ut K ad M, erit ratio A ad D eadem rationi K ad M, et rationum harum aequales erunt logarithmi; rationis vero A ad D, five numeri D, logarithmus est EH; et, per Prop. 11. rationis K ad M logarithmus est NL. Est igitur NL aequalis ipsi HE, et propterea NE aequalis est summae ipsarum EH, EL; hoc est, logarithmus facti M aequalis est summae logarithmorum numerorum D, K a quibus factus est.

Et si ipsis EH, EL apponatur signum —, erit — EH — EL aequalis ipsi — EN logarithmo facti. In omnibus igitur casibus logarithmus facti aequalis est summae logarithmorum numerorum a quibus factus est, dummodo logarithmis numerorum, qui unitate sunt minores, apponatur signum — subtractionis.

P R O P. XIII. P R O B.

Invenire logarithmum quotientis, qui oritur dividendo unum numerum per alium.

CAS. I. Quando uterque numerus major est unitate.

Sit numerus dividendus B, et sit divisor C, qui, primò, minor sit quam B; igitur quotientis major erit unitate; fit M quotientis. Erit logarithmus ipsius M aequalis excessui logarithmi numeri B supra logarithmum ipsius C.

A	M	C	B
E	N	G	F

Sint EF, EG, EN logarithmi numerorum B, C, M; et quoniam unitas, seu A, est ad quotientem M, ut divisor C ad dividendum B, erit ratio M ad A eadem ratione B ad C. Igitur logarithmus rationis M ad A, hoc est ipsius M aequalis erit, per Prop. 1. aut 3. logarithmo rationis B ad C, hoc est, [Prop. 11.] ipsi GF. Est autem GF excessus ipsius EF, hoc est logarithmi dividendi B supra EG logarithmum divisoris C.

Sit autem divisor C major dividendo B; igitur quotiens M minor erit unitate, et cadit M ad contrarias partes A ad quas est B; erit autem EN logarithmus ipsius M aequalis FG excessui EG logarithmi divisoris C supra E logarithmum dividendi B. Quoniam enim est unitas, seu A, ad quotientem M, ut divisor C ad dividendum B, erit ratio M ad A eadem rationi B ad C; igitur logarithmus rationis M ad A, hoc est numeri M aequalis erit [Prop. 1. aut 3.] logarithmo rationis B ad C, hoc est [Prop. 11.] ipsi FG. Quoniam vero M est minor unitate, logarithmi vero in tabulis aptantur numeris qui sunt maiores unitate; igitur, in hoc et similibus casibus, numerus M erit reciprocus numeri cujus logarithmus in tabulis est FG. Idem enim est logarithmus cujusvis numeri et ejus reciproci.

Et si a logarithmo EF dividendi B auferatur EG logarithmus divisoris C, reliquus erit — FG, qui, signo — notatus, indicat numerum, cujus est logarithmus, minorem esse unitate;

atque ita regula praecedentis Casus huic etiam infervit.

CAS. 2. Quando numerus dividendus B major est unitate, divisor vero D minor est unitate, et propterea quotiens M unitate major est. Logarithmus vero ipsius M aequalis erit summae logarithmorum dividendi B et divisoris D.

Sint enim ipsorum B, D, M logarithmi EF, EH, EN; et quoniam est A ad M, ut D ad B, erit logarithmus rationis M ad A, hoc est ipsius M logarithmus, aequalis logarithmo rationis D ad B. Est

D	A	B	M
H	E	F	N

igitur EN, logarithmus sc. ipsius M, aequalis HF logarithmo sc. rationis D ad B, [Prop. 11.] hoc est summae logarithmorum EF, EH dividendi B et divisoris D.

Et si EH logarithmus divisoris D habeat praefixum sibi signum —, et auferatur ab EF logarithmo dividendi B, reliquus erit HE + EF, hoc est HF; atque ita regula Cas. 1. huic etiam infervit.

CAS. 3. Quando uterque numerus minor est unitate.

Sit numerus dividendus D, et divisor sit K, qui primò minor sit quam D; igitur quotiens M major est unitate. Erit logarithmus ipsius M aequalis excessui logarithmi divisoris K supra logarithmum dividendi D.

K	D	A	M
L	H	E	N

Sint EH, EL, EN logarithmi numerorum D, K, M; et quoniam est ut A ad M, ita K ad D, erit logarithmus rationis M ad A, hoc est numeri M

logarithmus aequalis logarithmo rationis D ad K , hoc est ipsi LH [Prop. 11.]; est igitur EN aequalis ipsi LH , hoc est excessui logarithmi EL divisoris K supra EH logarithmum dividendi D .

Et si ipsis EH , EL praefigatur signum $-$, et auferatur $-EL$ ab $-EH$, reliquum erit $EL - EH$, hoc est LH ; igitur regula pro Cas. 1. huic etiam infervit.

Sit autem divisor K major dividendo D ; igitur quotiens M minor est unitate. Erit autem EN logarithmus ipsius M aequalis excessui HL logarithmi dividendi EH supra EL logarithmum divisoris K . Quoniam enim est A ad M , ut K ad D , erit logarithmus rationis M ad A , hoc est numeri M , aequalis logarithmo rationis D ad K , hoc est [Prop. 11.] ipsi HL , qui est excessus logarithmi EH , dividendi, supra EL logarithmum divisoris.

D	M	K	A
H	N	L	E

Si autem ipsis EH , EL praefigatur signum $-$, et $-EL$ auferatur a $-EH$, reliquum erit $-HL$, logarithmus scilicet ipsius M . Quoniam vero M minor est unitate, sumendus est numerus reciprocus ejus qui habet logarithmum HL in tabulis, ut antea dictum.

In omnibus igitur casibus logarithmus quotientis est excessus logarithmi dividendi supra logarithmum divisoris, dummodo logarithmis numerorum, qui unitate sunt minores, apponatur signum $-$ subtractionis.

P R O P. XIV. P R O B.

Invenire logarithmum numeri qui est quartus proportionalis tribus numeris datis.

Quoniam quartus proportionalis est quotiens qui oritur dividendo numerum factum a secundo et tertio per primum proportionalem, invenietur logarithmus quarti auferendo logarithmum primi a logarithmo facti a secundo et tertio, praefixo signo — numeris qui unitate sunt minores, ut constat ex Prop. 13. Logarithmus vero facti est summa logarithmorum secundi et tertii, praefixo signo — numeris unitate minoribus [Prop. 12.]; igitur, praefixo signo —, ut dictum fuit, si a summa logarithmorum secundi et tertii auferatur logarithmus primi, reliquus erit logarithmus quarti proportionalis qui inveniendus fuit.

E L N I S.

G L A S G O W:
IN AEDIBUS ACADEMICIS,
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS,
ACADEMIAE TYPOGRAPHI,
M.DCC.LXXIV.

STIMULANT

FOR

the treatment of the various forms of debility and
of the various forms of nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

It is a powerful tonic and stimulant, and is
adapted to the treatment of the various forms of
debility and nervous prostration.

DE
LIMITIBUS
QUANTITATUM
ET
RATIONUM.
FRAGMENTUM.

F

LIMITIBUS

QUANTITATUM

RATIONUM
LIMITIBUS
FRAGMENTUM

QUANTITATUM

RATIONUM

FRAGMENTUM

DE
LIMITIBUS
QUANTITATUM
ET
RATIONUM.
FRAGMENTUM.

DEFINITIONES.

I. QUANTITAS constans seu invariabilis est quae semper ejusdem magnitudinis est: ut diameter ejusdem circuli, ipsiusque dimidium, &c. Summa rectarum a quovis puncto in eadem ellipsi ad focos ipsius ductarum, et ejusmodi: et patet omnem quantitatem datam constantem esse; non autem, contra, omnem constantem datam esse.^a

II. Quantitas mutabilis est quae augeri vel diminui potest. Harum quantitatuum variae species in Prop. 31, 32, 33, 34. Pappi enumerantur.^a

III. Si quantitas mutabilis semper minor fuerit quantitate data, sed ita augeri poterit, ut major fiat quacunque quantitate data quae minor est prima quantitate data; vel si

^a Eodem modo definiuntur *ratio constans*, et *ratio mutabilis*.

quantitas mutabilis semper major fuerit quantitate data, sed ita minui poterit, ut minor fiat quacunque quantitate data quae major est prima quantitate data; in utroque casu quantitas prima data dicatur Limes quantitatis mutabilis.

IV. Si ratio mutabilis semper minor fuerit quam ratio data, sed ita augeri poterit, ut major fiat ratione quacunque data quae minor est ratione prima data; vel si ratio mutabilis semper major fuerit quam ratio data, sed ita minui poterit ut minor fiat ratione quacunque data quae major est ratione prima data; in utroque casu dicatur ratio prima data Limes rationis mutabilis, in primo scilicet casu dicatur Limes crescentis rationis, in altero, Limes decrecentis rationis.

P R O P. I.

“ SIT AB recta data, AC autem semper minor sit ipsa AB,
 “ sed quae augeri poterit ita ut excessus AB supra ipsam mi-
 “ nor poterit fieri quavis recta data, hoc est sit AB limes cres-
 “ centis rectae AC. Ostendendum est, rationem aequalitatis
 “ limitem esse rationis AC ad AB; hoc est rationem AC ad
 “ AB, posse majorem fieri quavis ratione data quae minor est
 “ ratione aequalitatis.”

Sit enim ratio data ea quam habet AD ad AB, est igitur ex hypothesi AD minor AB:

et quoniam data est AB $\overline{A \quad \quad \quad C \quad D \quad E \quad B}$
 et ratio quam ad ipsam

habet AD, dabitur AD, quare et DB; poterit igitur AC augeri ita ut excessus AB supra ipsam minor fiat recta DB: augeatur

et fiat AE; est igitur AE major AD, quare et ratio AE ad AB major est ratione data AD ad AB. Q. E. D. ^b

P R O P. II.

“ SIT AB recta data, AC autem semper minor sit ipsa AB, sed
 “ quae augeri poterit ita ut ratio ejus ad AB major poterit fi-
 “ eri quavis ratione data minoris ad majorem; hoc est sit
 “ ratio aequalitatis limes rationis AC ad AB. Ostendendum
 “ est posse excessum AB supra AC minorem fieri quavis rectâ
 “ datâ.”

Sit DB recta data, quoniam igitur ratio AD ad AB est mi-
 noris ad majo-
 rem, poterit ex $\begin{array}{ccccccc} A & & & C & D & E & B \\ \hline & & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$
 hypothesi AC

augeri ita ut ratio ejus ad AB major sit ratione AD ad AB.
 Augeatur, et fiat AC aequalis ipsi AE; est igitur AE major
 AD et propterea EB minor DB. Q. E. D.

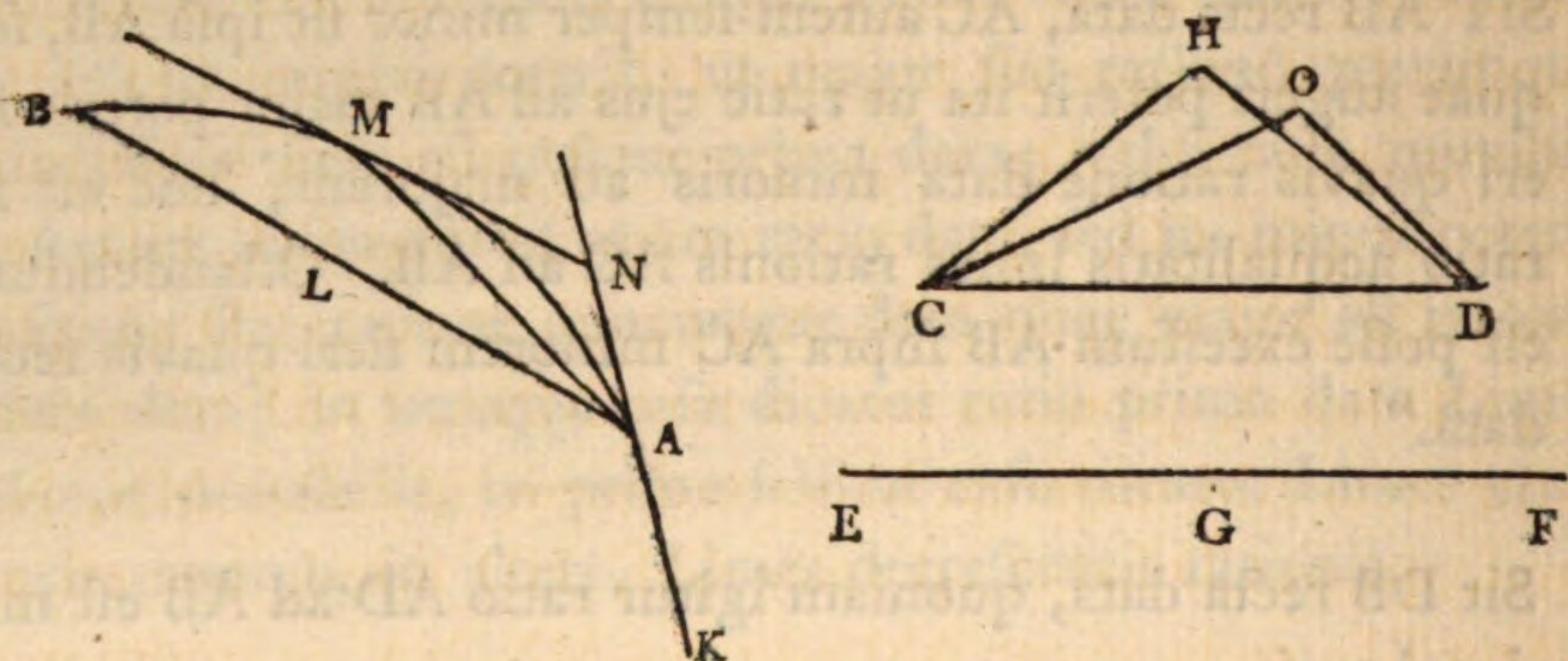
Ostendatur etiam utraque harum in casu quando AC
 semper major est AB, sed quae ita diminui poterit, &c.

P R O P. III.

“ IN quacunque curva vel parte curvae quae versùs easdem
 “ partes tota est concava; limes rationis quam habet arcus
 “ curvae ad ipsius chordam, decrefcentibus scilicet utrisque,
 “ est ratio aequalis ad aequale.”

^b Propositiones hae, quatuor priores, materiem tractatus hujus spectantes,
 hic in principio, commodissime locantur.

Sit recta linea AB chorda curvae AB, patet AB rectam semper minorem esse curva AB ut Archimedes assumpsit; ostendendum vero est, decrescente curva et recta, manente autem



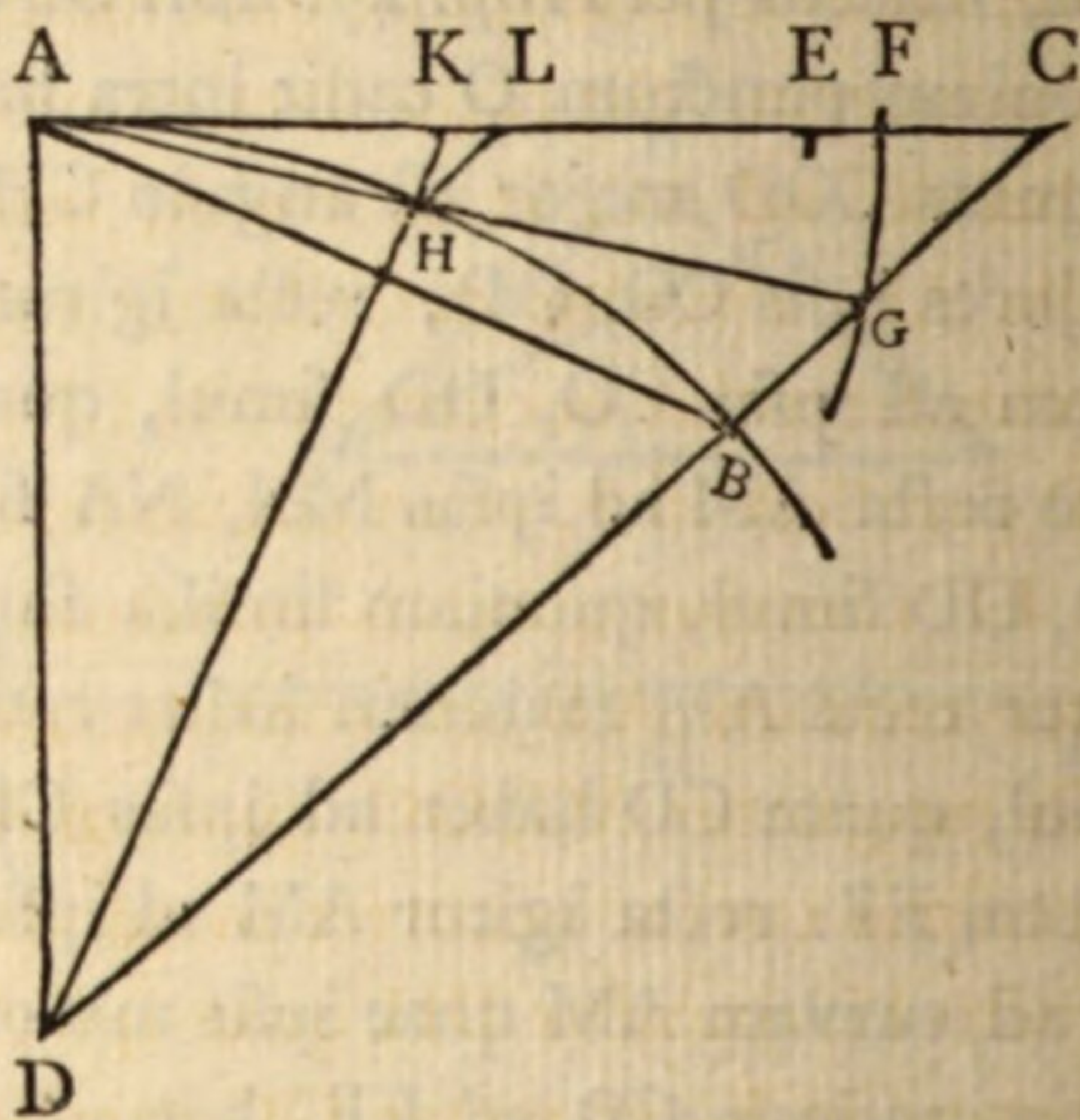
puncto A, posse rationem rectae ad curvam majorem fieri quacunque ratione data minoris ad majorem. Sit ratio data ea quam habet recta CD ad ipsam EF, et bifariam secta EF in G, constituatur super rectam CD triangulum isosceles habens latera CH, HD aequalia rectis EG, GF; quod fieri posse ex 22. 1. manifestum est. Contingat recta AK curvam in puncto A, ad quod fiat angulus KAL quod major sit angulo CHD, occurratque recta AL curvae in B; contingat recta MN ipsi AB parallela curvam in M, quod fieri posse patet, si concipiat recta AB moveri semper sibi parallela donec curvae in unico puncto M occurrat. Jungatur AM et super rectam CD constituatur triangulum COD aequiangulum triangulo MNA; est igitur angulus COD aequalis ipsi MNA, hoc est angulo KAL, qui, ex constructione major est angulo CHD; major igitur est angulus COD angulo CHD. Si autem circa trian-

gulum CHD describatur circulus, rectae CH, HD quae inter se sunt aequales, simul majores erunt duabus quibuscumque rectis, ad circumferentiam in qua est punctum H super CD descriptam, inflexis per Prop. 47. libri Sereni Antiffensis de cono; et quoniam punctum O cadit intra hanc circumferentiam, quia angulus COD major est angulo CHD, multo erunt CH, HD, majores ipsis CO, OD; recta igitur CD majorem habet rationem ad ipsas CO, OD simul, quam ad ipsas CH, HD; est vero recta AM ad ipsas MN, NA simul, ut recta CD ad ipsas CO, OD simul, quoniam similia sunt MNA, COD triangu-
la, igitur recta AM majorem habet rationem ad rectas MN, NA simul, quam CD habet ad ipsas CH, HD simul, hoc est ad rectam EF: recta igitur AM ad ipsas MN, NA, et multo magis ad curvam AM quae ipsis minor est, majorem habet rationem, ratione CD ad EF, hoc est ratione data, et propterea ratio aequalis ad aequale est limes rationis rectae AM ad curvam AM.

P R O P. IV.

“ SIT curva vel pars curvae ut in praecedente quam contin-
 “ gat recta AC in puncto A, et a dato puncto D in recta quae
 “ perpendicularis est ad AC in A, ad partes concavas curvae
 “ ducatur recta DC quae curvae in puncto B occurrat, rectae
 “ vero AC in C, et ducatur AB; si moveatur recta DC circa
 “ punctum D versus punctum A, erit ratio aequalis ad ae-
 “ quale limes rationis chordae AB ad segmentum AC con-
 “ tingentis.”

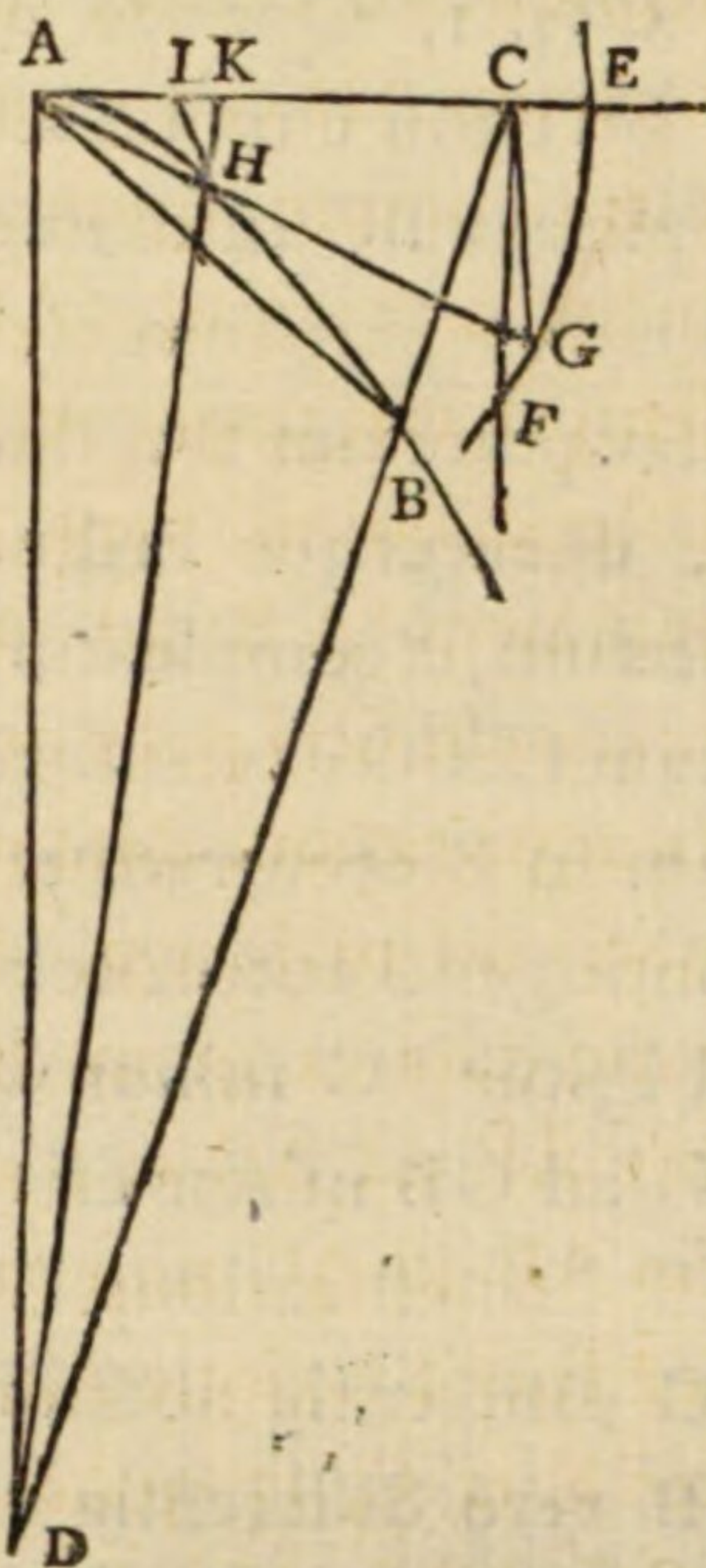
Primo fit chorda AB semper minor segmento AC contingentis, quando DC appropinquat punctum A; quod quidem semper fiet in casu quo semicirculus super diametrum AD cadit totus intra curvam, quoniam in hoc casu angulus ABC semper erit major recto. Ostendendum vero est rationem AB ad AC majorem fieri posse quacunque ratione data minoris ad majorem. Sit ratio data ea quam habet AE ad AC et si ratio AB ad AC non ma-



ior fuerit ratione AE ad AC, fumatur quodvis punctum F inter E et C, et quoniam AB minor est AF, nam vel aequalis est ipsi AE vel ipsa minor, quia ratio AB ad AC ponitur non major ratione AE ad AC, circulus descriptus centro A intervallo AF necessario rectae BC occurret; occurrat ipsi BC in G, et jungatur AG quae necessario occurret curvae^c; occurrat in H, et juncta et producta DH rectae AC occurrat in K, et ducatur ad AC recta HL parallela ipsi GC; minor igitur est AK recta AL, et propterea ratio AH ad AK major est ratione AH ad AL hoc est ratione AG five AF ad AC; ratio igitur AH ad AK, multo erit major ratione data AE ad AC.

^c Ponitur enim a quovis curvae puncto unicam tantum rectam duci posse curvam in eo puncto contingentem.

Sit autem, quando DC appropinquat punctum A, chorda AB semper major segmento AC contingentis, et ostendendum est rationem AB ad AC minorem fieri posse ratione quacunque data majoris ad minorem. Sit ratio data ea quam habet AE ad AC, et centro A, intervallo AE, circulus describatur cujus circumferentiae occurrat recta CF ipsi AD parallela in F, et in circumferentia EF sumatur quodvis punctum G inter curvam AB et contingentem AC; jungantur AG, GC, quarum AG necessario curvae occurret in quodam puncto H, ducatur DH quae ipsi AC occurrat in K, et rectae GC parallela ducatur HL. Est igitur AK major AL et propterea ratio AH ad AK minor est ratione AH ad AL, hoc est ratione AG five AE ad AC, hoc est ratione data. Q. E. D.



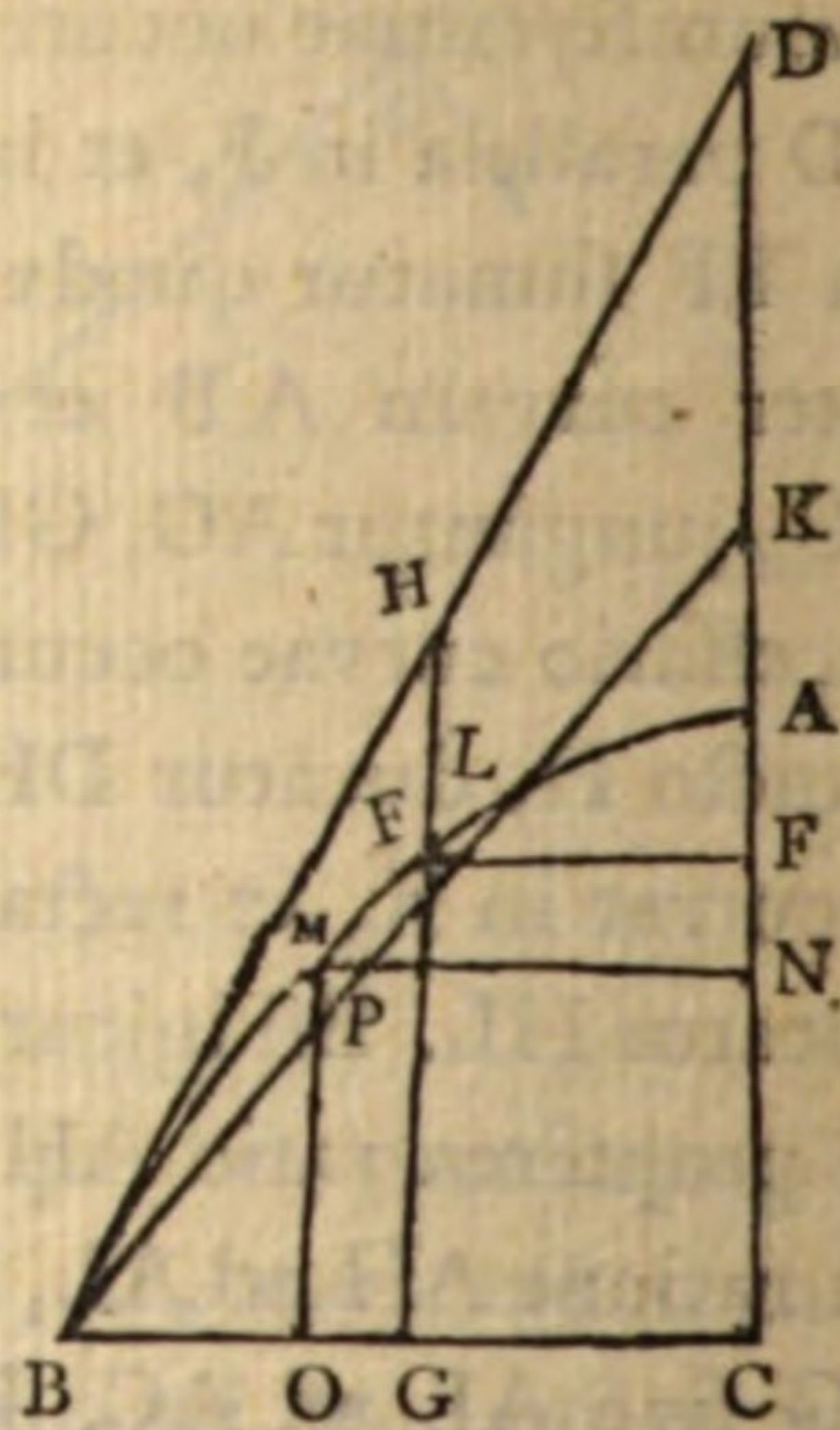
P R O P. V.

“ IN quacunque curva vel parte curvae, a cujus quovis puncto
 “ cto duci poterit unica tantum recta curvam in eo puncto
 “ contingens, Limes rationis quam habet differentia abscissarum
 “ a quavis diametro, ad differentiam rectarum quae diametro ordinatim applicantur, eadem est rationi quam habet segmentum diametri inter ordinatam et rectam quae

“ curvam in termino ordinatae contingit, ad ipsam ordinatam; hoc est rationi quam habet subtangens ad ordinatam.”

CAS. I. Quando curva concava est versus axem.

Sit enim curva AB et a puncto in ipsa B ducatur ordinatim applicata BC ad diametrum AC, fumatur vero quodvis aliud in curva punctum E, et primo fit E inter punctum B et diametri verticem A, ducaturque ordinata EF ad diametrum, et compleatur parallelogrammum EFCG; contingat vero BD curvam in B occurratque diametro in D, contingenti autem occurrat GE in H: est igitur EG minor GH, quare ratio EG ad GB minor erit ratione GH ad GB, hoc est ratione DC ad CB; et est EG differentia abscissarum AC, AF; GB vero differentia est ordinatarum BC, EF: ostensum igitur est in hoc casu, scilicet quando punctum E est inter B, A puncta, differentiam abscissarum minorem habere rationem ad differentiam ordinatarum quam habet CD ad CB. Sit jam ratio quaevis minor ratione CD ad CB, fitque eadem rationi CK ad CB, minor igitur est CK quam CD: jungatur KB quae curvae necessario occurreret; occurrat ei in L, et fumatur in curva punctum quodvis M inter B et L, ducaturque ad diametrum ordinata MN, et ad BC ducatur MO parallela ipsi NC, occurrat vero MO rectae BK in P. Est igitur MO major ipsa PO, quoniam scilicet BL est intra curvam



BML, quare ratio MO ad OB major erit ratione PO ad OB hoc est ratione KC ad CB; et est MO differentia abscissarum AC, AN; OB vero est differentia ordinatarum BC, MN. Quoniam igitur ostensum fuit rationem differentiae abscissarum ad differentiam ordinatarum in omni casu minorem esse ratione CD ad CB, sed quae poterit fieri major quacunque ratione CK ad CB, quae minor sit ratione CD ad CB; erit per Def. 4. ratio CD ad CB limes rationis quam habet differentia abscissarum ad eam ordinatarum.

Si sumatur punctum E ad alteras partes puncti B ad quas sumptum fuit in praecedente casu, similiter ostendetur rationem differentiarum praedictarum in omni casu majorem esse ratione CD ad CB: sed posse fieri ut minor sit quacunque ratione quae major sit ratione CD ad CB; unde et in hoc casu ratio CD ad CB erit Limes rationis differentiarum.

CAS. 2. Fiat alia figura in qua curva ad axem convexa est, et si pro *major* legatur *minor*, et vice versa; ostendetur hic casus secundus iisdem verbis ac primus. Q. E. D.

COR. Si curva fuerit parabola Limes rationis differentiarum seu ratio CD ad CB eadem est rationi AC bis ad CB.

P R O P. VI.

“ SI quadratum ABDC et rectangulum AEFC habeant latus
 “ commune AC, alterum vero rectanguli latus AE vel CF da-
 “ tum sit; augeatur vero vel minuatur quomodocunque ip-
 “ sorum latus commune AC, et simul augeantur vel minuan-
 “ tur ipsae figurae: ratio quam latus quadrati bis, habet ad
 “ datum rectanguli latus, Limes erit rationis incrementi vel

igitur incrementum quadrati seu gnomon BNG aequale est rectangulo OH, erit BNG ad CL ut OH ad CL hoc est ut ON ad FC; ex constructione vero est ON minor QD, quare ratio OH ad CL, hoc est ratio incrementi quadrati ad illud rectanguli minor est ratione data QD ad FC: ergo per Def. 4. ratio OD hoc est CD bis ad CF, Limes est rationis dictorum incrementorum.

Eadem vero ratio Limes erit rationis decrementorum ut patet. Q. E. D.

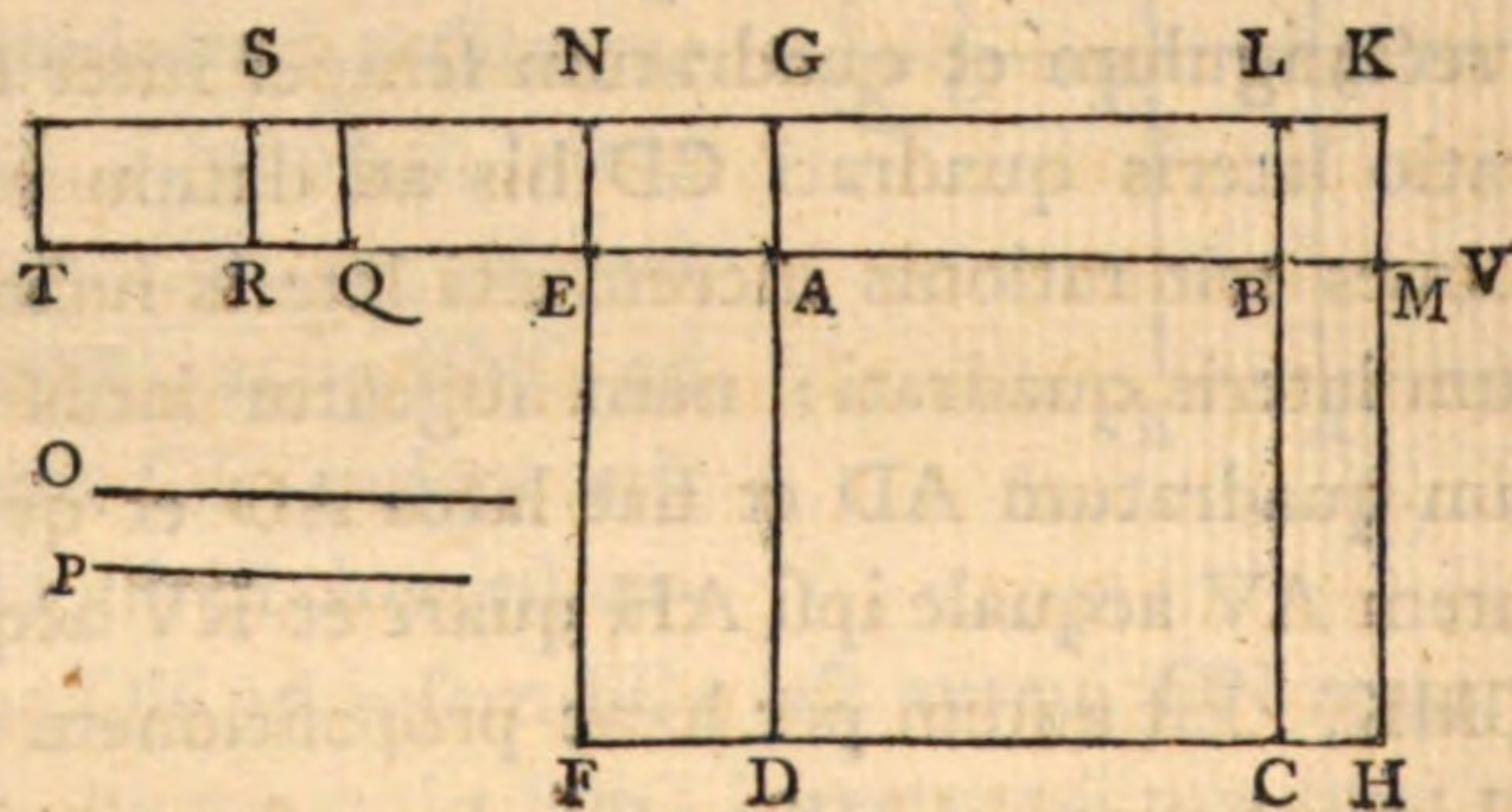
COR. Hinc si rectangulum ARSE datum habens latus AE aequale fuerit quadrato AD, et augeantur vel diminuantur latera ita ut rectangulum et quadratum semper inter se aequalia sint; ratio lateris quadrati CD bis ad datum rectanguli latus CF Limes erit rationis incrementi lateris rectanguli ad incrementum lateris quadrati: nam augeatur latus quadrati AC et ipsum quadratum AD et fiat latus AG et quadratum AH, sit autem AV aequale ipsi AH quare et RV aequale erit gnomoni CMK. Est autem per hanc propositionem ratio CD bis ad CF Limes rationis CMK ad CL, hoc est rationis RV ad CL, hoc est rationis RT ad CG, hoc est rationis incrementi lateris rectanguli AR ad illud lateris quadrati AC. Q. E. D.

P R O P. VII.

“ SINT duo rectangula ABCD, AEFD, quibus commune la-
 “ tus est AD, latus vero AE datum sit, et augeantur latera DA,
 “ DC rectis AG, CH et compleantur rectangula GDHK,
 “ LBMK, AENG; sunt igitur AG, CH incrementa laterum
 “ DA, DC; et spatia ALH, AN incrementa rectangulorum

“ AC, AF: decreſcant GA, HC; et vel ſit ratio ipſarum ſem-
 “ per eadem rationi datae rectae O ad datam P, vel Limes
 “ rationis ipſarum ſit ratio rectae O ad rectam P; erit ratio
 “ quam habet rectangulum, O, AB una cum ipſo P, BC ad
 “ rectangulum O, AE, Limes rationis decreſcentium incre-
 “ mentorum ALH, AN.”

PARS I. Sit ratio incrementorum BL BM ſemper eadem
 rationi O ad P, erit ratio incrementi ALH ad incrementum
 AN ſemper major ratione quam ſumma rectanguli O, AB



et ipſius P, BC habet ad rectangulum O, AE; ſed minor po-
 teſt fieri ratione quacunque quae major eſt ratione rectanguli
 O, AB una cum ipſo P, BC ad ipſum O, AE. Fiat enim ut
 O ad P ita BC ad AQ; et quoniam ex hypothefi eſt BL ad
 BM, ut O ad P, erit BL five AG ad BM ut BC ad AQ; igi-
 tur rectangulum QG aequale eſt ipſi BH, additoque commu-
 ni AK, erit rectangulum QK aequale ſpatio ALH: ratio igi-
 tur ſpatii ALH ad rectangulum AN eadem eſt rationi rectan-
 guli QK ad ipſum AN, hoc eſt rationi rectae QM ad ipſam

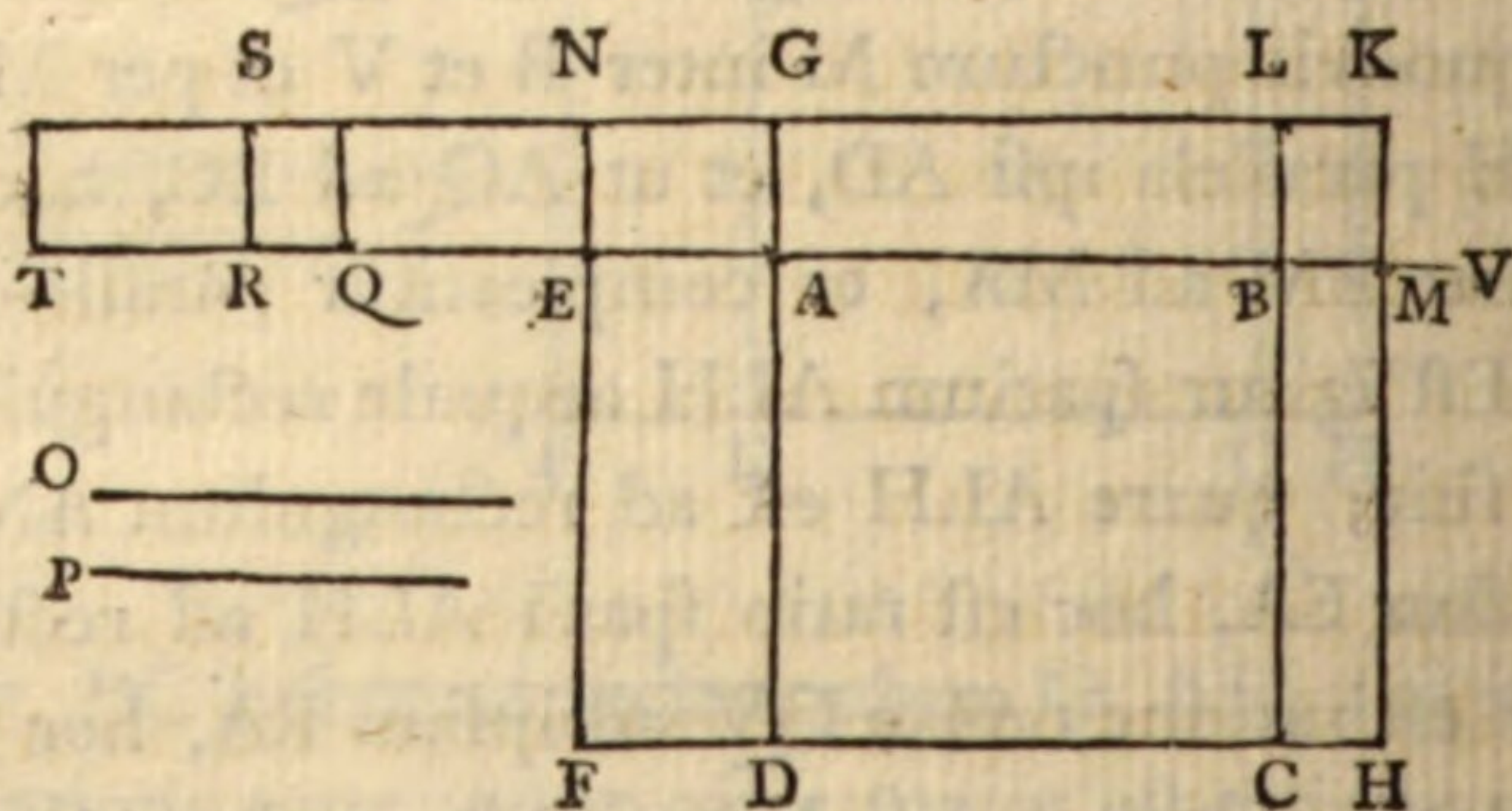
EA: quoniam vero est O ad P ut BC ad AQ, erit rectangulum O, AQ, aequale ipsi P, BC, additoque communi O, AB, erit rectangulum O, QB aequale rectangulo O, AB simul cum ipso P, BC; igitur rectangulum O, AB simul cum ipso P, BC est ad ipsum O, EA ut O, QB ad O, EA, hoc est ut recta QB ad ipsam EA: ratio autem rectae QM ad ipsam EA major est ratione rectae QB ad EA; igitur ratio spatii ALH ad AN major est ratione rectanguli O, AB simul cum ipso P, BC ad ipsum O, EA.

Ostendendum restat, rationem ALH ad AN posse fieri minorem ratione quacunque quae major est ratione rectanguli O, AB simul cum ipso P, BC ad ipsum O, EA, hoc est ratione rectae QB ad ipsam EA. Sit ratio data ea quam habet recta QV ad ipsam EA; est igitur recta QB minor ipsa QV. Sumatur quodvis punctum M inter B et V et per M ducatur recta KMH parallela ipsi AD, et ut AQ ad BC, hoc est ut P ad O ita fiat BM ad MK, et compleantur parallelogramma DK, AN. Est igitur spatium ALH aequale rectangulo QK, ut ostensum fuit; quare ALH est ad rectangulum AN ut recta QM ad ipsam EA, hoc est ratio spatii ALH ad rectangulum AN minor est ratione rectae QV ad ipsam EA, hoc est ratione data: ratio igitur quam habet rectangulum O, AB una cum ipso P, BC ad ipsum O, EA est Limes rationis incrementi ALH ad incrementum AN.

PARS 2. Sint duo rectangula ABCD, AEFD quibus commune latus est AD, latus vero AE datum sit, et augeantur latera DA, DC, rectis AG, CH, et compleantur rectangula GDHK, LBMK, AENG. Sunt igitur AG, CH incrementa laterum DA, DC, et spatia ALH, AN, incrementa rectangu-

lorum AC, AF: decrefcant GA, CH, et Limes rationis ipfarum fit ratio rectae O ad rectam P, erit ratio quam habet fumma rectanguli O, AB et ipfius P, BC ad rectangulum O, AE Limes rationis decrefcantium incrementorum ALH, AN.

Primo. Sit ratio incrementorum AG, CH feu BL, BM femper minor ratione O ad P, fed quae poterit major fieri ratione quavis data quae minor eft ratione O ad P; erit ratio incrementi ALH ad incrementum AN femper major ratione quam fumma rectanguli O, AB et ipfius P, BC habet ad rectangulum O, AE; fed minor fieri poteft ratione quacunque data, quae major eft ratione praedictae fummae ad rectangulum O, AE.



Fiat enim ut O ad P ita BC ad AQ, quae ponatur in recta BA producta; eft igitur rectangulum P, BC aequale ipfi O, AQ, et propterea fumma rectanguli O, AB et ipfius P, BC, aequale eft rectangulo O, QB; eft autem O, QB ad ipfum O, EA ut recta QB ad rectam EA: fint autem AG, BM incrementa fimul facta rectarum AD, AB, et ut AG ad BM ita fiat

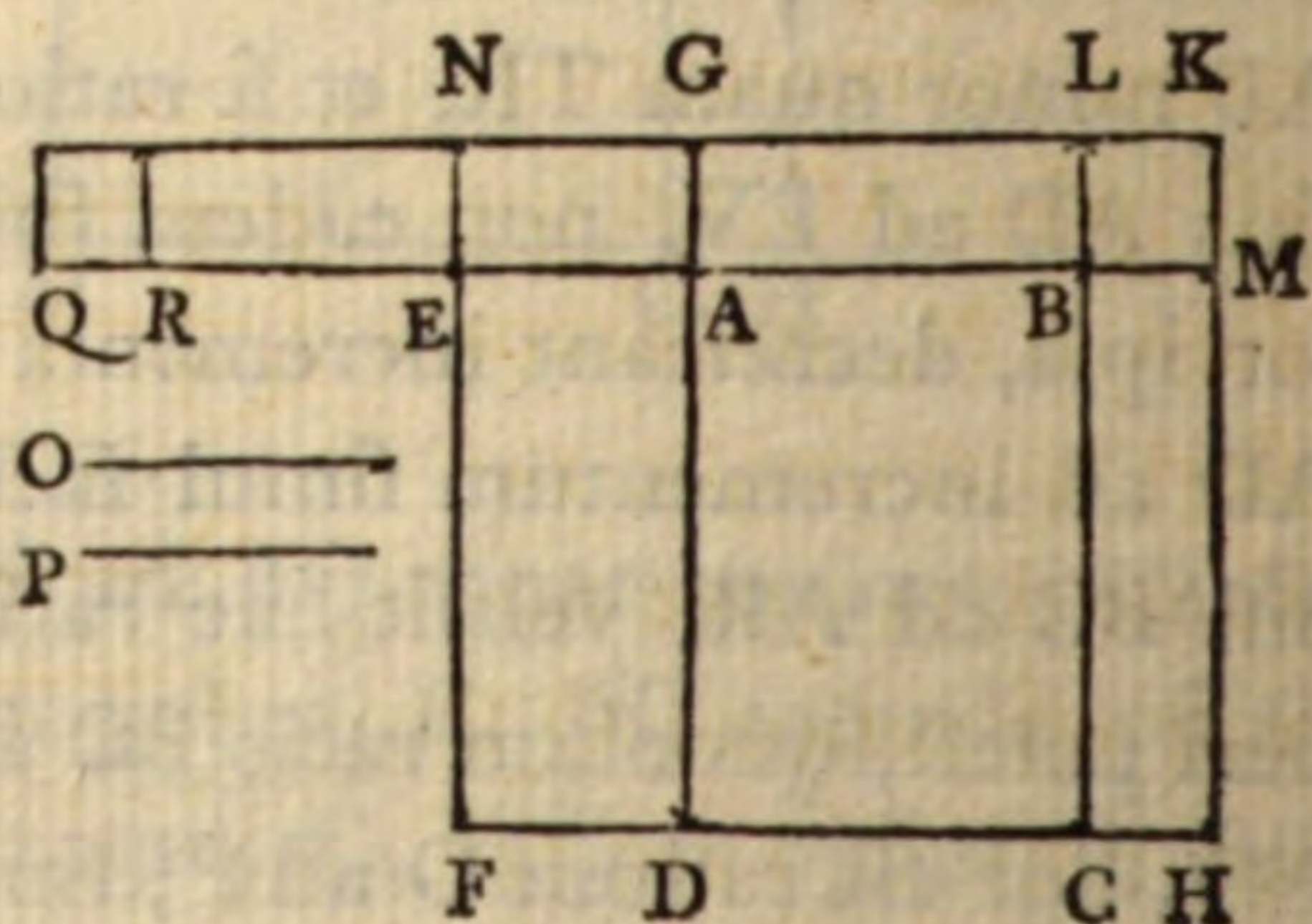
BC ad AR: quoniam igitur, ex hypothesi, ratio AG ad BM minor est ratione O ad P, hoc est ratione BC ad AQ, erit ratio BC ad AR minor ratione BC ad AQ; est igitur recta AR major ipsa AQ: ducatur RS parallela ipsi AG, et quoniam ut AG ad BM ita est BC ad AR, erit rectangulum AS aequale ipsi BH, additoque communi AK, erit rectangulum RK aequale spatio ALH: igitur ratio quam habet ALH ad AN eadem est rationi RK ad AN, hoc est rationi rectae RM ad ipsam EA; est autem RM major recta QB, quare ratio RM ad EA, major est ratione QB ad EA, hoc est ratio incrementi ALH ad incrementum AN, major est ratione quam habet summa rectanguli O, AB et ipsius P, BC ad ipsum O, AE.

Ostendendum restat, rationem incrementi ALH ad ipsum AN posse minorem fieri ratione quacunque data quae major est ratione rectanguli O, AB simul cum ipso P, BC ad ipsum O, AE, hoc est ratione rectae QB ad ipsam EA. Sit ratio data ea quam habet recta TB ad ipsam EA, est igitur TB major quam QB: sumatur punctum quodvis R inter T et Q, producatuR RB et sumatur BV recta, incrementum scilicet ipsius AB minor quam TR, et si ratio incrementi quod simul fit ipsius AD ad BV, non eadem fuerit rationi BC ad AR vel major ipsa, decrescant incrementa ita ut ratio incrementi ipsius AD ad incrementum simul factum ipsius AB eadem sit rationi BC ad AR, vel sit hac ratione major quod ex hypothesi fieri potest, quoniam ratio BC ad AR minor est ratione BC ad AQ, hoc est ratione O ad P; sint haec incrementa AG, BM, et compleantur rectangula ut dictum fuit. Si igitur ratio AG, hoc est ipsius BL, ad BM eadem sit rationi BC ad AR, erit ut prius ostensum in Parte I. ratio spatii ALH, hoc est incremen-

ti ipsius AC, ad AN incrementum ipsius AF eadem rationi rectae RM ad ipsam EA: est autem RM minor ipsa RV (decrevit enim BV in BM) quae ex constructione minor est quam TB: ratio igitur incrementi ALH ad ipsum AN five ratio RM ad EA, minor est ratione TB ad EA, hoc est ratione data: si vero ratio BL ad BM major sit ratione BC ad AR, multo magis eadem sequetur conclusio; erit enim BL ad BM ut BC ad rectam minorem quam AR unde ut in ultimò praecedentibus sequetur conclusio fortius.

Secundo. Sit ratio incrementorum BL, BM semper major ratione O ad P, hoc est ratione BC ad AQ, sed quae minor poterit fieri ratione quacunque data quae major est ratione BC ad AQ; in hoc casu ratio incrementi rectanguli AC ad incrementum quod simul fit ipsius AF, potest vel eadem esse rationi rectae QB ad ipsam EA, vel major potest esse hac ratione, vel eadem minor.

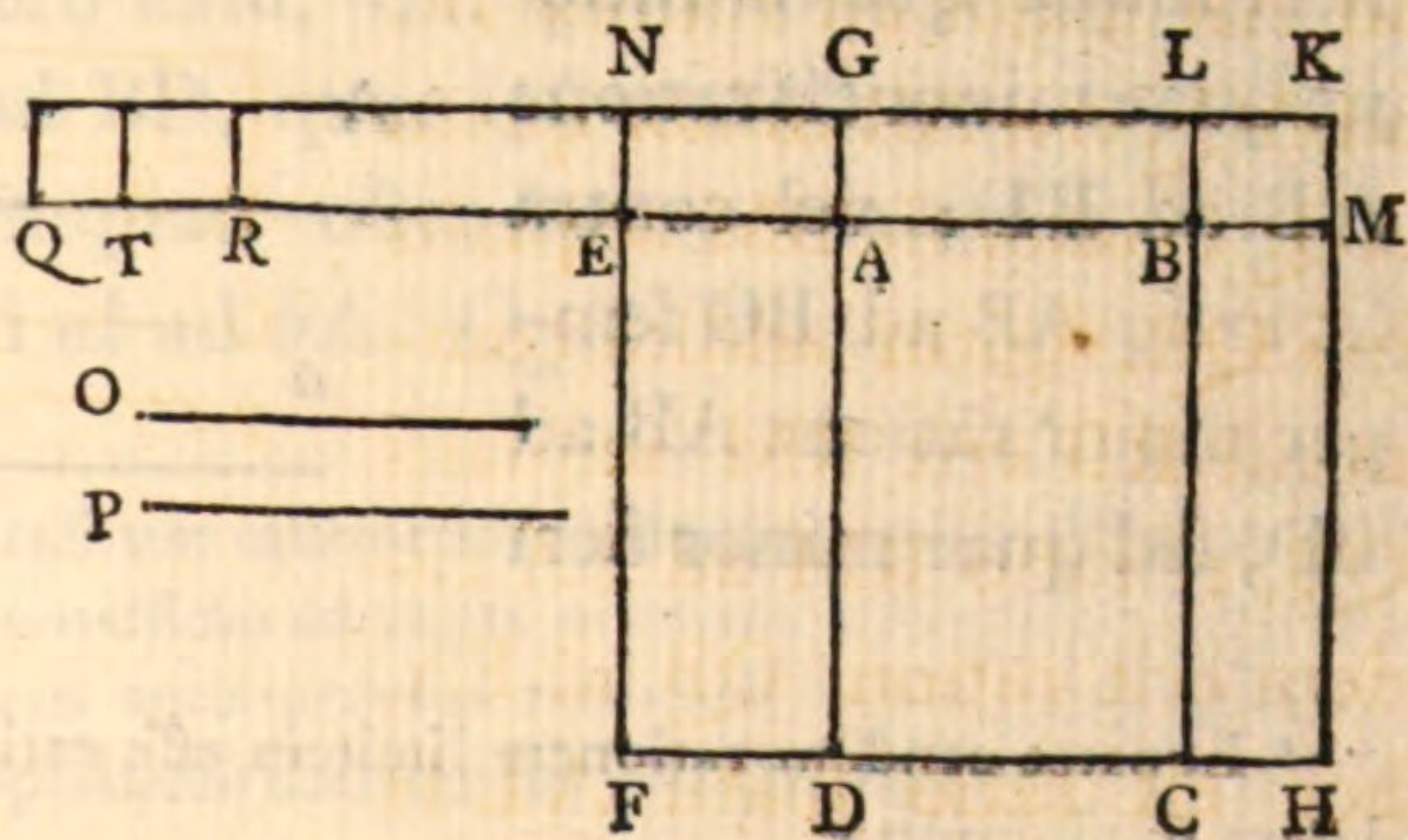
Sint enim LB, BM incrementa laterum CB, AB simul facta et ut LB ad BM, ita fiat BC ad AR, et quoniam ex hypothese ratio LB ad BM hoc est BC ad AR major est ratione BC ad AQ, erit AR minor quam AQ. Primo, sit BM aequalis ipsi QR, igitur addita communi RB erit RM aequalis QB, et ratio RM ad EA eadem erit rationi QB ad EA, hoc est ratio spatii ALH quod incrementum est ipsius AC, ad AN incrementum ipsius AF eadem erit rationi QB ad EA, hoc est rationi rectanguli



O, AB una cum ipso P, BC ad rectangulum O, AE. Secundo, si BM major fuerit quam QR, similiter ostendetur ratio RM ad EA major ratione QB ad AE. Tertio, si BM minor fuerit quam QR, similiter ostendetur ratio RM ad EA minor ratione QB ad EA.

Ostendendum vero est in secundo casu in quo scilicet ratio RM ad EA, hoc est ratio incrementi ALH ipsius AC ad AN incrementum ipsius AF, major est ratione QB ad AE, posse rationem ALH ad ipsum AN minorem fieri quacunque ratione data quae major est ratione QB ad EA. Sit haec ratio data ea quam habet recta QM ad ipsam EA, est igitur QM major quam QB; quando vero BM est incrementum ipsius AB, sit LB incrementum ipsius CB, et ut LB ad BM ita fiat CB ad AR, est igitur AR minor quam AQ ut prius ostensum: erit autem ratio spatii ALH ad ipsum AN eadem rationi rectae RM ad ipsam EA quae minor est ratione rectae QM ad EA hoc est ratione data.

In tertio casu in quo scilicet ratio RM ad EA minor est ratione QB ad EA, ostendendum est posse rationem spatii ALH quod incrementum est ipsius AC, ad ipsum AN, majorem fieri quacunque ratione data quae minor est ratione QB ad EA: fit haec ratio data ea quam habet RB ad EA, est igitur RB minor quam QB, quare et RA minor est quam QA,

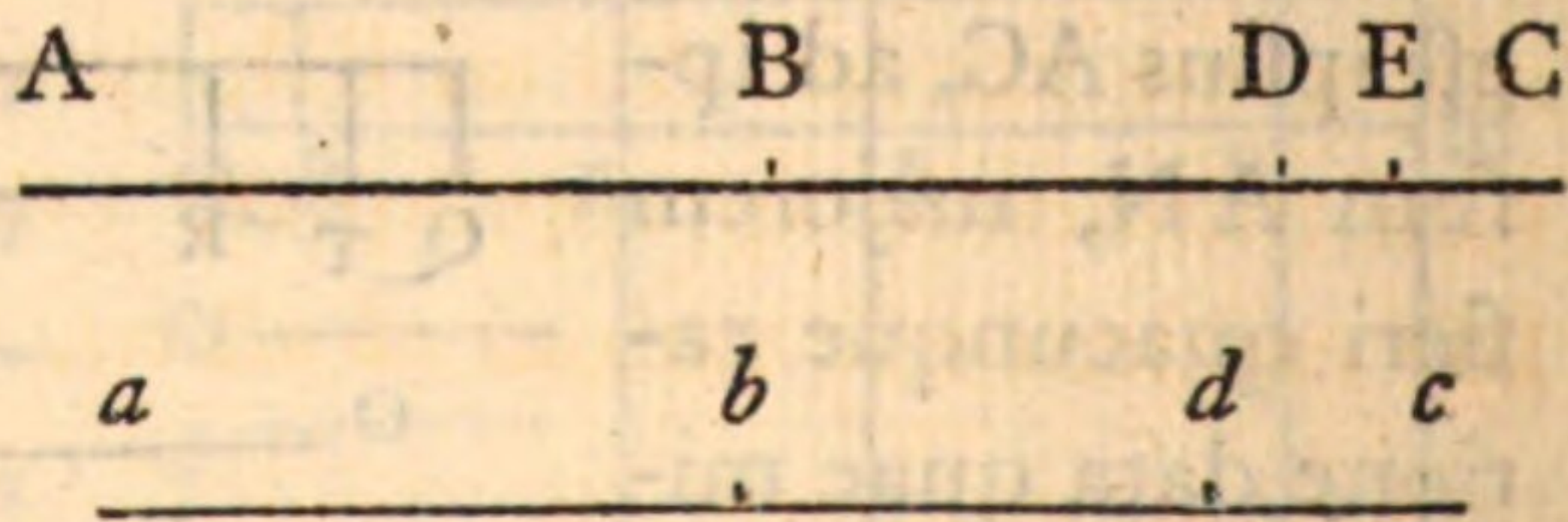


et propterea ratio BC ad RA major est ratione BC ad AQ; ex hypothesi autem potest ratio incrementi rectae AD ad illud rectae AB minor fieri quacunque ratione quae major est ratione BC ad AQ: sint igitur AG five LB et BM, earum incrementa, quae minorem habent rationem quam BC ad RA, et ut LB ad BM, ita fiat BC ad TA; igitur ratio BC ad TA minor est ratione BC ad RA, et erit TA major quam RA, et TB major quam RB, quare TM multo major est quam RB. Est igitur ratio TM ad AE, hoc est ratio incrementi ALH ipsius AC ad AN incrementum ipsius AF, major ratione RB ad AE, hoc est ratione data.^a Q. E. D.

P R O P. VIII.

“ SI duae rationes variables sint semper inter se eadem, erunt
 “ rationes quae ipfarum sunt Limites inter se eadem.”

Rationis AB ad BC limes fit ratio AB ad BD, hoc est fit ratio AB ad BC semper minor ratione AB ad BD, sed quae poterit fieri major quavis ratione quae minor est ratione AB ad BD; vel contra fit ratio AB ad BC semper major ratione AB ad BD, sed quae minor fieri



^a Et patet eandem rationem litem esse rationis decrementorum, quando latera diminuuntur.

Huic propositioni, in priori tractatus hujus exemplari MS. addita fuit alia etiam de rectangulo, casum quando latus unum augetur, alterum vero diminu-

poterit quavis ratione quae major est ratione AB ad BD ; eodem modo rationis ab ad bc quae rationi AB ad BC eadem est, limes fit ratio ab ad bd : erit ratio AB ad BD eadem rationi ab ad bd .

Primo fit ratio AB ad BC minor ratione AB ad BD , hoc est appropinquet ad limitem suum ratio AB ad BC augendo; igitur quoniam ratio ab ad bc semper eadem est rationi AB ad BC , necesse est ut etiam ratio ab ad bc appropinquet ad limitem suum augendo, hoc est ut ratio ab ad bc minor sit ratione ab ad bd . Si autem eadem non sint inter se rationes AB ad BD , ab ad bd , una ipsarum erit alterâ major; fit ratio AB ad BD major ratione ab ad bd ; fiatque ratio AB ad BE eadem ipsi ab ad bd ; quoniam igitur ratio AB ad BE minor est ratione AB ad BD ; poterit ratio AB ad BC major fieri ipsa AB ad BE ; fiat, et ratio ab ad bc semper eadem existens rationi AB ad BC , simul major fiet ratione AB ad BE hoc est ratione ab ad bd , sed ratio ab ad bc semper minor est ratione ab ad bd , ut ostensum fuit, quod absurdum est. Est igitur ratio AB ad BD eadem rationi ab ad bd .

Eodem modo in altero casu, viz. quando ratio AB ad BC major est ratione AB ad BD , quae ipsius est limes, et ad ipsum minuendo appropinquat, ostendetur, rationem AB ad BD eandem esse rationi ab ad bd . Q. E. D.

itur complectens. Haec vero casuum multorum distinctione admodum deveniebat proluxa, et in exemplari novissimo ad cuius normam editio haec impressa est, omnino omittitur. Eodem vero prorsus ratiocinii modo, ostenditur ac praecedens cui enunciatio propositioni conveniens praeponitur.

PROP. IX.

“Sint A et B quantitates variabiles utcunque ex aliis quan-
 “titatibus compositae, sint autem in omni casu aequales, et
 “fit C quantitas quaevis alia variabilis; et ratio α ad γ limes
 “fit rationis quam incrementum ipsius A habet ad incremen-
 “tum quantitatis C, ratio vero β ad γ limes fit rationis in-
 “crementorum ipsarum B, C; erit α aequalis ipsi β .”

Nam quoniam inter se aequales sunt quantitates A, B, ae-
 qualia erunt in omni casu ipsarum incrementa, igitur incre-
 mentum ipsius A est ad incrementum ipsius C, ut incremen-
 tum quantitatis B ad idem ipsius C incrementum; rationes
 vero quae earundem rationum sunt Limites inter se sunt eae-
 dem per Prop. 8. et est ratio α ad γ Limes rationis incrementi
 ipsius A ad incrementum ipsius C, et ratio β ad γ Limes ra-
 tionis incrementi ipsius B ad incrementum ipsius C; ergo est
 α ad γ ut β ad γ , ideoque α aequalis est ipsi β . Q. E. D.

Exemp. 1. Sit rectangulum A, B aequale rectangulo C, D;
 sintque latera A, B, C, quantitates variabiles, latus vero D sit
 invariabilis, et sit A, E aliud rectangulum cujus latus E est
 quantitas invariabilis: ratio vero α ad β fit Limes rationis
 incrementorum laterum A, B, et α ad γ Limes rationis incre-
 mentorum laterum A, C, erit [per Prop. 7.] ratio A, β ; B, α
 simul, ad E, α Limes rationis incrementi ipsius A, B; ad incre-
 mentum ipsius A, E; est autem ratio D, γ ad E, α Limes rati-
 onis incrementorum ipsorum C, D, A, E; ergo per hanc Prop.
 est A, β una cum B, α aequale ipsi D, γ .

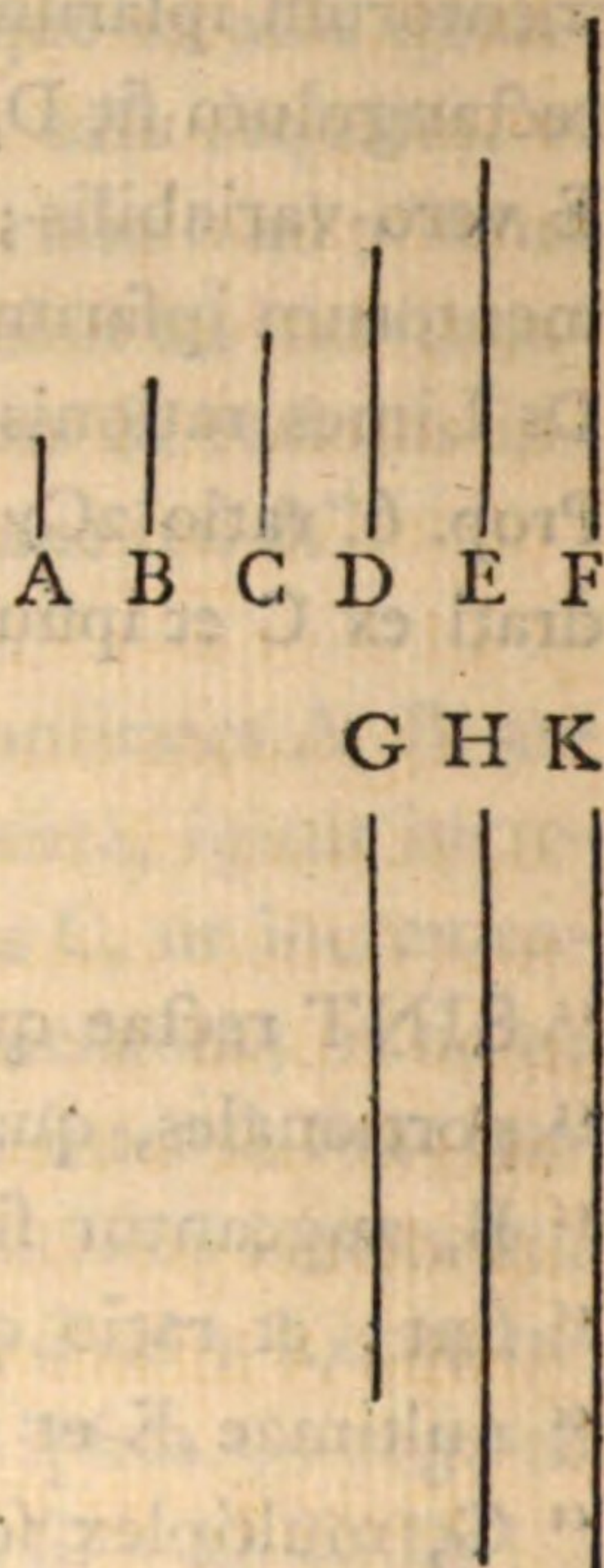
Ex. 2. Sit rectangulum A, B aequale quadrato ex C sintque A, B, C , quantitates variabiles, et rationis incrementorum ipsarum A, B Limes fit ratio α ad β , rationis vero incrementorum ipsarum A, C Limes fit ratio α ad γ . Aliud autem rectangulum sit D, E , cujus latus D est quantitas invariabilis, E vero variabilis; fitque ratio α ad ϵ Limes rationis incrementorum ipsarum A, E . Erit per Prop. 7. ratio $A\beta + B\alpha$ ad $D\epsilon$ Limes rationis incrementorum ipsorum A, B, D, E : et per Prop. 6. ratio $2C\gamma$ ad $D\epsilon$ Limes rationis incrementorum quadrati ex C et ipsius D, E ; ergo per hanc erit $A\beta + B\alpha = 2C\gamma$.

P R O P. X.

“ SINT rectae quotcunque A, B, C, D, E, F , deinceps proportionales, quarum prima A data fit, auctâ vero secundâ
 “ B , augeantur simul reliquae ita ut proportionales semper
 “ sint; et ratio quae Limes est rationis incrementorum penultimae E et secundae B eadem sit rationi quam habet
 “ G , multiplex scilicet antepenultimae D , ad ipsam A ; fitque
 “ H eadem multiplex ipsius E atque G ipsius D . Erit
 “ ratio quae Limes est rationis incrementorum ultimae F et
 “ secundae B eadem rationi quam H et E simul habent ad
 “ primam A .”

Sit ratio quam habet K ad A Limes rationis quam habet incrementum ipsius F ad incrementum ipsius B ; et ex hypothesis, ratio G ad A Limes est rationis incrementorum ipsarum E, B ; erit H una cum E aequalis ipsi K .

Quoniam enim ut E ad B ita est D ad A, et sunt H, G ipsarum E, D aequae multiplices, erit [Cor. 4. 5.] H ad B ut G ad A, et rectangulum B, G aequale erit ipsi A, H: est autem ratio K ad A hoc est ratio rectanguli A, K ad quadratum ex A, Limes rationis incrementorum ipsarum F, B, hoc est rationis incrementorum rectangulorum A, F; A, B; et quoniam rectangula E, B; A, B habent latus commune B; et est recta A data, et ex hypothesi ratio G ad A Limes est rationis incrementorum ipsarum E, B et invertendo ratio A ad G est Limes rationis incrementorum ipsarum B, E^b, igitur per Prop. 7. ratio rectanguli A, E una cum ipso G, B ad quadratum ex A Limes est rationis incrementi rectanguli E, B ad incrementum ipsius A, B: quoniam igitur duo sunt rectangula A, F; E, B inter se aequalia, ratio autem quae Limes est rationis incrementi ipsius A, F ad incrementum tertii rectanguli A, B ostensa est eadem rationi rectanguli A, K ad quadratum ex A; et ratio quae Limes est rationis incrementorum ipsorum E, B; A, B ostensa est eadem rationi rectanguli A, E una cum ipso G, B ad idem quadratum ex A; erit per Prop. 9. rectangulum A, K aequale rectangulo A, E una cum ipso G, B, hoc est ut



^b Per Prop. sequentem quae non ab hac pendet.

ostensum, una cum ipso A, H; est igitur recta K aequalis ipsi E una cum H. Q. E. D.

COR. 1. Hinc in serie deinceps proportionalium, A, B, C, D, E, F, &c. si ratio c ad b Limes fit rationis incrementorum ipsarum C, B; et ratio d ad b Limes fit rationis incrementorum ipsarum D, B, et ita deinceps, positis scilicet, c , d , e , f , antecedentibus rationum limitum ad communem consequentem b , fitque n numerus cujusvis termini F a primo A inclusivè, adeoque $n-1$ numerus termini antecedentis E; erit f ad b ut $\overline{n-1} \times E$ ad A.

Quoniam enim rectangulum A, C aequale est quadrato ex B, et data est recta A, erit per Cor. Prop. 6. ratio c ad b Limes scilicet rationis incrementorum ipsarum C, B eadem rationi $2B$ ad A: igitur per hanc propositionem, erit d ad b ut $2C+C$ hoc est $3C$ ad A et similiter erit e ad b ut $4D$ ad A, et ita deinceps: scilicet si n sit numerus cujusvis termini F a primo A inclusivè, erit f ad b ut $\overline{n-1} \times E$ ad A.

COR. 2. Et si $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \&c.$ fit series deinceps proportionalium, quarum ultima sit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$; quoniam $n+1$ est numerus termini $\frac{x^n}{a^{n-1}}$, erit n numerus termini penultimi $\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$, et propterea ratio $n \times \frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$ ad a erit, Limes rationis incrementorum ipsarum $\frac{x^n}{a^{n-1}}, x$.

Et si $1, x, x^2, x^3, \&c.$ sint deinceps proportionales, quarum ultima sit x^n ; erit ratio nx^{n-1} ad 1 ratio quae Limes est ratio-

nis incrementorum ipsarum x^n , x . Et si $\dot{x}$ vel dx dicatur antecedens rationis incrementorum ipsarum x , x^n ; erit $nx^{n-1}\dot{x}$ vel $nx^{n-1}dx$ consequens ejusdem rationis. Et haec $nx^{n-1}\dot{x}$ vel $nx^{n-1}dx$ est illud quod improprie vocatur fluxio vel differentia ipsius x^n .

P R O P. XI.

“ SI ratio AB ad BC Limes sit rationis variabilis DE ad EF;
 “ invertendo, erit ratio CB ad BA Limes rationis FE ad
 “ ED.”

Primo. Sit ratio DE ad EF semper minor ratione AB ad BC, sed quae poterit fieri major quavis ratione quae minor est ratione AB ad BC. Invertendo igitur erit ratio FE ad ED semper major ratione CB ad BA: praeterea vero ostendendum est posse rationem FE ad ED minorem fieri quavis ratione, quae major est ratione CB ad BA. Sit ratio GB ad BA major ipsa CB ad BA; et invertendo erit ratio AB ad BG minor ratione AB ad BC: ex hypothese autem poterit ratio DE ad EF major fieri quavis ratione quae minor est ipsa ratione AB ad BC; poterit igitur ratio DE ad EF major fieri ratione AB ad BG: fiat, et sit ratio De ad ef ; ergo invertendo, ratio fe ad eD minor erit ratione GB ad BA. Et ut ostensum fuit est ratio fe ad eD semper major ratione CB ad BA. Quare [Def. 4. sc. limitis rationis.] ratio CB ad BA Limes est rationis fe ad eD , seu FE ad ED. Q. E. D.

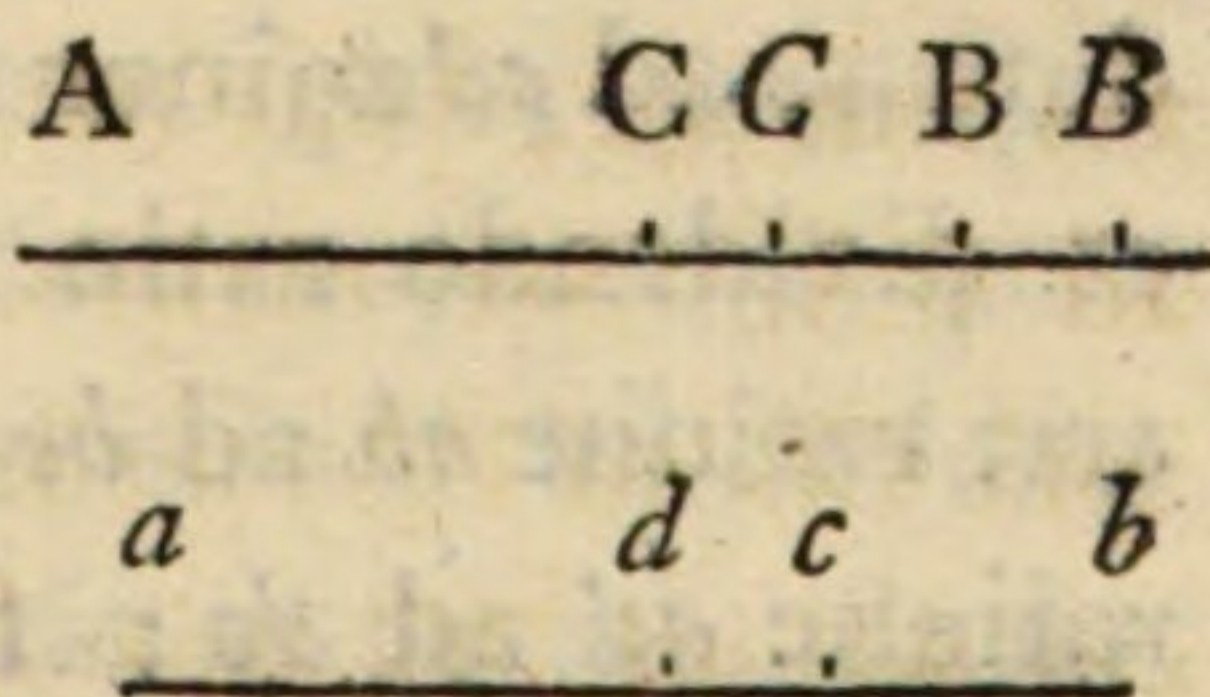
A	B	C	G
D	E e	F	f

Similiter si ratio DE ad EF semper major fuerit ratione AB ad BC sed quae minor poterit fieri quavis ratione, quae ipsâ AB ad BC major est; ostenditur rationem CB ad BA limitem esse rationis FE ad ED.

P R O P. XII.

“ SI rationis AB ad BC Limes fit ratio *ab* ad *bc*, hoc est si
 “ ratio AB ad BC semper minor sit ratione *ab* ad *bc*, sed quae
 “ potest major fieri ratione quacunque data quae minor est
 “ ratione *ab* ad *bc*; vel si ratio AB ad BC semper major sit ra-
 “ tione *ab* ad *bc*, sed quae minor fieri potest quacunque rati-
 “ one data quae major est ratione *ab* ad *bc*: erit convertendo,
 “ ratio *ab* ad *ac* Limes rationis AB ad AC.”

Nam in primo casu, quoniam ratio AB ad BC semper minor est ratione *ab* ad *bc*; convertendo, erit ratio AB ad AC semper major ratione *ab* ad *ac*: ostendendum vero restat, posse rationem AB ad AC, minorem fieri quacunque ratione data, quae major est ratione *ab* ad *ac*. Sit ratio *ab* ad *ad* major ratione *ab* ad *ac*, et convertendo erit ratio *ab* ad *bd* minor ratione *ab* ad *bc*; ex hypothesi autem ratio AB ad BC potest fieri major quacunque ratione *ab* ad *bd* quae minor est ratione *ab* ad *bc*; fiat, et sit ratio AB ad BC; igitur convertendo ratio AB ad AC, minor erit ratione *ab* ad *ad*. Quoniam igitur ratio AB ad AC semper major est ratione *ab* ad *ac*, sed minor fieri potest quacunque ratione data, quae major est

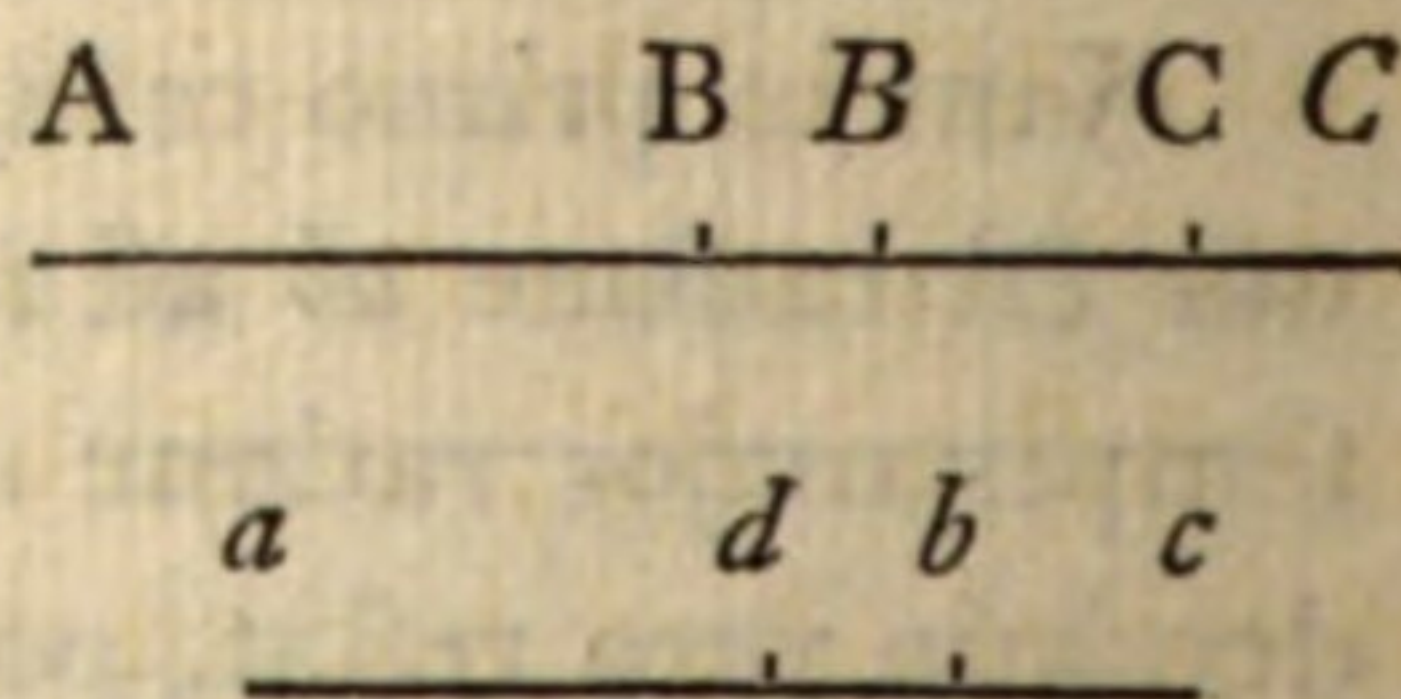


ratione ab ad ac ; erit ratio ab ad ac Limes rationis AB ad AC .
 Similiter ostenditur propositio in casu reliquo. Q. E. D.

P R O P. XIII.

“ SI rationis AB ad BC Limes sit ratio ab ad bc , hoc est si
 “ ratio AB ad BC semper minor sit ratione ab ad bc , sed quae
 “ major fieri potest quacunque ratione data, quae minor est
 “ ratione ab ad bc ; vel si ratio AB ad BC semper major sit,
 “ &c. Componendo, rationis AC ad CB Limes erit ratio ac
 “ ad cb .”

Nam quoniam ratio AB ad BC semper minor est ratione ab
 ad bc , componendo ratio AC ad CB semper minor erit ratione
 ac ad cb : ostendendum vero restat,
 rationem AC ad CB majorem fieri
 posse quacunque ratione data, quae
 minor est ratione ac ad cb ; sit ratio
 data ac ad cd minor ratione ac ad cb ;
 et dividendo ratio ad ad dc minor
 erit ratione ab ad bc ; igitur ratio AB ad BC major fieri potest
 ratione ad ad dc ; fiat, et deveniat ratio AB ad BC ; igitur
 componendo ratio AC ad CB major erit ratione ac ad cd hoc
 est ratione data, et propterea rationis AC ad CB Limes est
 ratio ac ad cb . Et similiter in reliquo casu. Q. E. D.



P R O P. XIV.

“ SI rationis AB ad BC Limes fit ratio ab ad bc , hoc est si
 “ ratio AB ad BC semper minor fit ratione ab ad bc , &c.
 “ Dividendo, rationis AC ad CB Limes est ratio ac ad cb .”

Nam quoniam ratio AB ad BC semper minor est ratione ab ad bc , dividendo erit ratio AC ad CB semper minor ratione ac ad cb : ostendendum restat, rationem AC ad CB majorem fieri posse quacunque ratione data, quae minor est ratione ac ad cb ; fit ratio data ad ad db minor ratione ac ad cb , et componendo, ratio ab ad bd minor erit ratione ab ad bc : ex hypothesi autem ratio AB ad BC major fieri potest ratione quacunque data ab ad bd , quae minor est ratione ab ad bc ; fiat, et deveniat ratio AB ad BC; et dividendo, ratio AC ad CB major erit ratione ad ad db , hoc est ratione data; quoniam igitur ratio AC ad CB semper minor est ratione ac ad cb , sed major fieri potest ratione quacunque data ad ad db quae minor est ratione ac ad cb , erit rationis AC ad CB Limes, ratio ac ad cb . Et similiter in reliquo casu. Q. E. D.

$$\begin{array}{ccccccc} A & & C & C & & B & B \\ \hline & & & & & & \\ a & & d & c & & & b \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

P R O P. XV.

“ SI ratio A ad B semper eadem fuerit rationi a ad b ; ratio-
 “ nis autem B ad C Limes fit ratio b ad c ; erit ratio a ad c
 “ Limes rationis A ad C.”

Sit ratio B ad C semper minor vel major ratione b ad c , puta semper minor; quoniam igitur est A ad B ut a ad b , ratio vero B ad C minor ratione b ad c ; erit ex aequo ratio A ad C minor ratione a ad c . Ostendendum vero praeterea est, rationem A ad C majorem fieri posse quavis ratione, quae minor est ipsa a ad c . Sit igitur ratio a ad d minor ratione a ad c , unde erit d major c ; quare ratio b ad d minor erit ratione b ad c quae scilicet Limes est rationis B ad C ; ergo per definitionem quartam, poterit ratio B ad C major fieri ratione b ad d : fiat itaque, et quoniam ratio A ad B fit simul eadem rationi a ad b ; erit ex aequo, ratio A ad C major ratione a ad d , hoc est ratione proposita: quoniam igitur ratio A ad C semper est minor ratione a ad c , poterit autem fieri major quavis ratione a ad d quae minor est ratione a ad c ; erit per definitionem ratio a ad c Limes rationis A ad C . Q. E. D.

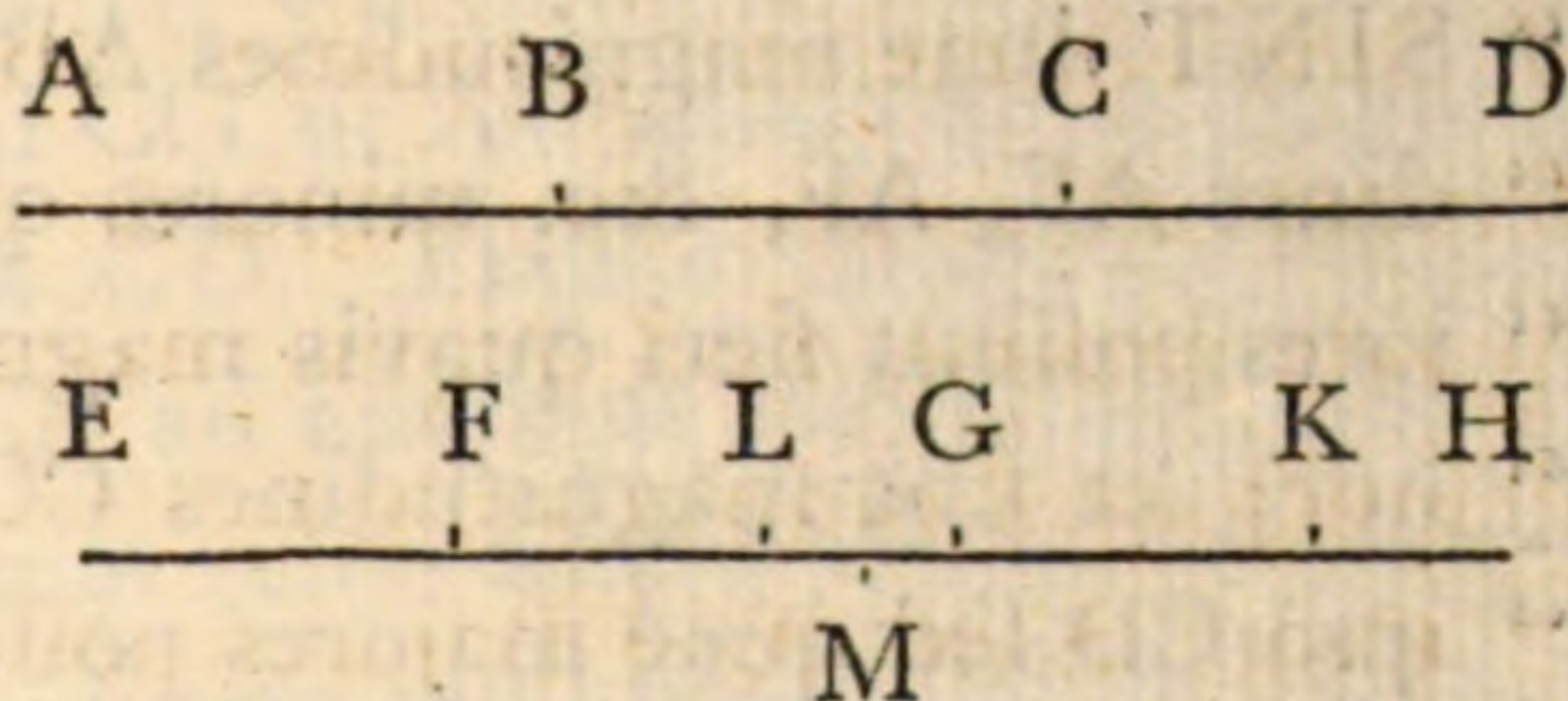
COR. Sint AC , BD rectangula quae data habent latera A , B ; Limes autem rationis incrementorum laterum variabilium C , D , fit ratio γ ad δ ; erit Limes rationis incrementorum ipsorum AC , BD , eadem rationi quae componitur ex rationibus A ad B et γ ad δ . Denotentur enim incrementa quaevis simul facta laterum C , D , rectis c , d ; et sumatur rectangulum BC . Ipsorum igitur AC , BC incrementa erunt Ac , Bc , quorum ratio semper eadem est rationi A ad B . Incrementa vero ipsorum BC , BD , sunt Bc , Bd ; quorum ratio est eadem ipsi c ad d ; quare et Limes rationis Bc ad Bd eadem est Limiti ipsius c ad d , hoc est rationi γ ad δ , cui eadem fiat ratio B ad E ; et per hanc Prop. erit Limes rationis Ac ad Bd eadem rationi A ad E hoc est ei quae composita est ex rationibus A ad B , et (B ad E , hoc est) γ ad δ .

P R O P. XVI.

“ SI rationis AB ad BC, Limes fit ratio EF ad FG, et ratio-
 “ nis BC ad CD Limes fit ratio FG ad GH, utraque vero ra-
 “ tio augeatur vel minuatur. Erit ratio EF ad GH Limes
 “ rationis AB ad CD.”

Utraque enim ratio minuatur et ex definitione Limitis ra-
 tionis, erit ratio AB ad BC semper major ratione EF ad FG, et
 ratio BC ad CD semper ma-

major ratione FG ad GH;
 igitur ex aequali, ratio AB
 ad CD semper major erit
 ratione EF ad GH: often-
 dendum vero restat, ratio-
 nem AB ad CD minorem



fieri posse ratione quacunque data, quae major est ratione EF
 ad GH. Sit ratio EF ad GK major ratione EF ad GH, est
 igitur GH major GK: fiat ut FG ad GH ita quaedam FL ad
 GK, et quoniam GH major est GK, erit FG major FL (14. 5.)
 Sumatur FM quae minor sit quam FG, major autem quam
 FL; erit igitur ratio EF ad FM major ratione EF ad FG, ra-
 tio autem FM ad GK major erit ratione FL ad GK: quo-
 niam vero rationis decrefcentis AB ad BC Limes est ratio EF
 ad FG, poterit ratio AB ad BC minor fieri quacunque ratione
 data, quae major est ratione EF ad FG; decrefcat igitur ra-
 tio AB ad BC ut minor fiat ratione EF ad FM; et quoniam
 rationis decrefcentis BC ad CD Limes est ratio FG ad GH

potest ratio BC ad CD minor fieri ratione quacunque data, quae major est ratione FG ad GH, hoc est ratione FL ad GK: fiat igitur ratio BC ad CD minor ratione FM ad GK. Quoniam igitur ratio AB ad BC minor facta est ratione EF ad FM, ratio autem BC ad CD minor facta est ratione FM ad GK, erit ratio AB ad CD ex aequali minor ratione EF ad GK hoc est ratione data. Similiter ostendetur casus reliquus quando ratio utraque augetur, invertendo. Q. E. D.

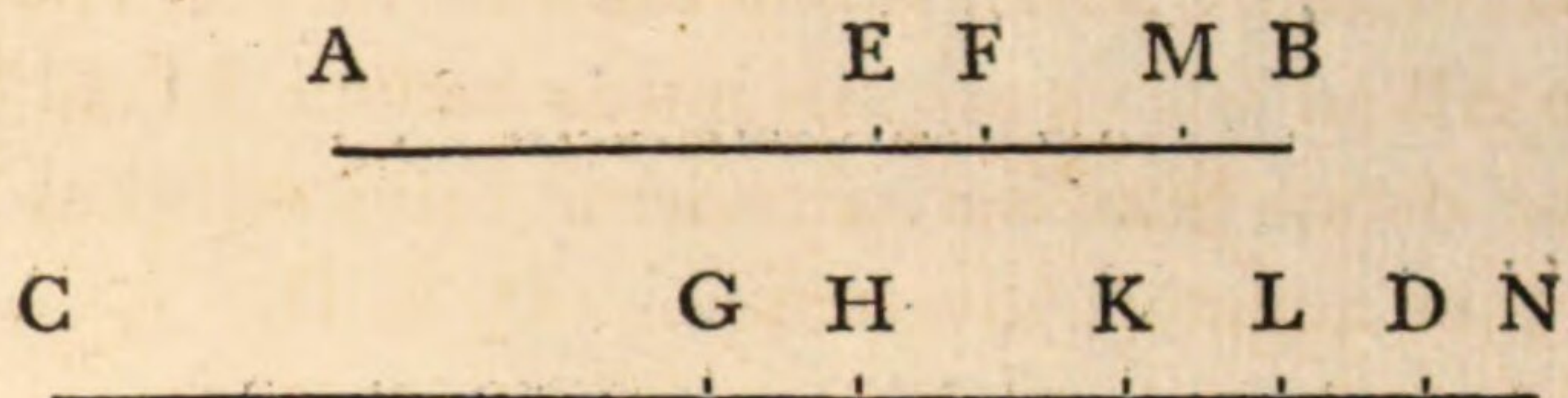
P R O P. XVII.^a

“ SINT duae magnitudines AB, CD, sintque aliae magni-
 “ dines AE, AF, &c. minores quidem ipsa AB sed quae ma-
 “ jores possunt fieri quavis magnitudine, quae ipsa AB sit mi-
 “ nor; et sint magnitudines CG, CH, &c. minores quidem
 “ ipsa CD sed quae majores possunt fieri quavis magnitudine
 “ quae minor sit ipsa CD; sit autem ratio ipsius AE ad CG
 “ vel AF ad CH, &c. semper eadem rationi datae; huic datae
 “ rationi eadem erit ratio AB ad CD.”

Si enim non sit ut AE ad CG ita AB ad CD; erit AE ad CG ut AB vel ad magnitudinem minorem ipsa CD, vel ad majorem. Sit primum ad minorem; sitque AE ad CG ut AB ad CK. Quoniam igitur CK minor est ipsa CD, potest quaedam ipsarum CG, CH, &c. major fieri ipsa CK, sit haec CL; sitque AM ea ipsarum AE, AF, &c. magnitudinum, quae

^a Propositio haec utilissima, etiam de Limitibus quantitatum, praecedenti seriei adjungitur.

ad CL datam habet rationem quam habet AE ad CG. Ut autem AE ad CG, ita est AB ad CK; ergo ut AB ad CK, ita est



AM ad CL. Ex hypothefi autem AB major est AM, major igitur est CK quam CL [14. 5.] sed et minor, quod fieri non potest. Non igitur est AE ad CG ut AB ad aliquam magnitudinem quae minor est ipfa CD. Eâdem ratione ostendetur neque esse CG ad AE, ut CD ad aliquam magnitudinem minorem ipfa AB. Ostendendum restat neque esse ut AE ad CG, ita AB ad aliquam magnitudinem quae major est ipfa CD. Si enim fieri potest, fit AE ad CG ut AB ad CN majorem ipfa CD. Invertendo igitur erit CG ad AE ut CN ad AB. Quoniam vero est CN major CD, erit CN ad AB, ut CD ad magnitudinem ipfa AB minorem [14. 5.] Ergo ut CG est ad AE, ita CD ad magnitudinem minorem ipfa AB quod fieri non posse ostensum est. Non igitur ut AE ad CG ita est AB ad magnitudinem aliquam ipsâ CD majorem: ostensum autem est neque ad minorem: quare ut AE ad CG ita est AB ad CD. Q. E. D.

Haec est propositio generalis quae adhibetur in Propp. 2, 5, 11, 12, 18, Lib. 12. Eucl. multisque aliis in aliis auctoribus, et quae semel demonstrata, ut jam factum, propositiones eas breviores reddere potest.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

PHYSICS DEPARTMENT

530 CHICAGO, ILL.

RECEIVED

APR 10 1954

1954

FROM THE PHYSICS DEPARTMENT

TO THE PHYSICS DEPARTMENT

OF THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILL.

APR 10 1954

RECEIVED

FROM THE PHYSICS DEPARTMENT

TO THE PHYSICS DEPARTMENT

OF THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILL.

APR 10 1954

RECEIVED

FROM THE PHYSICS DEPARTMENT

TO THE PHYSICS DEPARTMENT

OF THE UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILL.

A P P E N D I X

CONTENTS

PREFACE

TO THE READER

BY THE AUTHOR

IN A LETTER TO

THE EDITOR

OF THE

PHILOSOPHICAL

MAGAZINE

AND

TRANSACTIONS

OF THE

ROYAL SOCIETY

OF LONDON

IN THE

YEAR 1781

BY

JOHN DE LAUNCEY

OF THE

UNIVERSITY OF

OXFORD

PRINTED BY

JOHN DE LAUNCEY

AT THE

PRINTING OFFICE

OF THE

UNIVERSITY OF

OXFORD

IN THE

YEAR 1781

BY

JOHN DE LAUNCEY

OF THE

UNIVERSITY OF

OXFORD

PRINTED BY

JOHN DE LAUNCEY

AT THE

PRINTING OFFICE

OF THE

UNIVERSITY OF

OXFORD

IN THE

YEAR 1781

BY

JOHN DE LAUNCEY

OF THE

UNIVERSITY OF

OXFORD

A P P E N D I X,

CONTINENS PAUCA

P R O B L E M A T A,

EAQUE HAUD DIFFICILIA,

E COMPLURIMIS IN MANUSCRIPTIS

R O B. S I M S O N, M. D.

S E L E C T A;

QUAEQUE PRO SPECIMINE EXHIBENTUR

A D I L L U S T R A N D A M

VETERUM GEOMETRARUM ANALYSIN.

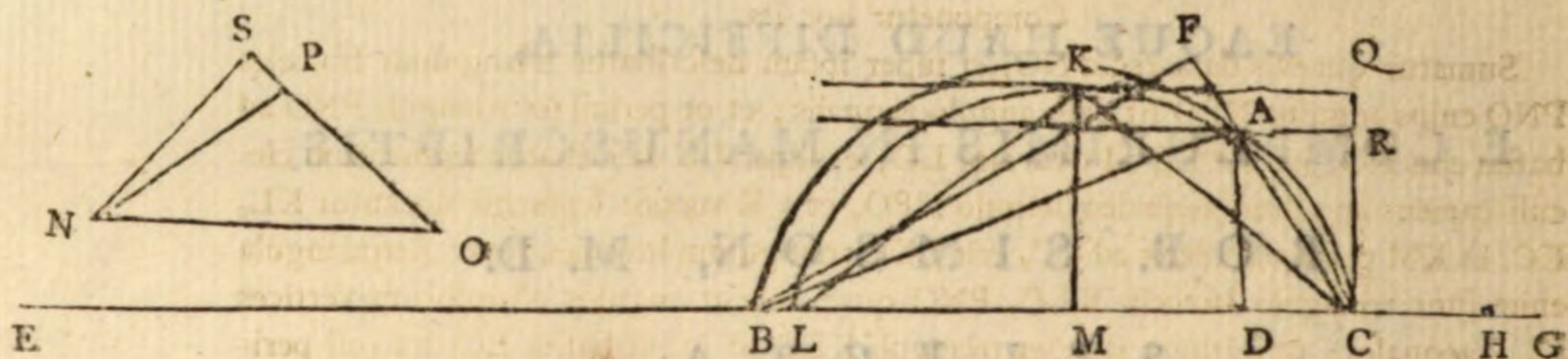
P R O B. I.

Est Prob. 4^{to} Arithmeticae universalis Newtoni generalius factum.

“ TRIANGULI ABC dato angulo BAC non recto, perpendicularo ab eo ad basim, et perimetro; invenire triangulum.”

Factum puta, et sit AD perpendicularis ad basim, et data recta CE aequalis perimetro. Sitque primo angulus BAC major recto, et ducatur BF perpendicularis ad CA productam. Specie igitur datum est triangulum ABF [43. Dat.], quare data est ratio rectae BF ad ipsum BA; sit huic eadem ratio AD ad CG, et quoniam data est AD, data erit CG: et quoniam data est ratio BF ad FA, huic eadem sit ratio AD ad GH, data autem est AD, quare data est GH. Est autem recta EC aequalis perimetro trianguli ABC, quare recta EB aequalis est ipsis BA, AC simul. Et [7. 2.] quadratum ex EC una cum quadrato ex CB est aequale duplo rectangulo EC, CB una cum quadrato ex EB, hoc est una cum quadratis ex BA, AC et duplo rectangulo BA, AC, quorum quadratum ex BC aequale est [12. 2.] quadratis ex BA, AC una cum duplo rectangulo CA, AF; reliquum igitur quadratum ex EC una cum duplo

A



Quoniam vero ad constructionem requiritur ut supra inventam basim BC describatur segmentum circuli capiens angulum dato angulo aequalem, et ductâ CR ad rectos angulos ipsi BC et dato perpendiculari aequali, ut parallela per R rectae BC occurrat circumferentiae, quod non semper fieri potest, ideo Problema non semper potest construi. Si vero parallela per R contingat circumferentiam unica erit solutio. Dato vero angulo et datâ perimetro, triangulum et perpendicularis a dato angulo ad basim, quae hoc efficient, ita invenientur. Puta factum, sit scilicet triangulum KLC cujus angulus LKC aequalis est dato angulo BAC, et cujus perimenter aequalis est datae EC; ducatur KM perpendicularis ad basim, et quoniam requiritur ut parallela basi LC ducta per K contingat circumferentiam circa KLC triangulum descriptum, erit K vertex segmenti LKC; igitur aequales sunt rectae LK, KC, et datus est angulus

LKC, quare triangulum LKC specie datum [44 Dat.]; data igitur est ratio KL ad LC, ut et ratio duplae ipsius KL, hoc est rectarum LK, KC simul ad LC, et componendo data erit ratio ipsarum LK, KC, CL simul hoc est rectae EC ad ipsam LC. Et data est EC, data igitur est LC, et datum propterea erit segmentum LKC et vertex ejus K, ut et perpendicularis KM.

Componetur hoc ita.

Sumatur quaevis data recta NO, et super ipsam describatur triangulum Iosceles PNO cujus angulus NPO sit dato angulo aequalis; et ut perimeter trianguli PNO ad basim ejus NO, ita fiat EC ad quartam LC; et super LC describatur segmentum circuli capiens angulum aequalem angulo NPO, et a K vertice segmenti ducantur KL, KC, et KM perpendicularis ad LC, erit LKC triangulum inveniendum. Aequiangula enim sunt triangula Ioscelia KLC, PNO quae habent angulos ad ipsorum vertices K, P aequales; ut igitur perimeter trianguli KLC ad ipsius basim LC, ita (est perimeter trianguli PNO ad basim ipsius NO, et ita, ex constructione, est) recta EC ad ipsam LC, et propterea est perimeter trianguli KLC aequalis rectae EC datae scilicet perimetro. Et si compleatur parallelogrammum KMCQ manifestum est rectam QK quae parallela est basi LC contingere circulum LKC in vertice K, transit enim KM per ejus centrum [cor. 1. 3.] et rectus est angulus QKM.

Inquirendum autem est an perpendicularis KM major aut minor sit perpendiculari in quovis alio triangulo quod habet angulum ad verticem aequalem dato angulo LKC, et perimetrum aequalem datae perimetro EC.

Sit aliud istiusmodi triangulum ABC; patet basim ejus BC necessario majorem esse basi LC, nam si minor esset, segmentum circuli super ea descriptum capiens angulum ipsi LKC aequalem caderet intra segmentum LKC, et propterea latera cujusvis trianguli in segmento super basi minore descripto simul minora essent rectis LK, KC, quare et perimeter ejus minor esset perimetro trianguli KLC, hoc est minor data recta EC. Est igitur basis BC major basi LC, et quoniam perimetri triangulorum ABC, KLC, ex hypothese, sunt aequales, erit summa laterum BA, AC minor summa ipsorum LK, KC. Summa autem laterum cujusvis trianguli super basi LC quod verticem habet in recta QK vel supra eam major est summâ laterum LK, KC, et multo magis si triangulum fuerit super basim majorem BC, et vertex ejus in eadem recta vel supra eam. Igitur vertex trianguli super basi BC quod datum habet angulum ad verticem et datam perimetrum, necessario cadet infra rectam QK, et ideo KM altitudo trianguli LKC est maxima.

Componetur Problema ita.

Sit NPO datus angulus cui angulus ad verticem trianguli inveniendi debet esse aequalis, et sit CR altitudo data, et CE data perimeter ejusdem trianguli, et ponatur CR ad rectos angulos ipsi EC. Inveniatur autem triangulum LKC ut dictum fuit,

Datae autem sunt rectae HE, EG, datum igitur est rectangulum HE, EG, hoc est ipsum KF, FE; et data est recta KE, data igitur est recta EF, hoc est AD [86. Dat.]. Quoniam vero BG, hoc est BC, minor est ipsis DA, AC simul, hoc est quam recta BF, erit BG multo minor quam BE, et GE quam HE. Patet igitur rectangulum HE, EG minus esse quadrato ex HE dimidio ipsius KE, et propterea semper applicari posse rectangulum aequale ipsi HE, EG ad rectam KE, deficiens quadrato [27. 6.]: applicetur, sitque F punctum applicationis, erit recta FE aequalis perpendicularo quæsito.

Et quoniam ad inveniendum triangulum, describendus est semicirculus super datam basim BC, et tum ipsi BC ad rectos angulos ducenda est recta aequalis ipsi EF, ut recta per hujus terminum ducta, parallela ipsi BC, occurrat circumferentiae in punctis quorum utrumque erit vertex trianguli quod Problemati satisfaciet; patet rectam EF hoc est AD, non majorem debere esse dimidio basis BC; si autem aequalis fuerit EF dimidio basis, parallela praedicta continget circulum et propterea unicum erit triangulum quod Problemati satisfaciet. Datâ autem basi BC, recta BE quod hoc efficiet ita invenietur. Puta factum, sitque triangulum ABC, reliquisque ut prius manentibus, praeterea bifariam secentur BG, BH in punctis L, M. Igitur ex Hypothesi est EF ipsi BL, sive MH aequalis, quare ME aequalis est ipsi HF, et quadrata ex illis aequalia erunt. Quoniam vero ostensum fuit rectangulum KF, FE aequale ipsi HE, EG, ablato utroque ex quadrato ex HE dimidio ipsius KE, erit reliquum [5. 2.] quadratum scilicet ex HF aequale reliquo [2. 2.] rectangulo EH, HG, hoc est, quia aequales sunt HB, BG, duplo rectangulo EH, HB. Ostensum autem fuit quadratum ex ME aequale quadrato ex HF; quadratum igitur ex ME aequale est duplo rectangulo EH, HB. Quoniam vero secta est recta BE in puncto L, ipsique adjecta est BM aequalis ipsi BL, erit [8. 2.] quadratum ex tota ME aequale quadruplo rectangulo EB, BM una cum quadrato ex LE, hoc est duplo rectangulo EB, BH una cum quadrato ex LE, quae propterea simul aequalia erunt duplo rectangulo EH, HB; et ablato communi, duplo scilicet rectangulo EB, BH, erit reliquum quadratum ex LE aequale reliquo, duplo scilicet quadrati ex HB, sive basi BC, hoc est quadrato ex diametro quadrati super basi BC descripti. Data autem est basis BC, data igitur est LE, et data est BL aequalis scilicet basis dimidio; data igitur est recta BE.

Componetur autem hoc ita.

Sumatur recta BE aequalis ei quae componitur ex BL dimidio basis BC, et ex LE quae aequalis est diametro quadrati super basi descripti, et producta EB, in ea sumatur BH aequalis basi BC, et HK aequalis ipsi HE; fiat etiam BG aequalis ipsi BH, et BM aequalis ipsi BL. Quoniam igitur BE major est BC, sive BG, erit BE major GE, quare quadratum ex HE majus est rectangulo HE, EG. Ad rectam igitur KE applicari potest rectangulum aequale ipsi HE, EG deficiens quadrato [27, 28. 6.] applicetur, sitque KF, FE, erit FE aequalis ipsi BM dimidio basis.

In BE sumantur BG, BH, utraque aequalis ipsi BC, et producatu^r BH ad K ita ut HK aequalis sit ipsi HE, et ad rectam KE applicetur rectangulum KFE aequale rectangulo HE, EG deficiens quadrato; describatur vero super BC semicirculus, et ducatur recta BN ipsi BC ad rectos angulos; aequalis vero ipsi FE, et per N ducatur recta parallela ipsi BC, occurratque circumferentiae in A, et jungantur AB, AC et ducatur AD perpendicularis ad BC. Erit ABC triangulum inveniendum, hoc est erit AF aequalis ipsi AC, nam hoc ostenso, quia FE aequalis est rectae AD, erunt BA, AD, AC simul aequales datae rectae BE.

Quoniam enim rectangulum KF, FE aequale est ex Constructione rectangulo HE, EG, commune addatur quadratum ex BG, et erit quadratum ex BG una cum rectangulo KF, FE aequale [6. 2.] quadrato ex BE. Apponatur commune quadratum ex FE, et quadratum ex BG una cum rectangulo KE, EF hoc est una cum rectangulo HE, EF bis, aequale erit quadratis ex BE, EF, hoc est [7. 2.] quadrato ex BF una cum rectangulo BE, EF bis. Auferatur commune, rectangulum scilicet BE, EF bis, et quadratum ex BG, hoc est ex BC, una cum rectangulo HB, EF bis aequale erit quadrato ex BF. Quoniam vero rectus est angulus BAC, erit quadratum ex BC aequale quadratis ex BA, AC, et rectangulum BC, AD bis, hoc est rectangulum HB, EF bis aequale erit rectangulo BA, AC bis. Igitur quadratum ex BC una cum rectangulo HB, EF bis aequale est quadratis ex BA, AC una cum rectangulo BA, AC bis, hoc est [4. 2.] quadrato ex BA, AC tanquam una recta, quod propterea aequale erit quadrato ex BF. Est igitur BA una cum AC aequalis rectae BF, et ideo recta AC aequalis est ipsi AF, et propterea recta BE aequalis est rectis BA, AC, AD simul. Q. E. D.

P R O B. III.

Est praecedens generalius factum.

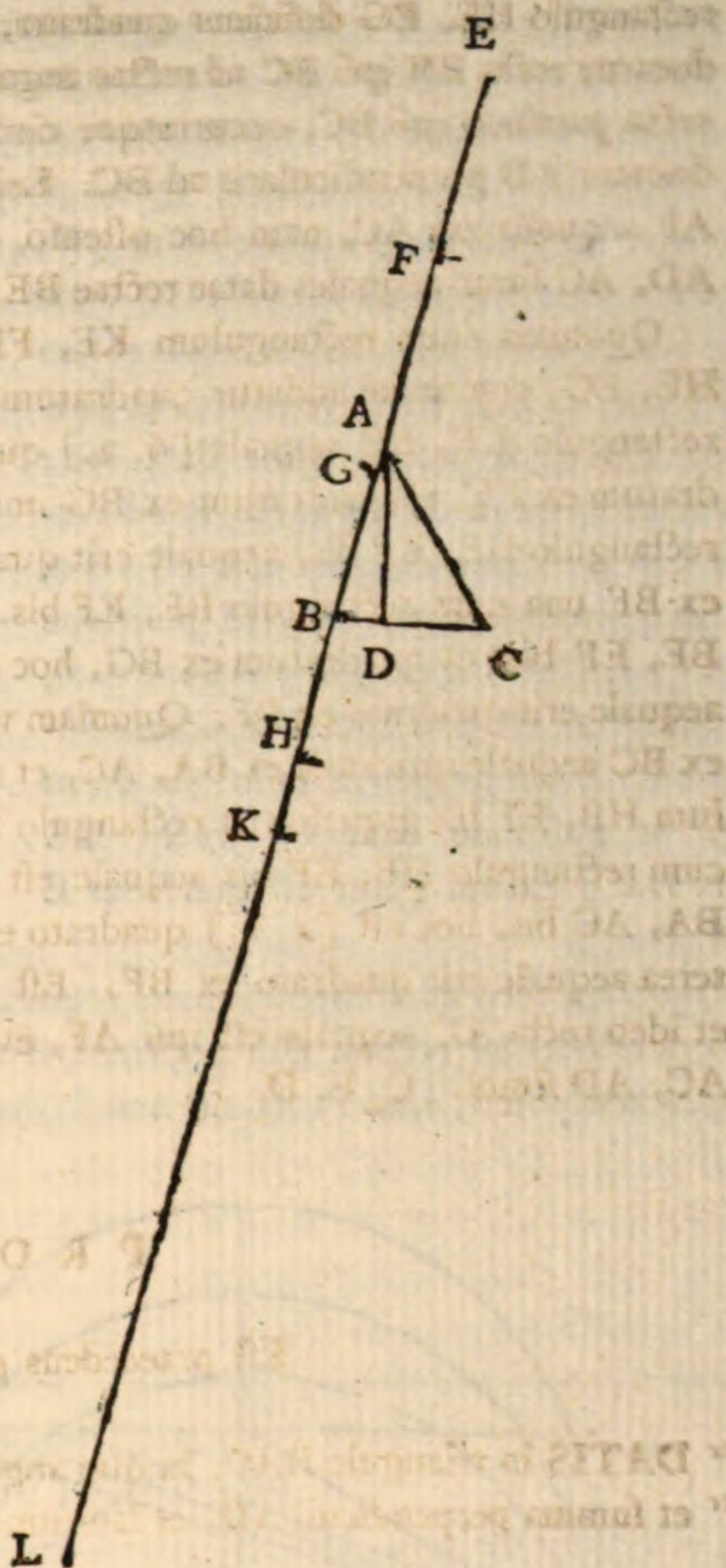
“ DATIS in triangulo BAC, in quo angulus BAC non est rectus sed datus, basi BC, et summa perpendiculi AD, et laterum BA, AC; invenire triangulum.”

Factum sit, et producatu^r latus BA ad E, sitque BE aequalis perpendiculo et lateribus simul, et propterea data; et sit AF aequalis lateri AC, erit igitur FE aequalis perpendiculo AD. Fiat utraque BG, BH aequalis basi BC. Quoniam igitur datus est angulus BAC, et est BF aequalis lateribus BA, AC simul, habebit [per 7. 6 Dat.] excessus quadrati ex BF supra quadratum ex base BC ad triangulum ABC, et propterea ad duplum ipsius rectangulum BC, AD, hoc est HB, FE, rationem datam. Excessus autem ille aequalis est, quia BG aequalis basi, rectangulo HF, FG [6. 2.] data igitur est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum HB, FE. Sit ratio haec

eadem rationi rectae BK bis ad basim BC; et quoniam data est BC data erit BK.

Et quoniam rectangulum HF, FG est ad ipsum HB, FE, ut recta BK bis ad ipsam BC, vel BH, hoc est ut rectangulum BK, FE bis ad rectangulum HB, FE, erit rectangulum HF, FG aequale ipsi KB, FE bis; commune addatur quadratum ex BG, et [6. 2.] quadratum ex BF aequale erit quadrato ex BG una cum rectangulo KB, FE bis; commune addatur rectangulum BE, EF bis, erit quadratum ex BF una cum rectangulo BE, EF bis, hoc est [7. 2.] erit quadratum ex BE una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex BG una cum rectangulo KE, EF bis. Fiat KL aequalis ipsi KE, et quadrata ex BE, EF simul aequalia erunt quadrato ex BG una cum rectangulo LE, EF. Auferatur commune quadratum ex EF, erit reliquum quadratum ex BE aequale reliquo quadrato sc. ex BG una cum rectangulo LF, FE. Datae autem sunt rectae BE, BG, et quadrata ex ipsis data, igitur datum est rectangulum LF, FE; et data est recta LE, data igitur est recta FE [86. Dat.].

Determinatio vero et compositio fient ad normam earum in praecedente Problemate.



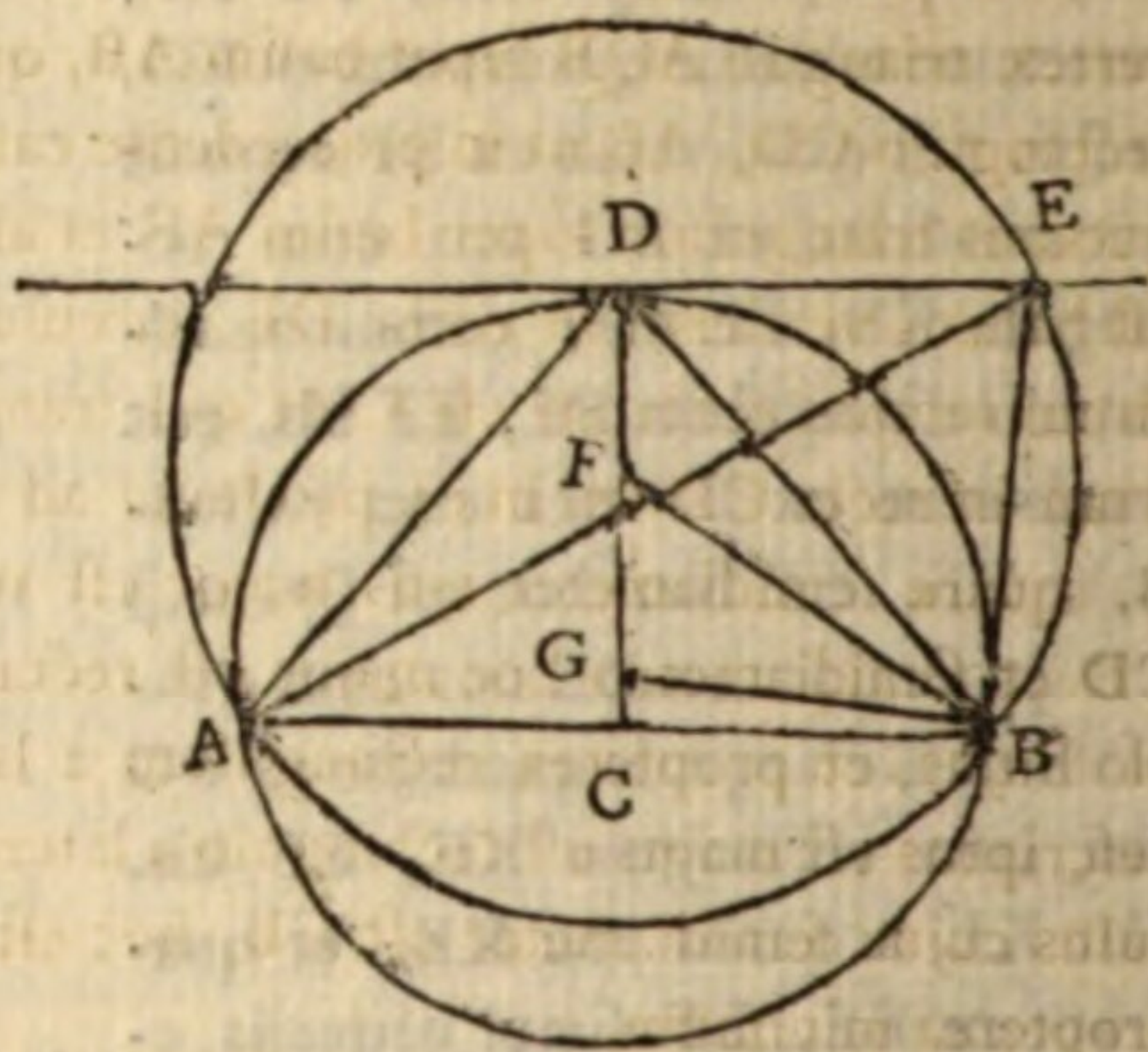
P R O B. IV.

“Data basi trianguli, ejusque altitudine, datoque rectangulo lateribus contento, ipsum describere.”

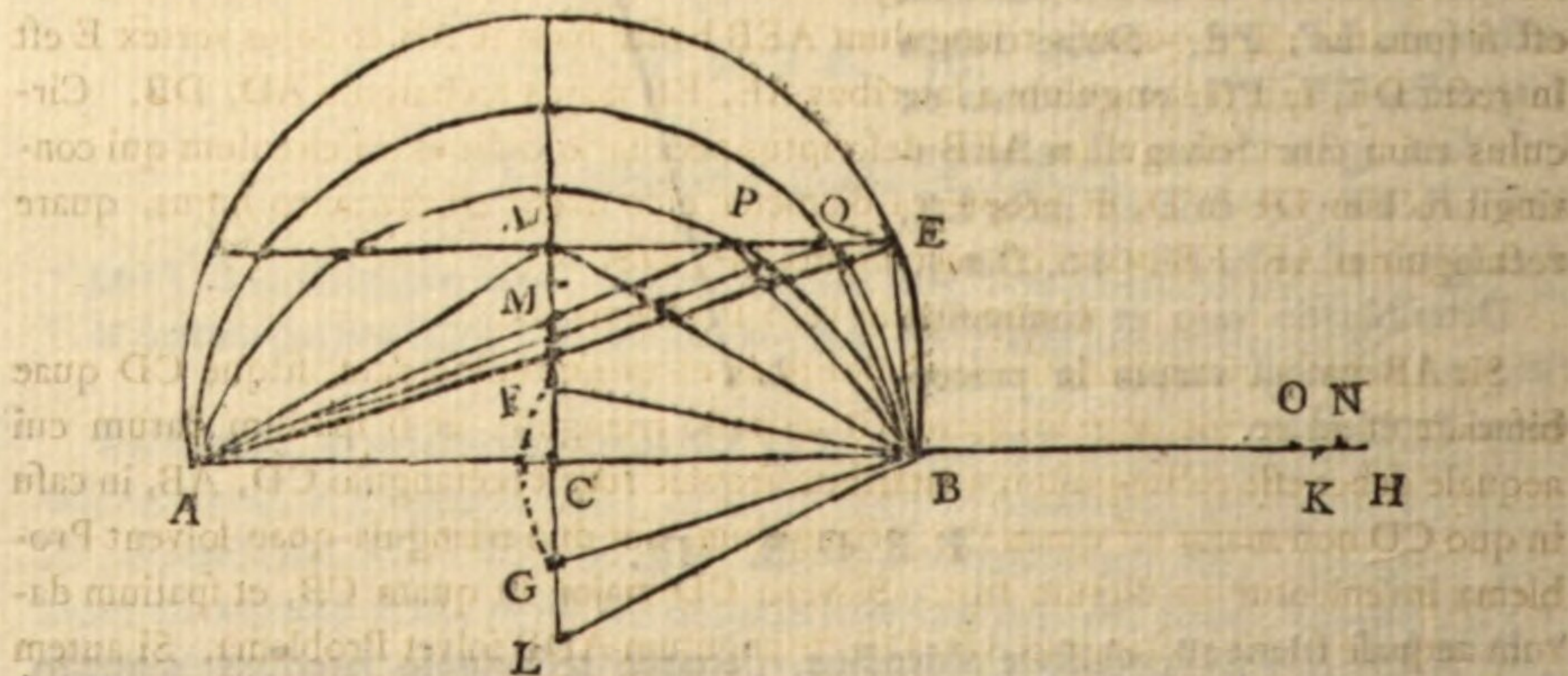
Sit recta AB positione et magnitudine data basis trianguli, et, bifariam secta AB in C, sit CD ad rectos angulos ipsi AB altitudo trianguli data, et per D ducta DE

parallela ipsi AB, inveniendum est in DE punctum E ita ut junctis AE, BE rectangulum AE, EB aequale sit dato spatio, triangulum enim AEB erit illud quod inveniendum est, altitudo enim ejus aequale est rectae CD.

Puta factum, igitur descripto circulo circa triangulum AEB, erit rectangulum contentum altitudine CD et diametro circuli aequale rectangulo a lateribus AE, EB per Prop. C. Lib. 6. Euclidis, Quod propterea datum est; et data est CD, quare diameter circuli magnitudine data est; centrum autem ejus est in recta CD quae bifariam et ad angulos rectos secat rectam AB [Cor. 1. 3.]. fit F centrum, et jungatur FB quae magnitudine data erit; quoniam igitur a dato puncto B ad rectam CD positione datam ducta est recta BF magnitudine data, erit BF positione data [34. Dat.] et est CD positione data, datum igitur est punctum F centrum scilicet circuli qui propterea positione datus erit, et positione data est recta DE [31. Dat.] datum igitur est punctum E [28. Dat.].



Quoniam vero ad compositionem requiritur ut recta magnitudine data ponatur a dato puncto B ad rectam CD positione datam, quod, ut patet ex [34. Dat.] non semper fieri potest, ideo Problema non semper potest construi. Fiet autem modo sin-



gulari, in casu scilicet in quo recta BC aequalis est rectae CD aut major ipsa, si recta magnitudine data aequalis fuerit ipsi BC dimidio sc. rectae AB. Rectangulum autem datum quod hoc efficiet et triangulum in hoc casu ita invenientur; quoniam

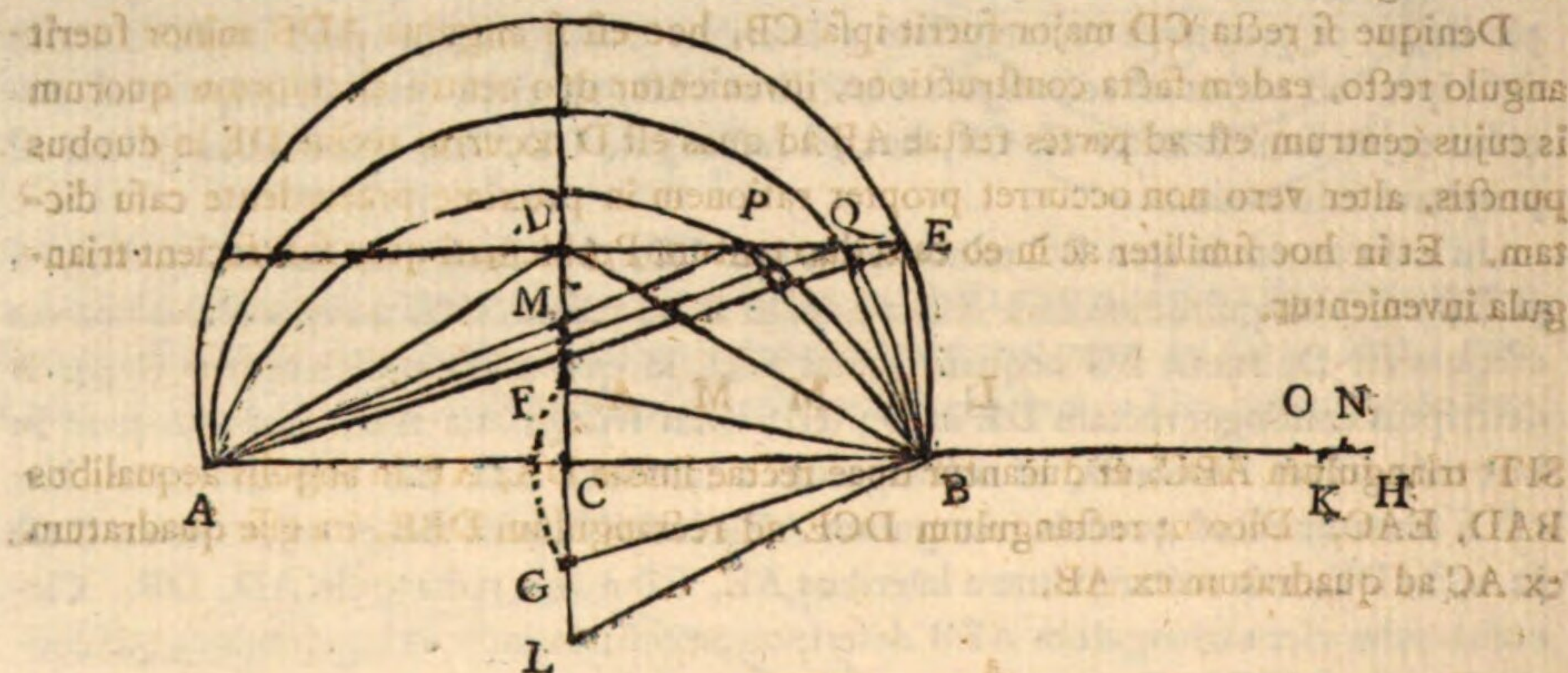
CB in hoc casu est semidiameter circuli describendi, ut occurfu circumferentiae ejus cum recta positione data DE inveniatur vertex trianguli, manifestum est debere CB vel aequalem esse rectae CD, vel ipsâ majorem; in primo casu erit angulus ADB in semicirculo rectus, et rectangulum AD, DB a lateribus aequale rectangulo a CD et diametro, hoc est a CD, AB, et circulus centro C intervallo CB descriptus continget rectam DE in D; si vero CB major fuerit quam CD, circulus centro C per punctum B descriptus secabit rectam DE in duobus punctis quorum alterutrum ut Q erit vertex trianguli AQB super basim AB, quod habebit rectangulum a lateribus aequale rectangulo CD, AB ut in praecedente casu. In alterutro autem casu si sumatur aliud quodvis triangulum super basim AB et altitudinem aequalem habens rectae CD, hoc est habens verticem in recta DE, circulus circa hoc triangulum descriptus major erit circulo cujus centrum est C et qui transit per B, quoniam ille circulus habet centrum in recta CD vel in ea producta ad utraque partes et transit etiam per punctum B, quare semidiameter ejus major est recta CB; rectangulum igitur contentum a CD et semidiametro hoc majus est rectangulo CD, CB, et duplum illius majus duplo hujus, et propterea rectangulum a lateribus trianguli circa quod major circulus descriptus est majus est rectangulo a lateribus trianguli circa quod descriptus est circulus cujus semidiameter est CB, hoc est rectangulo CD, AB, quod rectangulum est propterea minimum.

In casu autem in quo BC minor est quam CD, fiet Problema modo singulari, si positâ rectâ magnitudine datâ BG a puncto B ad rectam CD, ad ejus scilicet partes ad quas est D, fuerit BG aequalis rectae GD, in quo casu circulus centro G per B descriptus continget rectam DE in D; erit enim triangulum ADB unicum quod in hoc casu solvet Problema, et rectangulum a lateribus AD, DB erit minimum, hoc est si sumatur aliud quodvis triangulum AEB basim habens AB et cujus vertex E est in recta DE, erit rectangulum a lateribus AE, EB majus rectangulo AD, DB. Circulus enim circa triangulum AEB descriptus necessario cadit extra circulum qui contingit rectam DE in D, et propterea diameter ejus major est diametro hujus, quare rectangulum AE, EB majus est rectangulo AD, DB.

Componetur vero Problema ita.

Sit AB basis trianguli describendi positione et magnitudine data, sitque CD quae bifariam et ad rectos angulos secat AB altitudo trianguli; et si spatium datum cui aequale debet esse rectangulum a lateribus aequale fuerit rectangulo CD, AB, in casu in quo CD non major est quam CB, triangulum, aut duo triangula quae solvent Problema invenientur ut dictum fuit. Si vero CD major sit quam CB, et spatium datum aequale fuerit rectangulo AD, DB, triangulum ADB solvet Problema. Si autem in casu in quo CD non major est quam CB spatium datum non aequale fuerit rectangulo CD, AB, erit hoc rectangulo majus, quoniam rectangulum CD, AB minimum ostensum fuit. Sit spatium datum aequale quadrato ex BH, et ut CD ad BH, ita fiat BH ad quartam BK bis; et primo sit spatium datum aequale quadrato ex BD quod

quidem majus est rectangulo CD, AB, hoc est duplo rectangulo DC, CB, quoniam quadrata ex DC, CB simul majora sunt eo rectangulo, [7. 2.] et quoniam ex constructione rectangulum contentum CD et BK bis aequale est quadrato ex DB, sive BH quod majus ostensum est rectangulo DC, CB bis, erit BK recta major ipsa BC; et propterea circulus centro B intervallo BK descriptus occurret rectae CD in duobus punctis; sint haec L, M, quorum L sit ad contrarias partes puncti C ad quas est D, et jungatur BL. Et quoniam rectangulum contentum CD et diametro circuli circa triangulum ADB descripti aequale est [8. et 17. 6.] quadrato ex DB, hoc est ex BH, hoc est rectangulo CD, BK bis, erit diameter circuli aequalis rectae BK bis; est igitur BK, sive BL aequalis semidiametro, et propterea est L centrum circuli qui quidem continget rectam DE in D. Et si centro M per B describatur alius circulus, circumferentia hujus occurret rectae DE in duobus punctis quae erunt vertices duorum aliorum triangulorum quae eadem praestant cum triangulo ADB; sunt igitur in hoc casu tria triangula quae Problemati satisfaciunt.



Si vero spatium datum quadratum sc. ex BN minus fuerit quadrato ex BD, semper autem majus debet esse rectangulo CD, AB, ut ostensum fuit, fiat ut CD ad BN, ita BN ad BO bis; quoniam igitur rectangulum CD, BO bis, hoc est quadratum ex BN majus est rectangulo CD, AB, erit BO bis major quam AB, et BO propterea major quam CB. Igitur circulus centro B, intervallo BO descriptus necessario occurret rectae CD in duobus punctis; sint haec F, G quorum G sit ad partes rectae AB contrarias iis ad quas est punctum D; et quoniam rectangulum CD, BO bis aequale est ex constructione quadrato ex BN quod, ex hypothesi minus est quadrato ex BD, hoc est rectangulo CD, BK bis, erit recta BO minor ipsa BK, hoc est erit recta BG minor recta BL; quare cadet punctum G inter L, C puncta. Quoniam vero LG, GB simul majores sunt quam LB hoc est quam LD, circumferentia circuli centro G per B descriptus occurret rectae CD productae ad partes D, et propterea

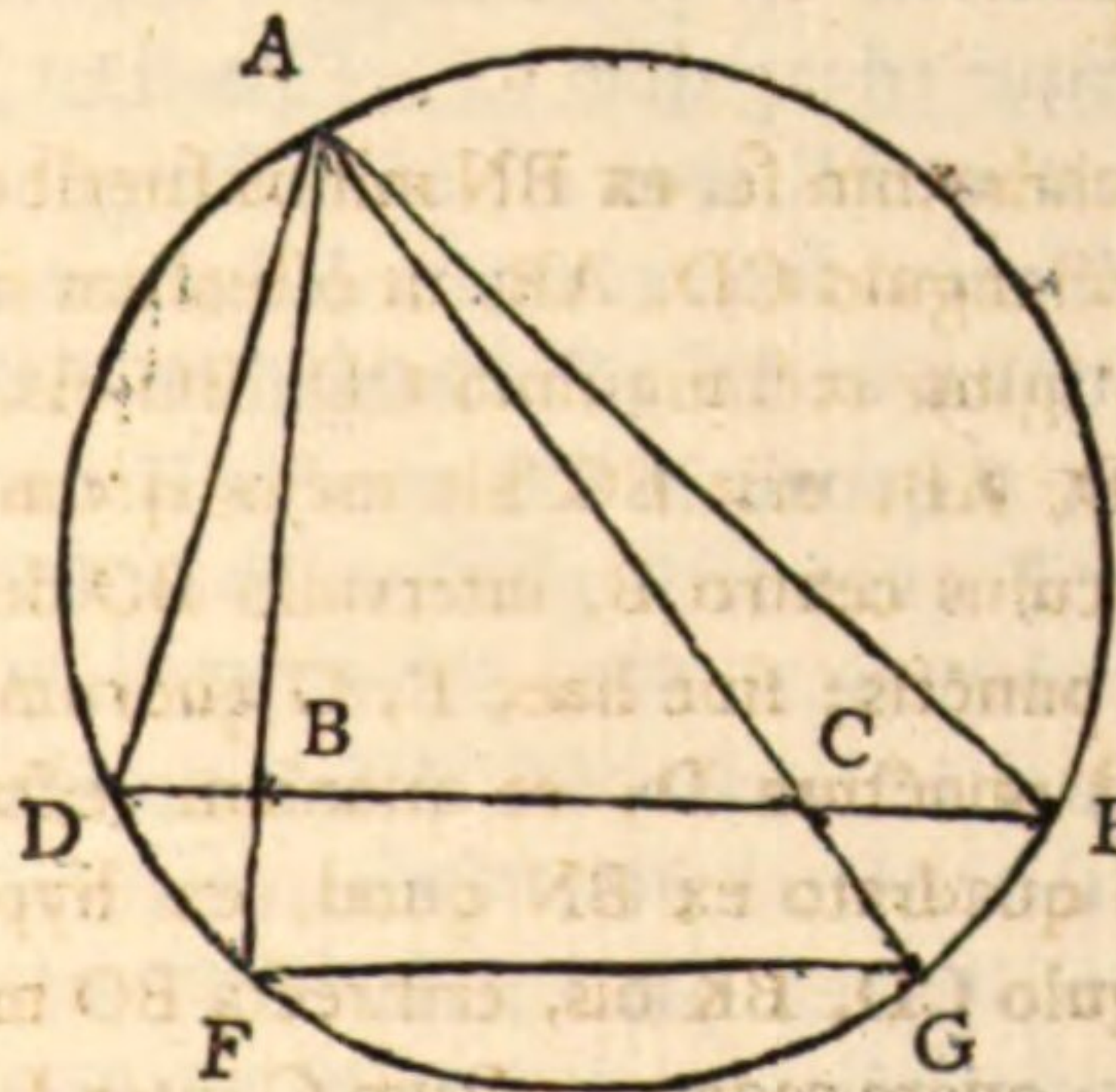
secabit rectam DE in duobus punctis, quorum alterutrum sit P, et junctis AP, BP, erit APB triangulum inveniendum; est enim [Prop. C. 6.] rectangulum a lateribus AP, PB aequale rectangulo a CD et diametro circuli circa APB descripti, hoc est rectangulo CD, GB bis, sive CD, BO bis, hoc est quadrato ex BN, hoc est spatio dato. Patet autem circumferentiam centro F intervallo FB descriptam occurrere rectae DE in duobus punctis quorum alterutrum sit E, et junctis AE, BE, triangulum AEB habebit etiam rectangulum a lateribus AE, BE aequale quadrato ex BN. Sunt igitur in hoc casu quatuor triangula quae Problemati satisficient.

Si vero spatium datum majus fuerit quadrato ex BD, eadem facta constructione, duo invenientur centra circulorum, quorum is cujus centrum est ad partes rectae AB ad quas est punctum D occurret rectae DE in duobus punctis; at quoniam alter cujus centrum est ad contrarias partes rectae AB major est circulo centro L per B descriptus qui quidem contingit rectam DE in D, cadet hic alter infra circulum contingentem rectam DE et propterea huic rectae non occurrit. Igitur in hoc casu duo tantum triangula invenientur.

Denique si recta CD major fuerit ipsa CB, hoc est si angulus ADB minor fuerit angulo recto, eadem facta constructione, invenientur duo centra circulorum quorum is cujus centrum est ad partes rectae AB ad quas est D occurret rectae DE in duobus punctis, alter vero non occurret propter rationem in proxime praecedente casu dictam. Et in hoc similiter ac in eo casu duo tantum Problemati quae satisficient triangula invenientur.

L E M M A .

SIT triangulum ABC, et ducantur duae rectae lineae DA, AE in angulis aequalibus BAD, EAC. Dico ut rectangulum DCE ad rectangulum DBE, ita esse quadratum ex AC ad quadratum ex AB.

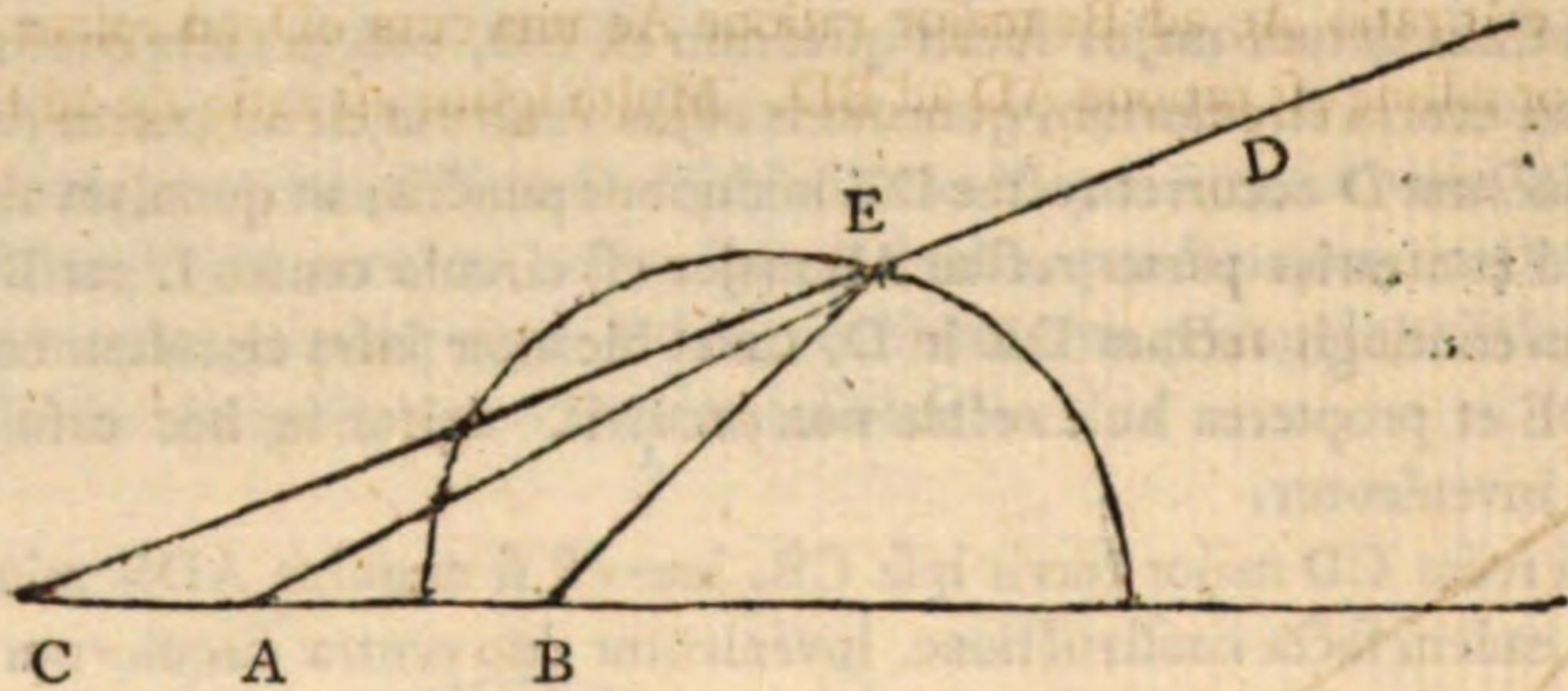


Est Propositio 12^{ma}, Lib. 6^{ti}, Pappi Alexandrini; tantum deest haec figura pro casu sc. quo AD, AE cadunt extra ipsas AB, AC. Demonstratio eadem est.

P R O B. V.

“ DATIS duobus punctis A, B ab ipsis ad datam positione rectam CD inflectere
 “ duas rectas datam inter se rationem habentes.

Factum sit, et inflectantur AE, BE ad rectam CD; igitur tangit punctum E cir-

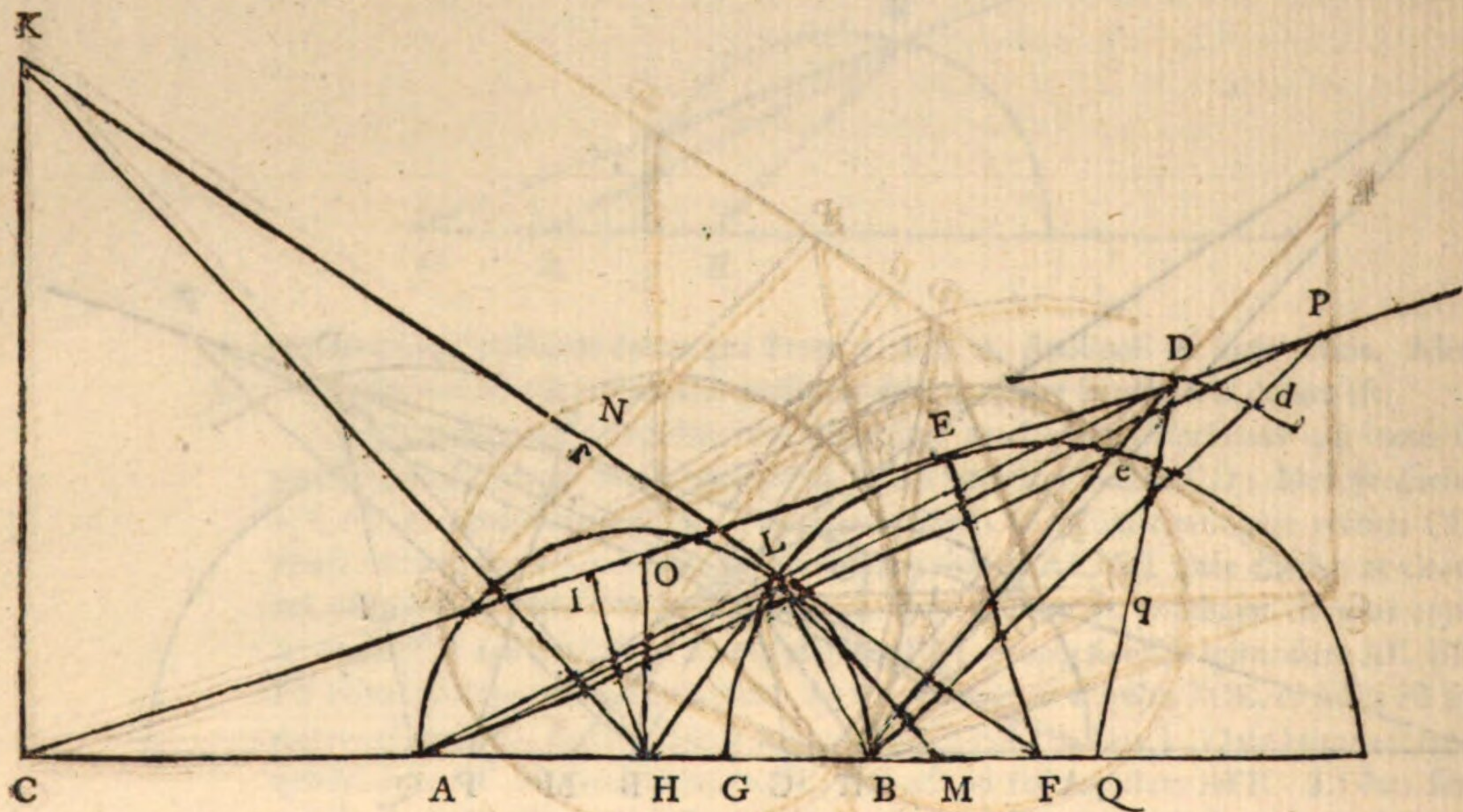


cumferentiam positione datam per Prop. 2. Lib. 2. Apollonii de locis planis. Idem vero punctum tangit rectam CD positione datam, quare punctum E datum est.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut circulus describatur qui locus sit punctorum E, atque ut circumferentia ipsius occurrat rectae CD; ideo problema non erit in omni casu possibile. Si vero acciderit circulum contingere rectam CD, unica erit problematis solutio. Ratio autem ipsarum AE, BE quae efficiet ut circulus contingat rectam CD ita inveniatur. Puta factum sc. contingat circulus cujus centrum est F rectam CD in E, et jungatur FE; proportionales igitur sunt AF, FE, FB ut ex citata propositione constat. Et quoniam datur angulus FCE, et datus est angulus rectus FEC, specie dabitur triangulum CFE [40. Dat.]. Data igitur est ratio quadrati ex CF ad quadratum ex FE, hoc est ad rectangulum AFB. Et data sunt puncta C, A, B. Ergo ad sectionem determinatam deductum est, sc. inveniendum est punctum F quod faciat quadratum ex CF ad rectangulum AFB in data ratione.

Componetur vero hoc ita; a quovis in CB puncto H ducatur ad CD perpendicularis HI, et invento puncto F quod facit quadratum ex CF ad rectangulum AFB, ut quadratum ex CH ad quadratum ex HI; inter AF, et BF media proportionalis sumatur GF; circulus centro F intervallo FG descriptus continget rectam CD; et ratio quaesita erit ea quam habet AF ad FG. Ducatur enim FE perpendicularis ad CD. Et quoniam ex constructione est quadratum ex CF ad rectangulum AFB, hoc est ad quadratum ex FG, ut (quadratum ex CH ad quadratum ex HI, hoc est ut) quadratum ex CF ad quadratum ex FE, erit FG aequalis ipsi FE, et circulus descriptus centro F per punctum G transibit per E, et propterea continget rectam CD.

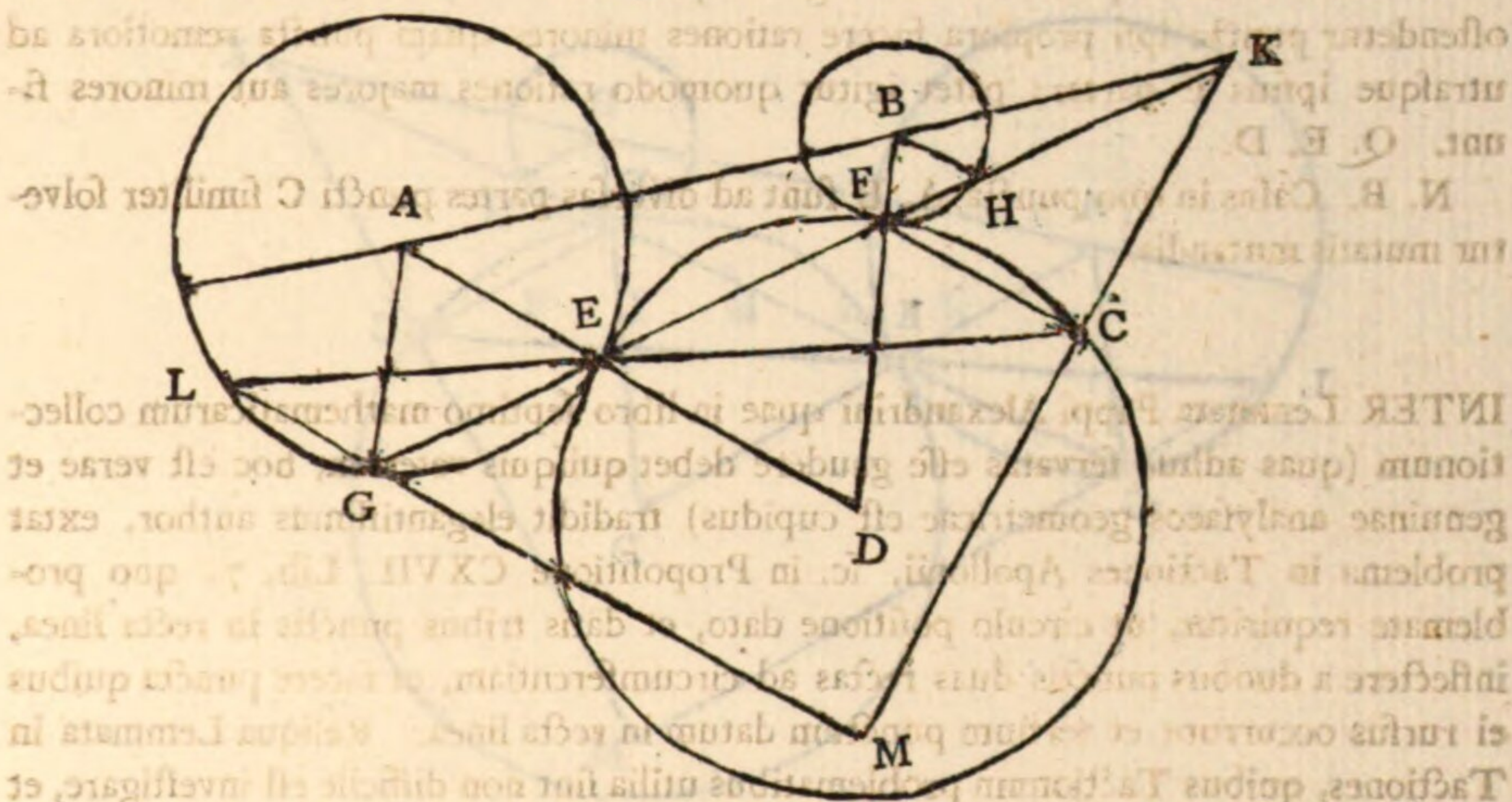
hisce ex angulis rectis FLH, FCK, erit reliquus MLH reliquo LCK aequalis; et aequalis est angulus MHL ipsi CKL; quare aequiangula sunt triangu-
la MHL, LKC; et ut CK ad HL, ita erit KL ad HM. Et per 12. 5, ut CK ad HL, ita est CK una cum KL ad AM. Et ita est contentum AC et ipsis CK, KL simul ad rec-
tangulum MAC. Rursus quoniam est CK ad HL, ut KL ad HM, erit per 19. 5. (facta KN aequali ipsi KC) CK ad HL, ut NL ad BM; et ita est rectangulum con-
tentum BC, NL ad ipsum CBM. Ergo ut contentum AC et ipsis CK, KL simul ad contentum CB, NL, ita est CAM ad CBM. Quoniam vero rectangulum AFB aequale est quadrato ex FL; erit angulus BLF aequalis ipsi FAL, quorum angulus MLF aequalis est ipsi FCL; reliquus igitur BLM aequalis est reliquo ALC: ergo per



Lemma huic praemissum est rectangulum CAM ad ipsum CBM, ut quadratum ex AL ad quadratum ex BL, hoc est ex citata 2da Prop. Lib. 2. de Locis planis, ut quadratum ex AF ad quadratum ex FG. Fuit autem contentum AC et ipsis CK, KL simul ad contentum CB, NL, ut rectangulum CAM ad ipsum CBM; ergo ut quadratum ex AF ad illud ex FG, ita est rectangulum contentum AC ipsisque CK, KL simul ad rectangulum CB, NL. Est autem quadratum ex CK una cum rectangulo ACB aequale quadrato ex KL, utrumque enim, addito quadrato ex AH seu HL, aequale est quadrato ex KH; quare rectangulum ACB aequale est (excessui quadrati ex KL supra illud ex CK seu KN, hoc est [6. 2.]) rectangulo contento CK, KL simul et ipsa LN. Igitur ut AC ad LN, ita est CK una cum KL ad CB; et per 1. 6.

lus FEB aequalis ipse FAE; et est angulus QDB aequalis angulo FAD qui minor est
 ipso FAE, quare angulus QDB minor est BDE exteriori. **PROB. VI.** Et minor est BDE exteriori
 BEC; totus igitur QDE minor est toto FEC hoc est angulo recto. Quoniam igitur
 "DATIS duobus circulis positione et magnitudine quorum centra A, B, datoque
 "puncto C; circulum describere qui positione datos contingat et transeat per da-
 "tum punctum."

Factum sit, sc. contingat circulus cujus centrum D ipsos quorum centra A, B in
 punctis E, F, et juncta EF occurrat circulis rursus in G, H, et junctae AB in K,
 id quod fiet nisi aequales fuerint AE, BF, per Prop. 116. Lib. 7. Pappi Alex. et
 jungantur AD, BD, quae per contactus E, F transibunt, jungantur etiam AG, BH;

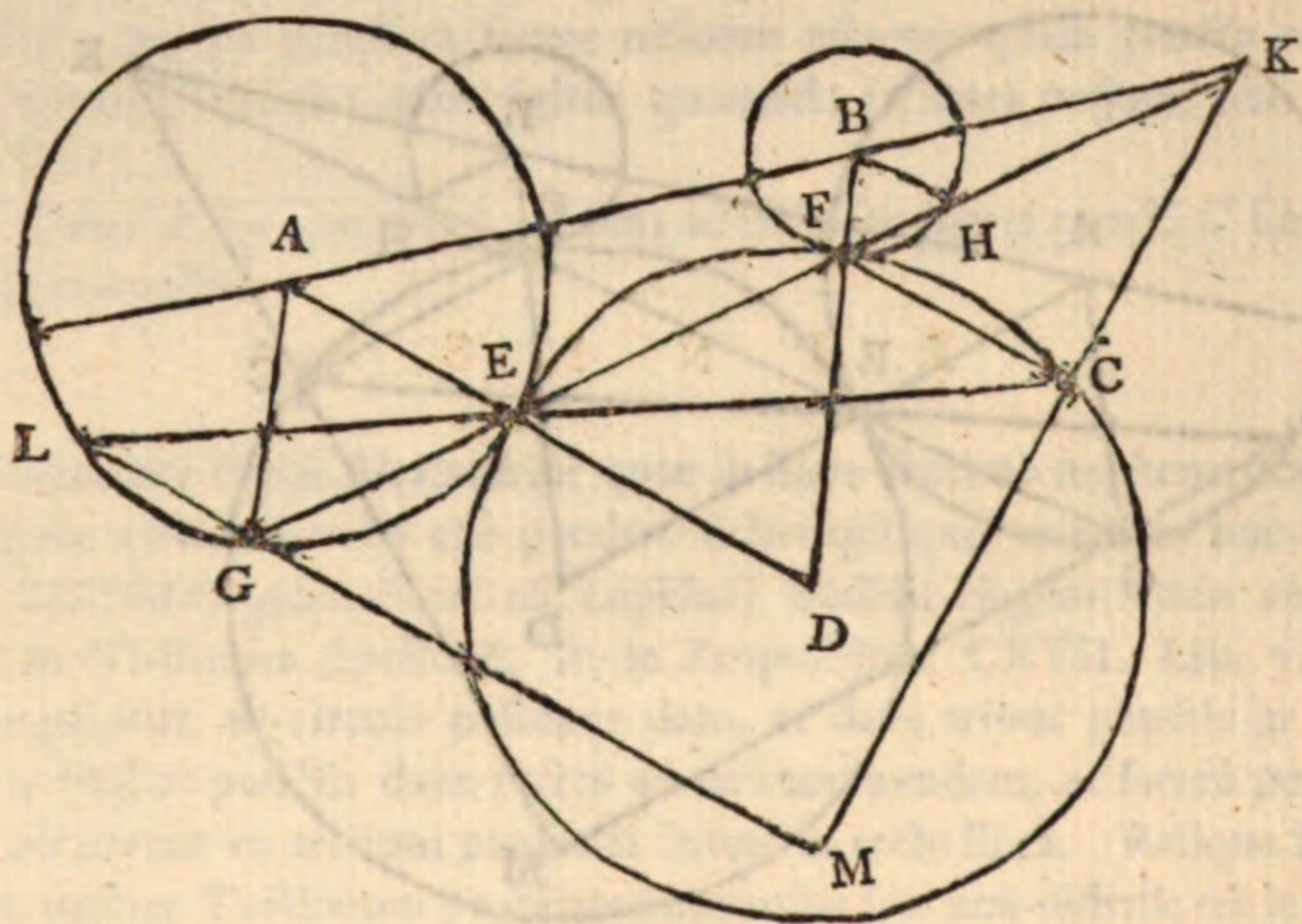


et quoniam in triangulis isoscelibus AEG, DEF, anguli ad bases GEA, FED sunt
 aequales, erunt et AGE, DFE aequales; quare parallelae sunt rectae AG, DF; et
 igitur ut AG ad BF, ita est AK ad KB, et ita etiam GK ad KF; et dantur AG, BF
 magnitudine, quare et ratio AK ad KB, ut et ratio GK ad KF datur; et quoniam
 datur ratio AK ad KB, et est AB positione et magnitudine data, dabitur punctum K.
 Jungatur CF et CE quae circulo EG rursus occurrat in L, et juncta LG occurrat
 junctae KC in M; et quoniam circuli EGL, EFC se mutuo contingunt in E, per
 quod ductae sunt rectae FEG, CEL, erunt LG, CF inter se parallelae per Prop. 102.
 aut 106. Lib. 7. Pappi Alex. Est igitur propter parallelas GK ad KF, ut MK ad
 KC, et ostensum est rationem GK ad KF datam esse; quare datur ratio MK ad KC, et
 datur KC positione et magnitudine propter data C, K puncta; quare datur KM et
 punctum M. Quoniam igitur data sunt tria puncta K, C, M in recta linea, et a

duobus ipforum sc. C, M inflexae sunt CL, ML ad circumferentiam circuli positione dati quae faciunt GE in directum ipsi EK, positione dabuntur CL, ML per propositionem 117am Lib. 7. Pappi Alexandrini, et positione datur circulus LGE; quare dantur G, E puncta et recta GE positione et datur circulus FH positione, ergo datur F punctum; et igitur circulus EFC, qui transit per tria puncta data positione, datur. Quod erat inveniendum.

Componetur vero ita.

Sint A, B centra circulorum positione datorum, et punctum datum sit C; jungatur AB et producaturs versus partes minoris circuli B ad punctum K, ut AK sit ad KB ut semidiameter circuli cujus centrum A ad semidiametrum circuli cujus centrum B; jungatur KC et fiat ut KB ad KA, ita KC ad quartam KM; et a punctis C, M

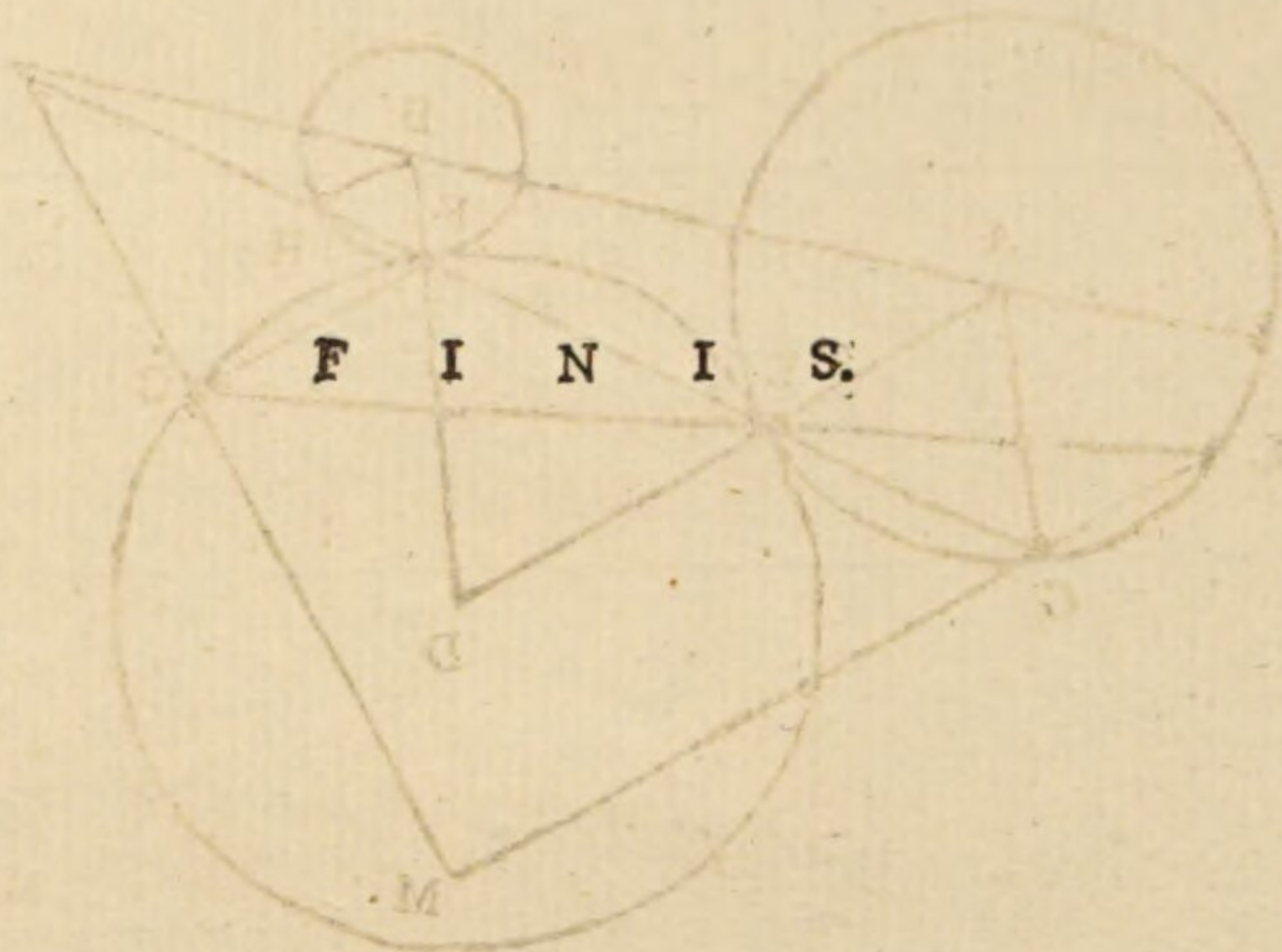


inflexantur ope scilicet Prop. 117. Lib. 7. Pappi, ad circumferentiam circuli cujus centrum est A rectae CL, ML eidem rursus occurrentes in E, G ita ut GEK sit recta linea; et quoniam ex constructione AK est ad KB in ratione quam habent semidiametri circulorum ad se invicem, et recta GK secat circulum A, eadem necessario secabit circulum B per Prop. 118. Lib. 7. Pappi Alexandrini. Secet in F, H punctis; sit vero E propius puncto K quam G in majore circulo, et F remotius ab eodem K quam H in minore, et per puncta E, F (sc. in casu quo circulus describendus debet esse extra datos utrosque) C describatur circulus sitque centrum ejus D; continget haec datos in E, F: jungantur enim AG, AE, BF, BH, DE et DF. Et quoniam in triangulis KAG, KBF quae communem habent angulum ad K, est ex constructione KA ad AG, ut KB ad BF, reliqui vero anguli AGK, BFK sunt utrique minores recto, erit per 7. 6. angulus AGK aequalis ipsi BFK, quare paral-

lelae sunt AG, BF, et igitur est GK ad KF, ut (AK ad KB, hoc est ex constructione ut) MK ad KC; parallelae igitur sunt CF, MGL; quare circuli LGE, EFC se mutuo in puncto E contingunt per prop. 104. aut 106. Pappi Lib. 7. et per prop. 110. ejusdem libri recta erit linea AED, et quoniam in triangulis Isoscelibus GAE, FDE aequales sunt anguli AEG, DEF, aequales erunt et AGE, DFE, et est AGE aequalis ipsi BFK, quare aequales sunt DFE, BFK; recta igitur est linea DFB; ergo se mutuo contingunt circuli EFC, FH per prop. 99. Lib. 7. Pappi. Q. E. D.

Plures autem sunt casus hujus propositionis qui postea declarandi sunt.

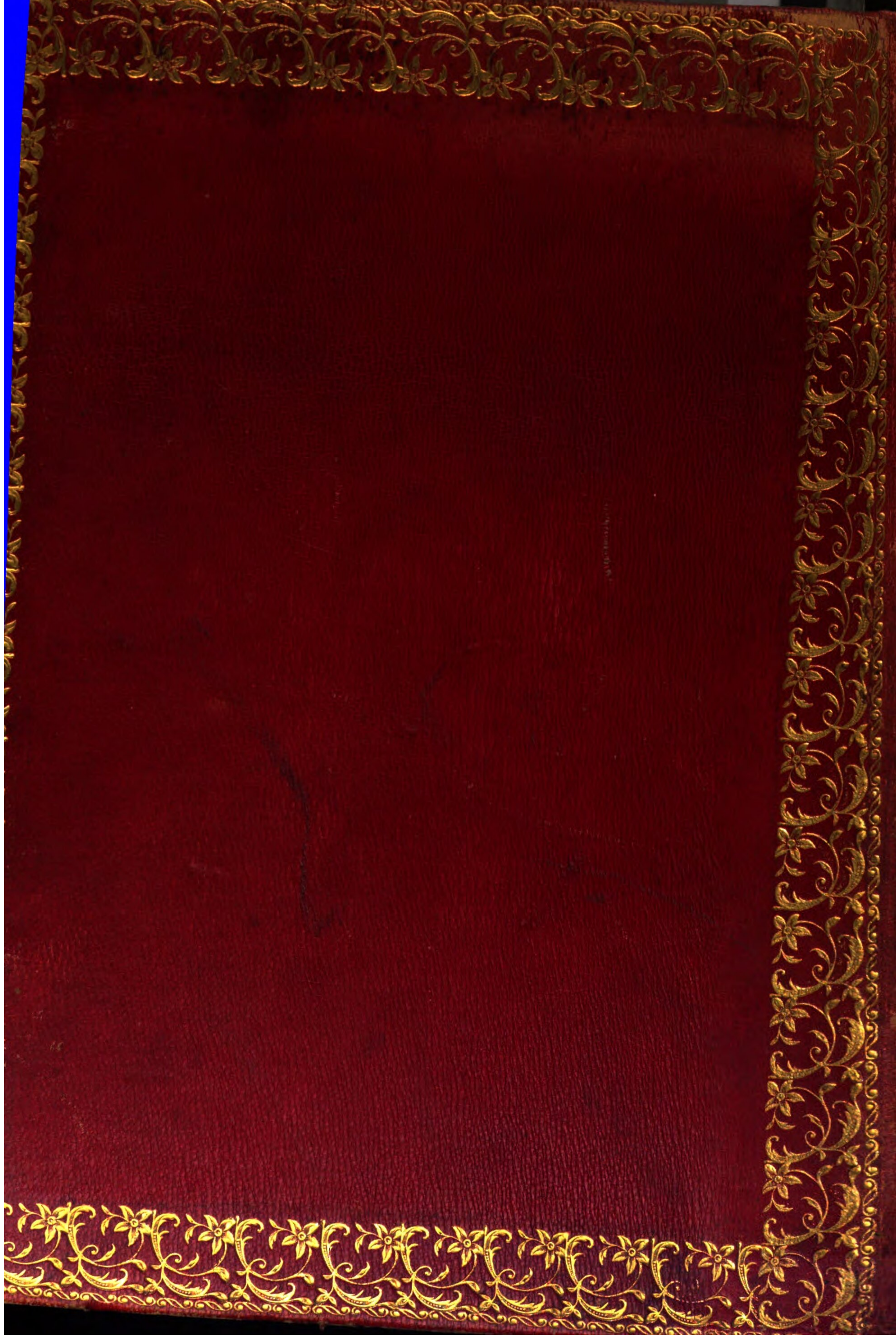
N. B. Editio Datorum, quae per totum opus citatur, est ea, quae Glasguae prodit An. 1762.



Bayerische
Staatsbibliothek
München







Simson, Robert.

Opera quaedam reliquia Scilicet: 1. Apollonii Pergaei de sectione determinata libri II restituti, duobus insuper libris aucti. 2. Porismatum liber. 3. De logarithimis. 4. De limitibus quantitatum et rationum. 5. Appendix (Problemata)

Glasgwa 1776

4 Math.u. 114

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525765-2